

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

P. LE TALLEC  
F. MALLINGER  
**Couplage Boltzmann/Navier-Stokes**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1994, tome 46*  
« Conférences de A. Beauville, A. Coste, J. Dubochet, A. Gramain, M. Holschneider, C. Itzykson, P. Le Tallec, V. Rivasseau, C. Weber », , exp. n° 4, p. 81-105

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1994\\_46\\_81\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1994_46_81_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

# COUPLAGE BOLTZMANN / NAVIER-STOKES

P. LE TALLEC, F. MALLINGER

## Résumé

Nous présentons une méthode de couplage des équations de Boltzmann et de Navier-Stokes. Cette méthode se déduit d'une méthode de décomposition de domaine appliquée à l'équation de Boltzmann et d'une interprétation cinétique des flux Navier-Stokes. Cette approche est testée numériquement pour un écoulement en dimension deux d'un gaz semi-dense.

## 1 Introduction

Durant ces dernières années les scientifiques ont montré un réel intérêt pour le calcul d'écoulements à grandes vitesses et hautes altitudes. Un exemple d'application concerne la phase de réentrée dans l'atmosphère d'un véhicule spatial.

Actuellement le modèle décrivant ces écoulement avec le plus de précision est l'équation de Boltzmann. Malheureusement les méthodes numériques de type Monte-Carlo, utilisées pour résoudre cette équation, sont très onéreuses dès que le libre parcours moyen devient trop petit, en particulier pour les régimes transitionnels.

Il est alors classique d'introduire les équations de Navier-Stokes, obtenues comme limites de l'équation de Boltzmann lorsque le nombre de Knudsen tend vers zero. Dans ce cas le fluide est supposé proche de l'état d'équilibre. Ce modèle n'est donc pas valide pour les écoulements transitionnels qui nous intéressent. De plus des simulations numériques ont montré que les équations de Navier-Stokes avec conditions d'adhérence sur l'obstacle ne sont pas valides dans une couche limite autour de cet obstacle. On observe en effet à la paroi un saut de la température et de la vitesse tangentielle (celle-ci n'est pas nulle).

Nous proposons une alternative basée sur une technique de décomposition de domaine. Cette approche, développée dans le cadre et avec le financement du projet Européen Hermes, consiste à utiliser simultanément le

modèle Boltzmann et le modèle Navier-Stokes. Pour un domaine global fixé, nous déterminons un petit sous domaine, proche de l'obstacle, le contenant éventuellement, dans lequel nous résolvons l'équation de Boltzmann, et un domaine plus éloigné de l'obstacle dans lequel nous résolvons les équations de Navier-Stokes. Ces domaines peuvent ou non se recouvrir et leur réunion est égale au domaine global. Le couplage des deux modèles est assuré par le biais de nouvelles conditions aux limites. Grâce à la théorie cinétique les flux à l'interface des domaines peuvent se décomposer permettant ainsi d'imposer pour chaque sous domaine le flux rentrant à l'interface.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans la seconde section nous présentons le couplage Boltzmann / Boltzmann qui est à l'origine de notre méthode. La troisième section est consacrée à la méthode de Chapman-Enskog qui permet de déterminer les équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann. Dans la quatrième section nous décrivons le couplage Boltzmann / Navier-Stokes. Enfin nous illustrons notre méthode de couplage par des résultats numériques présentés dans la cinquième section.

## 2 Le couplage Boltzmann / Boltzmann

Nous résolvons l'équation de Boltzmann dans un domaine borné en espace en utilisant des techniques classiques de décomposition de domaine. Une présentation générale de ces méthodes est donnée par Quarteroni dans [8] et par Le Tallec dans [9]. Une analyse mathématique rigoureuse des problèmes continu et discret est proposée dans [11] pour le couplage des équations d'advection-diffusion et d'advection pure, et dans [12] pour le couplage des équations de transport. En raison de la complexité de l'équation de Boltzmann (équation intégro-différentielle) nous ne considérons qu'une approche formelle du couplage Boltzmann / Boltzmann. Néanmoins nous préciserons à la fin de cette section les difficultés mathématiques associées à cette approche.

Pour un gaz monoatomique l'équation de Boltzmann s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \partial_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f), \quad \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega \times \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

La fonction inconnue  $f = f(t, x, v)$  est une distribution de particules représentant le nombre de particules localisées en  $x$ , avec une vitesse  $v$  au temps  $t$ . Le nombre de Knudsen  $\varepsilon$ , apparaissant après adimensionnement de l'équation de Boltzmann, est le rapport du libre parcours moyen divisé par

une longueur caractéristique de l'écoulement. Le processus des collisions est modélisé par le terme quadratique  $Q(f, f)$

$$Q(f, f)(x, v, t) = \int_{v_1 \in \mathbb{R}^N} \int_{\omega \in S^2} (f'_1 f' - f f_1) q(v - v_1, w) dv_1 dw.$$

Dans cette expression  $q(v - v_1, w)$  est la section efficace de probabilité de collision. De plus nous avons utilisé la notation suivante

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t, x, v_1), \\ f' &= f(t, x, v'), \\ f'_1 &= f(t, x, v'_1), \end{aligned}$$

où  $(v, v_1)$  et  $(v', v'_1)$  sont les vitesses avant et après une collision de paramètre  $\omega$  appartenant à la sphère  $S^2$ . Pour plus de détails le lecteur pourra consulter Cercignani [4], Kogan [5], Vincenti-Kruger [6].

L'équation (1) est complétée par la condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v) \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

et une condition à l'infini qui impose la distribution de particules entrant dans le domaine  $\Omega$

$$f(t, x, v) = \varphi(t, x, v) \text{ sur } \Sigma^-, \quad (3)$$

où  $\Sigma^-$  est défini par

$$\begin{aligned} \Sigma^- &= [0, \Delta t] \times \Gamma^-, \\ \Gamma^- &= \left\{ (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^N / n(x) \cdot v < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Le vecteur  $n(x)$  est la normale extérieure au domaine  $\partial\Omega$ . De plus en présence d'un obstacle nous imposons comme condition sur l'obstacle une combinaison linéaire d'une réflexion spéculaire et d'une réflexion par accommodation thermique. En d'autres termes, chaque particule qui subit une collision avec l'obstacle est réémise avec une nouvelle vitesse de la forme

$$v' = (1 - \alpha)v'_s + \alpha v'_a. \quad (4)$$

Le nombre  $\alpha \in [0, 1]$  est le coefficient d'accommodation,  $v'_s$  est la vitesse de la particule après une réflexion spéculaire et  $v'_a$  la vitesse de la particule émise selon une distribution Maxwellienne à une température imposée.

Nous appellons  $(P)$  le problème de Cauchy [(1),(2),(3)].

Pour définir une formulation par sous domaine équivalente au problème  $(P)$  nous commençons par décomposer le domaine spatial  $\Omega$  en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , voir figure 1, de telle sorte que

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2,$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Gamma_{12} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2,$$

$$\Gamma_{12}^+ = \{(x, v) \in \Gamma_{12} \times \mathbb{R}^N / v \cdot n(x) > 0\},$$

$$\Gamma_{12}^- = \{(x, v) \in \Gamma_{12} \times \mathbb{R}^N / v \cdot n(x) < 0\},$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega_1$  sur  $\Gamma_{12}$ .

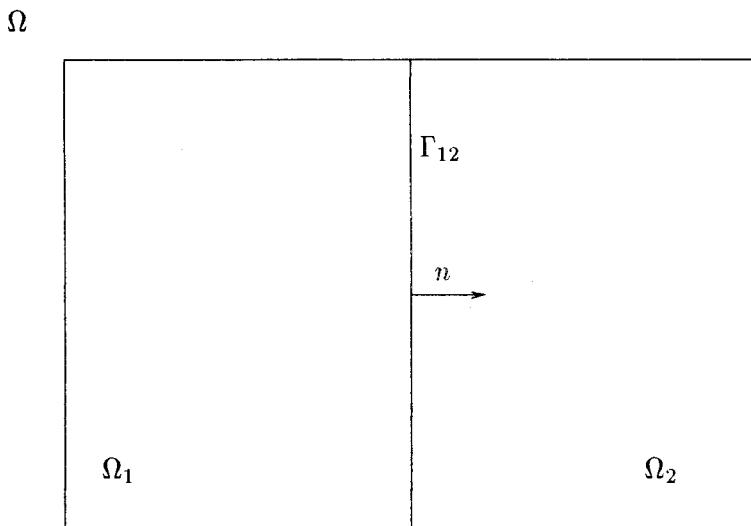


FIG. 1 - Décomposition du domaine Boltzmann

Nous considérons maintenant la restriction de  $f$  à  $[0, \Delta t] \times \Omega_1 \times \mathbb{R}^N$ , notée  $f_1$ , et à  $[0, \Delta t] \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^N$ , notée  $f_2$ . Alors le problème  $(P)$  est formellement équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + v \cdot \partial_x f_1 = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_1, f_1), & \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega_1 \times \mathbb{R}^N, \\ \partial_t f_2 + v \cdot \partial_x f_2 = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_2, f_2), & \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (5)$$

Nous ajoutons à ce système la condition de compatibilité

$$f_1 = f_2, \quad \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12} \times \mathbb{R}^N, \quad (6)$$

et les mêmes conditions initiales et aux limites que pour le problème global. Cette condition de compatibilité est naturelle d'un point de vue physique. Elle exprime la conservation du flux de particules à l'interface des deux domaines. Pour obtenir un système couplé nous décomposons cette condition d'interface (6) en

$$f_1 = f_2 \quad \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12}^- \times \mathbb{R}^N, \quad (7)$$

$$f_2 = f_1 \quad \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12}^+ \times \mathbb{R}^N. \quad (8)$$

Les conditions (7) et (8) expriment que la distribution entrant dans  $\Omega_1$  à travers  $\Gamma_{12}$  est exactement la distribution sortant du domaine  $\Omega_2$ , et de la même manière la distribution entrant dans  $\Omega_2$  à travers  $\Gamma_{12}$  est la distribution sortant du domaine  $\Omega_1$ .

Nous en déduisons la formulation couplée finale du problème ( $P$ ) en deux sous problèmes ( $P_1$ ) et ( $P_2$ )

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + v \cdot \partial_x f_1 = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_1, f_1), & \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega_1 \times \mathbb{R}^N, \\ f_1 = f_2 & \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12}^- \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \partial_t f_2 + v \cdot \partial_x f_2 = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_2, f_2), & \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^N, \\ f_2 = f_1 & \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12}^+ \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (10)$$

avec les mêmes conditions initiales et aux limites que pour le problème global.

La résolution du problème couplé ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) est obtenue par l'algorithme itératif suivant

$$\begin{cases} \partial_t f_1^n + v \cdot \partial_x f_1^n = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_1^n, f_1^n), & \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega_1 \times \mathbb{R}^N, \\ f_1^n = f_2^{n-1} & \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12}^- \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \partial_t f_2^n + v \cdot \partial_x f_2^n = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_2^n, f_2^n), & \text{dans } [0, \Delta t] \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^N, \\ f_2^n = f_1^n & \text{sur } [0, \Delta t] \times \Gamma_{12}^+ \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (12)$$

où  $f_2^{n-1}$  est connu pour  $n-1 \geq 0$ . Si l'algorithme converge, notant  $f_1$  et  $f_2$  les limites respectives de  $f_1^n$  et  $f_2^n$ , alors  $f_1$  et  $f_2$  sont solutions respectivement des problèmes  $(P_1)$  et  $(P_2)$ , et par conséquent sont les restrictions de la solution globale  $f$  de  $(P)$ .

Nous pouvons maintenant appliquer cet algorithme pour résoudre l'équation de Boltzmann. En effet, considérant un algorithme de marche en temps, le problème pour chaque pas de temps est ramené au problème précédent. Plus précisément nous partitionnons l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $M$  intervalles de longueur  $\Delta t = T / M$ . Ensuite nous résolvons successivement  $M$  problèmes équivalents à  $(P)$ , c'est à dire que sur chaque intervalle  $[k \Delta t, (k+1) \Delta t]$ ,  $k > 0$ , nous résolvons

$$\begin{cases} \partial_t f_n + v \cdot \partial_x f_n = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_n, f_n), & \text{dans } [k \Delta t, (k+1) \Delta t] \times \Omega \times \mathbb{R}^N, \\ f_n(k \Delta t) = f_{n-1}(k \Delta t) & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (13)$$

pour  $k \geq 1$ . Pour chaque sous problème nous appliquons l'algorithme itératif précédent. D'un point de vue mathématique la convergence de l'algorithme précédent est encore un problème ouvert.

Revenant au problème initial  $(P)$ , la condition (3) a un sens dans  $L^1(\Sigma^-, |v \cdot n(x)| d\sigma_x dv dt)$  ( $d\sigma_x$  étant la mesure surfacique sur  $\partial\Omega$ ), si  $f$  et  $\partial(f)/\partial t + v \cdot \partial(f)/\partial x$  sont dans  $L^1([0, \Delta t] \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$ . Une preuve est donnée par Ukai dans [13], voir aussi Cessenat [19] et [20]. L'existence d'une solution globale du problème  $(P)$  est établie par Hamdache [14], suivant l'idée introduite par DiPerna et Lions [15], [16] pour le problème de Cauchy. Ils ont montré l'existence d'une solution faible sans hypothèse trop restrictive sur la donnée initiale. La question de l'unicité reste un problème ouvert. L'équivalence entre les problèmes  $(P)$  et  $(P_1), (P_2)$  se déduit de la définition de la trace et de la formule de Green due à Ukai [13]. Dans notre analyse mathématique, nous utilisons le modèle simplifié de BGK. Récemment Perthame et Pulvirenti [21] ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de BGK dans un domaine borné pour des conditions aux limites périodiques. Nous avons étendu ces résultats à des conditions aux limites plus générales et nous étudions la convergence de l'algorithme itératif précédent en remplaçant le modèle Boltzmann par le modèle BGK.

### 3 La méthode de Chapman-Enskog

Nous considérons à nouveau l'équation de Boltzmann adimensionnée (1). Pour les régime fluides, le nombre de Knudsen  $\varepsilon$  est très petit. Il semble alors naturel de chercher la distribution  $f$  comme un développement en puissances de  $\varepsilon$ . A l'ordre un en  $\varepsilon$  nous obtenons la distribution de Chapman-Enskog que nous écrivons

$$f = f_0(1 + \varepsilon \varphi), \quad (14)$$

où  $f_0$  et  $\varphi$  sont des fonctions inconnues. Remplaçant  $f$  par (14) dans l'équation de Boltzmann nous obtenons à l'ordre  $-1$  en  $\varepsilon$

$$Q(f_0, f_0) = 0. \quad (15)$$

Il en résulte que  $f_0$  est une distribution Maxwellienne locale. Cette distribution s'écrit

$$f_0 = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(v-u)^2}{2RT}\right). \quad (16)$$

Substituant  $f$  par (14) dans l'équation de Boltzmann, celle-ci devient

$$L(\varphi) = (\partial_t f_0 + v \cdot \partial_x f_0) + O(\varepsilon), \quad (17)$$

où  $L$  est l'opérateur linéaire défini par

$$L(\varphi) = 2Q(f_0, f_0 \varphi). \quad (18)$$

Finalement en supposant que  $L$  est inversible, nous en déduisons l'expression de  $\varphi$

$$\varphi = L^{-1} [(\partial_t f_0 + v \cdot \partial_x f_0) + O(\varepsilon)]. \quad (19)$$

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont données par l'expression

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f_0(1 + \varepsilon \varphi) K dv + \frac{\partial}{\partial x} \int f_0(1 + \varepsilon \varphi) v K dv = 0, \quad (20)$$

obtenue en multipliant l'équation de Boltzmann par  $K = (1, v, v^2/2)$  et en intégrant sur le domaine des vitesses.

La détermination de  $\varphi$  nécessite les trois hypothèses suivantes

- (i) Le terme de droite de (19) est déterminé à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  en écrivant les équations de conservation à l'ordre 0 en  $\varepsilon$

(ii) La fonction  $\varphi$  vérifie la condition

$$\int f_0 \varphi K dv = 0,$$

qui signifie que les quantités  $\rho, u$  et  $T$ , paramètres de la Maxwellienne  $f_0$ , sont la densité, la vitesse moyenne et la température du fluide.

(iii) L'équation de perturbation

$$L(\varphi) = \frac{df_0}{dt} + O(\varepsilon),$$

est résolue dans l'espace généré seulement par les premiers polynômes de Laguerre-Sonine.

Sous toutes les hypothèses précédentes nous déduisons l'approximation suivante  $f_{CE}$  de  $f$

$$\begin{aligned} f_{CE} = f_0 & \left[ 1 + \frac{2}{5} \frac{\lambda}{\rho(RT)^2} \left( \frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2} \right) c \cdot \partial_x T - \right. \\ & \left. - \frac{\mu}{\rho(RT)^2} \left( c \otimes c - \frac{1}{3} c^2 Id \right) : \partial_x u \right]. \end{aligned}$$

Dans cette expression  $c = \frac{v - u}{\sqrt{RT}}$  est la vitesse réduite. Les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$  dépendent du noyau de collision et du degré des polynômes de Sonine choisi pour le calcul de  $\varphi$ .

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues en remplaçant  $f$  par  $f_{CE}$  dans les équations de conservation (20). On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u \otimes u + p Id - \tau \\ (\rho E + p) u + q \end{pmatrix} = 0, \quad (21)$$

où  $E = u^2/2 + (3/2)p$  est l'énergie totale. Le tenseur des contraintes et le flux de chaleur sont donnés par

$$\begin{aligned} \tau &= - \int \varepsilon f_0 \varphi c \otimes c dc \\ &= \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \right) - \frac{2}{3} \operatorname{div}(u) Id \right], \\ q &= \int \varepsilon f_0 \varphi c^2 c dc = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned}$$

## 4 Le couplage Boltzmann Navier-Stokes

### 4.1 La condition d'interface: couplage par demi-flux

Revenons au couplage Boltzmann / Boltzmann introduit dans la seconde section. Nous supposons vérifiées, dans un des sous domaines, par exemple  $\Omega_1$ , les hypothèses permettant de développer la méthode de Chapman-Enskog. Dans  $\Omega_1$  nous remplaçons donc l'équation de Boltzmann par les équations de Navier-Stokes. Ainsi la distribution de particules est donnée par la distribution de Chapman-Enskog. Les conditions de compatibilité (7), (8) sur l'interface  $\Gamma_{12}$  deviennent alors

$$f_2(v) = f_{CE}(v) \quad \text{si } v \cdot n > 0, \quad (22)$$

$$f_{CE}(v) = f_2(v) \quad \text{si } v \cdot n < 0. \quad (23)$$

Pour le modèle Boltzmann la condition (22) exprime que la distribution rentrant dans le domaine Boltzmann est égale à celle sortant du domaine Navier-Stokes. Le problème qui en résulte dans ce domaine est bien posé. Pour le modèle Navier-Stokes la condition (23) ne peut être considérée qu'en moyenne. Pour ce faire nous reprenons l'expression cinétique du flux Navier-Stokes considéré à travers l'interface  $\Gamma_{12}$ . Il s'écrit

$$F(U).n_{/\Gamma_{12}} = \int_{v \in \mathbb{R}^3} v \cdot n K f_{CE} dv, \quad (24)$$

où  $n$  est la normale à  $\Gamma_{12}$  extérieure à  $\Omega_1$ . Grâce à cette formulation cinétique nous décomposons  $F(U).n_{/\Gamma_{12}}$  en un flux sortant du domaine Navier-Stokes à travers  $\Gamma_{12}$ , noté  $F(U)^+.n$ , et un flux rentrant dans le domaine Navier-Stokes à travers  $\Gamma_{12}$ , noté  $F(U)^-.n$ . Il suffit pour cela de décomposer le domaine d'intégration dans (24) en  $\{v \cdot n < 0\}$  et  $\{v \cdot n > 0\}$ . Ainsi  $F(U).n_{/\Gamma_{12}}$  s'écrit

$$\begin{aligned} F(U).n_{/\Gamma_{12}} &= \int_{v \cdot n > 0} v \cdot n K f_{CE} dv + \int_{v \cdot n < 0} v \cdot n K f_{CE} dv \\ &= F^+(U).n + F^-(U).n. \end{aligned} \quad (25)$$

En intégrant la condition (23), nous obtenons alors

$$F^-(B).n = \int_{v \cdot n < 0} v \cdot n K f_2 dv = \int_{v \cdot n < 0} v \cdot n K f_{CE} dv = F^-(U).n. \quad (26)$$

Finalement en combinant (25) et (26), nous obtenons l'expression suivante du flux à travers  $\Gamma_{12}$  pour le problème local dans  $\Omega_1$

$$F(U).n_{/\Gamma_{12}} = F(U)^+.n + F(B)^-.n. \quad (27)$$

La condition (27) est la condition aux limites à imposer aux équations de Navier-Stokes sur l'interface  $\Gamma_{12}$ .

Ainsi nous avons introduit, par (22) et (27), un couplage des équations de Boltzmann et de Navier-Stokes, qui semble naturel d'un point de vue physique. Nous l'appelons le couplage par demi flux. Il est clair que ce couplage est valide lorsque l'approximation Navier-Stokes est valide. Il est donc nécessaire pour réaliser des simulations numériques de déterminer correctement les différents domaines de calcul.

## 4.2 L'algorithme de couplage

Dans cette section nous introduisons de nouvelles notations décrivant de manière générale la géométrie du problème. Nous considérons un écoulement autour d'un obstacle de frontière  $\Gamma_W$ , dans un domaine global  $\Omega$  (fig. 2). Le domaine global est décomposé en deux sous domaines  $\Omega_{NS}$  (domaine Navier-Stokes) et  $\Omega_B$  (domaine Boltzmann). Le domaine local  $\Omega_B$ , de frontière interne  $\Gamma_W$  et de frontière externe  $\Gamma_B \subset \bar{\Omega}_{NS}$ , contient le corps. Dans ce domaine, on résoud l'équation de Boltzmann. Dans le domaine  $\Omega_{NS}$  nous résolvons les équations de Navier-Stokes. Sa frontière externe  $\Gamma_{ext}$  est la frontière externe du domaine global. Sa frontière interne  $\Gamma_{int} \subset \bar{\Omega}_B$  englobe le corps. Les deux sous domaines peuvent ou non se recouvrir. Nous désignerons toujours par  $n$  la normale extérieure au domaine Navier-Stokes et par  $n_B$  la normale intérieure au domaine Boltzmann dans le cas d'un recouvrement. La partition est ici définie a priori.

Avec ces notations, Le problème couplé que nous voulons étudier s'écrit

- dans la domaine  $\Omega_B$ , nous résolvons l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \frac{\partial}{\partial x} f = Q(f, f),$$

avec comme conditions initiales

$$f_{/t=0} = Maxw(\rho_\infty, u_\infty, T_\infty),$$

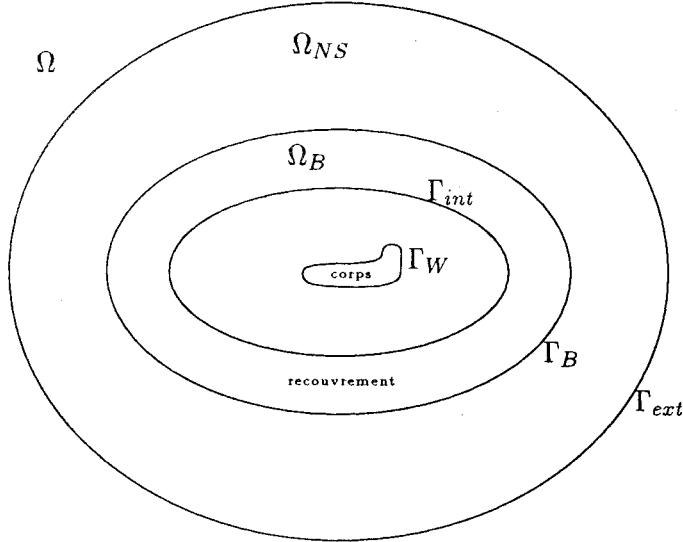


FIG. 2 - géométrie

la fonction d'équilibre dont les paramètres sont les valeurs à l'infini. Sur le corps  $\Gamma_W$ , nous imposons comme condition aux limites une réflexion selon le modèle de Maxwell (4). Sur la frontière  $\Gamma_B$  nous imposons une distribution de particules rentrantes. Cette distribution est

$$f_{/\Gamma_B} = Maxw(\rho_{NS}, u_{NS}, T_{NS}),$$

où les paramètres sont donnés par la solution Navier-Stokes.

- dans le domaine  $\Omega_{NS}$ , nous résolvons les équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0,$$

où  $U = (\rho, \rho u, \rho E)$  sont les variables conservatives. Nous ajoutons la condition initiale suivante

$$U_{/t=0} = (\rho_\infty, \rho_\infty u_\infty, \rho_\infty E_\infty)$$

Sur le bord extérieur  $\Gamma_{ext}$ , nous imposons les conditions usuelles de Dirichlet. Sur le bord intérieur  $\Gamma_{int}$ , nous utilisons la condition de

décomposition des flux (27)

$$F(U).n = F(U)^+.n + F(B)^-.n.$$

Les demi-flux sortants  $F(U)^+.n$  sont donnés par une formule explicite, et dépendent seulement des variables macroscopiques  $(\rho, u, T)$  et de leurs gradients. Les demi-flux rentrants  $F(B)^-.n$  sont calculés dans le code Boltzmann et imposés comme conditions aux limites dans le code Navier-Stokes.

L'algorithme que nous associons au problème couplé précédent est l'algorithme de marche en temps introduit dans la seconde section pour le couplage Boltzmann / Boltzmann dans lequel nous remplaçons un des modèles Boltzmann par le modèle Navier-Stokes.

Connaissant la solution à l'itération  $(n)$  ( $n \geq 0$ ), c'est-à-dire la solution Navier-Stokes  $(\rho_{NS}^{(n)}, u_{NS}^{(n)}, T_{NS}^{(n)})$  dans  $\Omega_{NS}$  et la solution Boltzmann  $f_B^{(n)}$  dans  $\Omega_B$ , nous procérons de la manière suivante pour calculer la solution globale à l'itération  $(n+1)$

– Itération Boltzmann locale  $(n+1)$

– Résoudre l'équation de Boltzmann avec la condition initiale

$$f_{B/t=0}^{(n+1)} = f_B^{(n)},$$

le modèle de réflexion de Maxwell sur le corps  $\Gamma_W$  et la condition de compatibilité

$$f_{/\Gamma_B}^{(n+1)} = Maxw(\rho_{NS}^{(n)}, u_{NS}^{(n)}, T_{NS}^{(n)}),$$

sur  $\Gamma_B$ , si  $v.n_B > 0$ .

– Calculer  $(F(B)^-.n)^{(n+1)}$  connaissant  $f_B^{(n+1)}$ .

– Itération Navier-Stokes locale  $(n+1)$

– Résoudre les équations de Navier-Stokes avec la condition initiale

$$U_{/t=0}^{(n+1)} = U^n,$$

une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_{ext}$  et la condition de compatibilité sur  $\Gamma_{int}$

$$F(U^{n+1}).n = F(U^{n+1})^+.n + F(B^{n+1})^-.n$$

En pratique, pour une itération Boltzmann locale, nous résolvons un nombre fixé  $N_B$  de pas de temps de l'algorithme Boltzmann, et pour une itération Navier-Stokes locale un nombre fixé  $N_{NS}$  de pas de temps de l'algorithme Navier-Stokes. L'algorithme précédent est stoppé dès que les conditions aux limites sur  $\Gamma_B$  sont stationnaires; c'est-à-dire lorsque les paramètres  $(\rho, u, T)_{NS}$ , qui déterminent la maxwellienne sur  $\Gamma_B$ , le sont. On se contente de contrôler uniquement les variations de la densité. Le résidu est calculé par la formule suivante,

$$\text{Résidu} = \frac{\sum_{x_i \in \Gamma_B} |\rho_i^{n+1} - \rho_i^n|}{\sum_{x_i \in \Gamma_B} \rho_i^0}.$$

Il est difficile d'atteindre une précision numérique supérieure à  $10^{-3}$  car la méthode de Monte-Carlo engendre beaucoup de bruit. Enfin on notera que si la solution Boltzmann est stationnaire il en est de même de la solution Navier-Stokes puisque les demi-flux entrant dans le domaine  $\Omega_{NS}$  sont également stationnaires.

Nous utilisons dans nos simulations un code Navier-Stokes basé sur une méthode d'éléments finis de type "least-square Galerkin". Ce code a été fourni par Dassault Aviation. Le code Boltzmann est basé sur la méthode FPM (the "finite pointset method") développée à l'université de Kaiserslautern par le groupe de H. Neunzert [7].

## 5 Résultats numériques

Nous considérons un écoulement externe, d'un gaz monoatomique, autour d'une ellipse. Le premier résultat présenté est un calcul Boltzmann sur un domaine global. Cette solution, considérée comme une solution de référence, nous permettra de valider les résultats de couplage. Pour le calcul de la solution couplée, les domaines Boltzmann et Navier-Stokes sont déterminés de manière automatique. Pour cela nous avons implémenté un critère permettant de déterminer la validité de la solution Navier-Stokes en tout point du domaine global. Lors d'une étape d'initialisation de l'algorithme de couplage nous calculons une solution Navier-Stokes sur le domaine global, avec les conditions classiques d'adhérence, solution à laquelle nous appliquons le critère. Ces techniques ne sont pas développées dans cet article, voir [25].

## 5.1 Paramètres de l'écoulement

Nous choisissons d'étudier un écoulement hypersonique autour d'une ellipse dans des conditions proches de celles d'un vol réel. Les paramètres correspondants sont

$$\begin{aligned} M_\infty &= 20. \\ T_\infty &= 167.3 \text{ K} \\ u_\infty &= 5672. \text{ m/s} \\ \rho_\infty &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_W &= 1000. \text{ K} \\ Re/m &= 5000. \\ \gamma &= \frac{5}{3} \\ \text{Pr} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La viscosité suit une loi de Sutherland et le modèle des collisions est le modèle des sphères dures.

Nous précisons maintenant quelques données pour le calcul Boltzmann

$$\begin{aligned} MFP_\infty &= 0.0066 \text{ m} \\ \text{Accomodation totale} \\ \text{Nombre de particules dans une cellule infini} &= 25 \\ \text{Nombre de particules pour subdivision d'une cellule} &= 100 \end{aligned}$$

Enfin nous précisons quelques grandeurs géométriques du domaine global

$$\begin{aligned} \text{Taille du domaine en x} &= 2.25 \text{ m} \\ \text{Taille du domaine en y} &= 2. \text{ m} \\ \text{Longeur de l'ellipse} &= 1. \text{ m} \end{aligned}$$

## 5.2 Solution Boltzmann de référence

La validation des résultats de couplage se fera par comparaison des grandeurs suivantes, calculées à la paroi

– coefficient de frottement  $C_f$

$$C_f = \frac{(\sigma \cdot n) \cdot \tau}{0.5 \rho_\infty u_\infty^2},$$

- coefficient de force normale  $C_{Fn}$

$$C_{Fn} = \frac{(\sigma \cdot n) \cdot n}{0.5 \rho_\infty u_\infty^2},$$

- coefficient de chaleur  $C_h$

$$C_h = \frac{(q \cdot n)}{0.5 \rho_\infty u_\infty^3},$$

où  $n$  et  $\tau$  sont le vecteur normal et le vecteur tangent à l'ellipse. Notons que les valeurs négatives qui apparaîtront sur les courbes représentant le coefficient de force normale et la vitesse tangentielle résultent de l'orientation du vecteur tangent prise systématiquement dans le sens rétrograde.

Le domaine de calcul est le domaine global. Le maillage est constitué de 100 fois 100 cellules. Nous avons fait 1200 pas de temps et calculé les grandeurs moyennes sur les 600 derniers pas de temps. Le temps de calcul est de 2h30mn. Les figures (3) et (4) représentent les iso-valeurs de la température et de la densité.

### 5.3 Solution couplée Boltzmann/Navier-Stokes

Le code a calculé dix itérations globales de couplage. Le premier calcul Boltzmann est initialisé par une Maxwellienne dont les paramètres sont calculés à partir de la solution Navier-Stokes initiale. Pour ce premier calcul le nombre d'itérations de l'algorithme Boltzmann est fixé à 500 et les moyennes sont calculées sur 200 pas de temps. Pour les itérations suivantes les moyennes sont toujours calculées sur 200 pas de temps pour un nombre total d'itérations fixé à 400.

Pour le calcul Navier-Stokes le maillage discrétilisant le domaine Navier-Stokes est obtenu par une adaptation isotrope selon la température, avec comme maillage et solution de fond ceux d'une solution Navier-Stokes calculée préalablement. Il est constitué de 1758 noeuds pour 3233 triangles (5). Le nombre d'itérations pour l'algorithme Navier-Stokes est fixé, pour chaque itération globale, à 500 itérations explicites avec un nombre de CFL de 0.1. Le temps de calcul d'une itération globale est de 30mn.

Le résidu global est stable à partir de la troisième itération (voir figure (6)). Les figures (7) et (8) représentent les iso-valeurs de la température et de la densité. Les figures (9), (10), (11) et (12) représentent des coupes transversales de la température et de la densité. Elles sont comparées par

superposition à celles de la solution Boltzmann de référence. Les figures (13), (14), (15) et (16) représentent les coefficients de frottement, de chaleur, de force normale et la vitesse tangentielle à la paroi. Nous remarquons que ces résultats restent toujours comparables à ceux de la solution Boltzmann de référence.

## 6 CONCLUSION

La technique de couplage Boltzmann/Navier-Stokes par demi-flux semble naturelle dans son principe et dans son implémentation comme solution possible des écoulements externes hypersoniques semi-raréfiés. Cette méthode peut s'appliquer indépendamment de l'approximation des équations de Navier-Stokes choisie. Pour les résultats numériques, nous avons effectué les calculs avec un code Navier-Stokes de type éléments finis. En particulier, nous avons pu prendre en compte les effets visqueux dans le domaine global. On observe aussi que l'algorithme de couplage semble converger indépendamment des conditions aux limites imposées sur le corps, de la discrétisation du domaine  $\Omega_B$  et de la position de la frontière  $\Gamma_B$ .

Le couplage permet d'étudier des écoulements hypersoniques pour des petits nombres de Knudsen et ceci pour un coût de calcul raisonnable, puisque le modèle cinétique n'est utilisé que près du corps.

Présenté ici pour le cas de gaz monoatomique cette méthode peut se généraliser au cas des gaz polyatomiques monotempératures.

## Références

- [1] J.F. Bourgat, P. Le Tallec, D. Tidriri, Y. Qiu, "Numerical coupling of nonconservative or kinetik models with the conservative compressible Navier-Stokes equations", *Rapport de recherche INRIA no 1426*, mai 1991.
- [2] D. TIDRIRI, "Couplage d'approximations et de modèles de types différents dans le calcul d'écoulements externes", *Thèse de doctorat*, Université Paris 9, Mai 1992.
- [3] J.F. Bourgat, P. Le Tallec, F. Mallinger, B. Perthame, Y. Qiu, "Coulpage Boltzmann Navier-Stokes", *Rapport de recherche INRIA no 2281*, mai 1994.
- [4] C. Cercignni, "Theory and application of the Boltzmann equation", *Springer*, 1988.
- [5] M. N. Kogan, "Rarefied gas dynamics", *Plenum Press*, New-York, 1969.

- [6] W. G. Vincenti, C. H. Kruger, "Introduction to physical gas dynamics", *Robert E. Krieger publishing company*, Florida, 1986.
- [7] H. Neunzert, F. Gropengiesser, J. Struckmeier, "Computational methods for the Boltzmann equation", *Applied and Industrial Mathematics*, Ed. R. Spigler, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [8] A. Quarteroni, "Domain decomposition method for numerical solution of partial differential equations", *Report UMSI 90/246, Supercomputer institute, University of Minnesota*, Decembre 1990.
- [9] P. Le Tallec, "Domain decomposition methods in computational mechanics", *Computational mechanics advances, Vol1 No.2*, Februar 1994.
- [10] T. Chan, R. Glowinski, J. Periaux, O. Widlund, "eds.", Proc. Second int. Symp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", *SIAM, Philadelphia*, Los Angeles, CA, January 1988.
- [11] F. Gastaldi, A. Quarteroni, G. Sacchi Landriani, "On the coupling of two dimensional Hyperbolic and ellipic equations: Analytical and numerical approach", , in [10].
- [12] F. Gastaldi, L. Gastaldi, "On a domain decomposition approach for the transport equation: theory and finite element approximations", *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 14, 1993.
- [13] S. Ukai, "Solutions of the Boltzmann equation", *In Patterns and Waves*, Noth Holland, 1986.
- [14] K. Hamdache, "Initial-boundary value problems for the Boltzmann equation: Global existence of weak solution", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 119, 1992.
- [15] R. DiPerna, P.L. Lions, "On the Cauchy problem for the Boltzmann equation: Global existence and weak stability results", *Annals of Math.*, 130, 1990.
- [16] R. DiPerna, P.L. Lions, "Global solution of the Boltzmann equation and entropy inequality", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 114, 1991.
- [17] H. GRAD, "On the kinetic theory of rarefied gases", *Comm. Pure Appl. Math.*, 2, 1949.
- [18] Y. Qiu, "Etude des 'equations d'Euler et de Boltzmann et de leur couplage. Application à la simulation numérique d'écoulements hypersoniques de gaz raréfiés.", *Thèse, Paris 6*, 1993.
- [19] M. Cessanat, "Théorèmes de trace  $L^p$  pour les espaces de fonctions de la neutronique", *Note C.R. Acad. Sci. Paris*, Sér. 1, 299, 1984.

- [20] M. Cessanat, "Théorèmes de trace pour les espaces de fonctions de la neutro-nique", *Note C.R. Acad. Sci. Paris*, Sér. 1, 300, 1985.
- [21] B. Perthame, M. Pulvirenti, "Weighted  $L^\infty$  bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model", *Arch. Mech. Anal.*, 125, 1993.
- [22] S. Chapman, T. G. Cowling, "The mathematical theory of non-uniform gases", *London*, 1952.
- [23] L. Desvillettes, F. Golse, "Une remarque a propos du developpement de Chapman-Enskog".
- [24] P. Le Tallec, F. Mallinger, "Couplage Boltzmann Navier-Stokes" *Hermes Program*
- [25] P. Le Tallec, F. Mallinger, "Couplage adaptatif Boltzmann Navier-Stokes en régime raréfié" *Hermes Program*

INRIA, Domaine de Voluceau, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France  
 e.mail adresses :  
 le\_tallec@menuin.inria.fr  
 mallinger@menuin.inria.fr

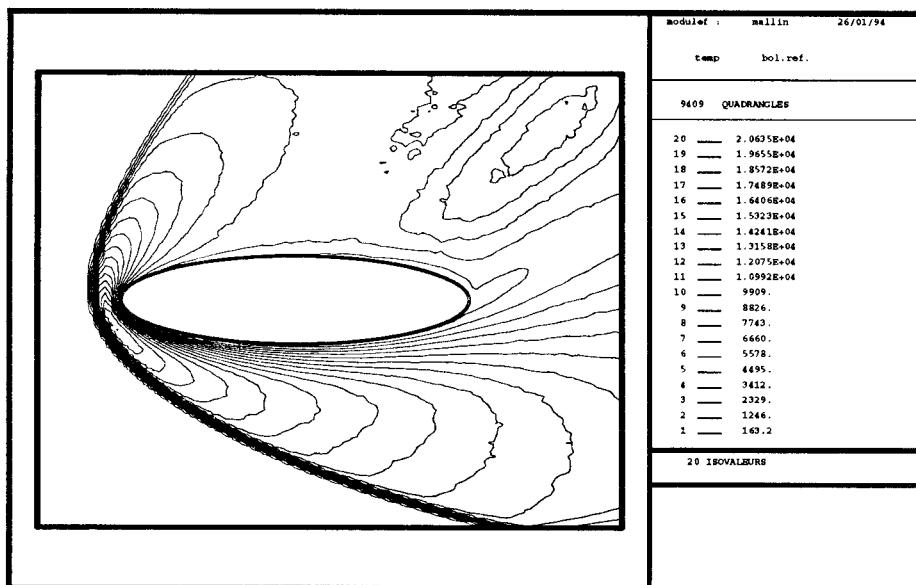


FIG. 3 - Lignes iso-Température

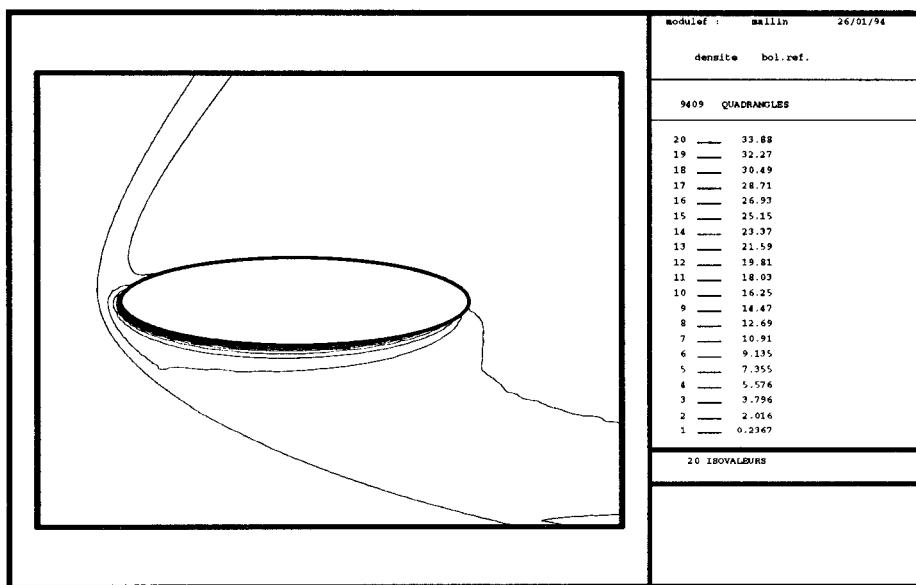


FIG. 4 - Lignes iso-densité

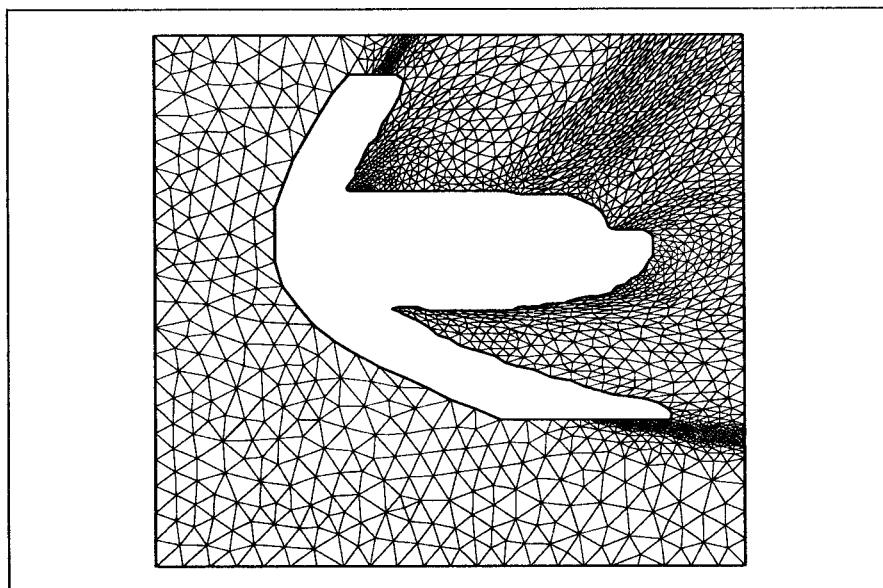


FIG. 5 - Maillage Navier-Stokes du couplage 2

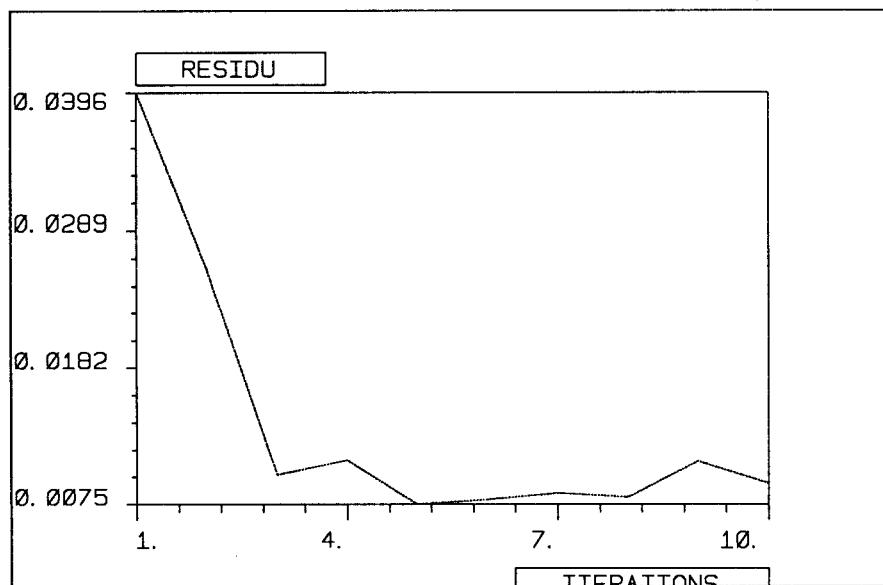


FIG. 6 - Résidu du deuxième couplage B/NS

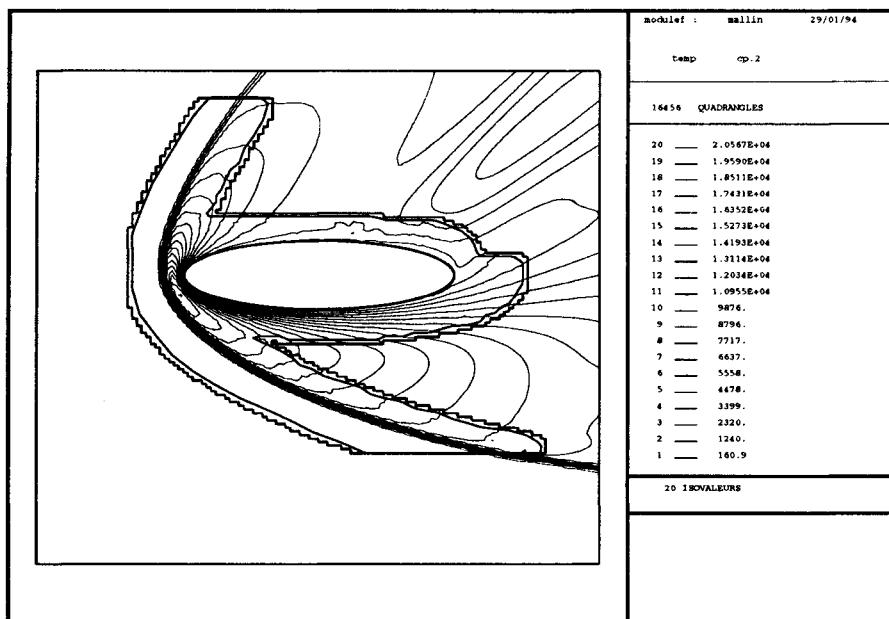


FIG. 7 - Lignes iso-Température

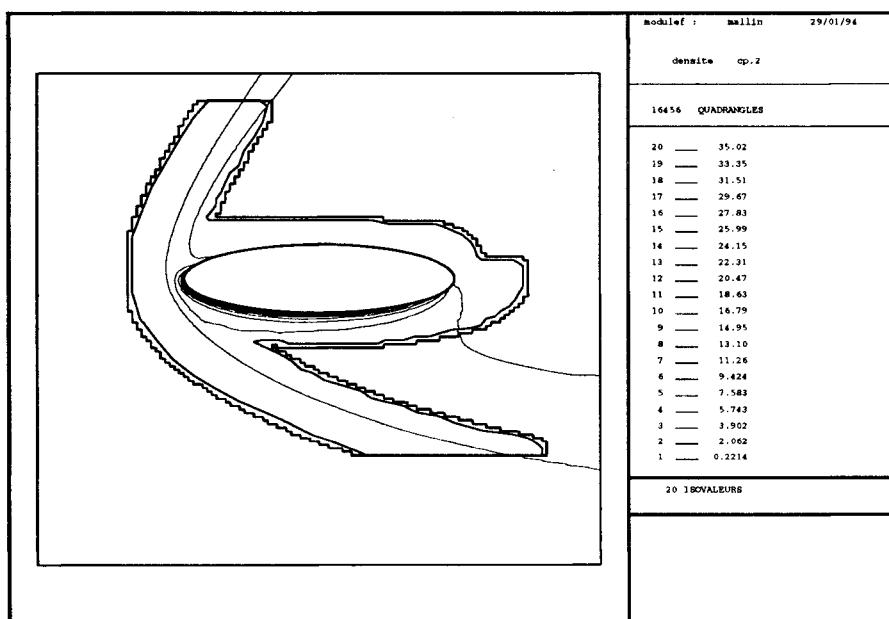


FIG. 8 - Lignes iso-densité



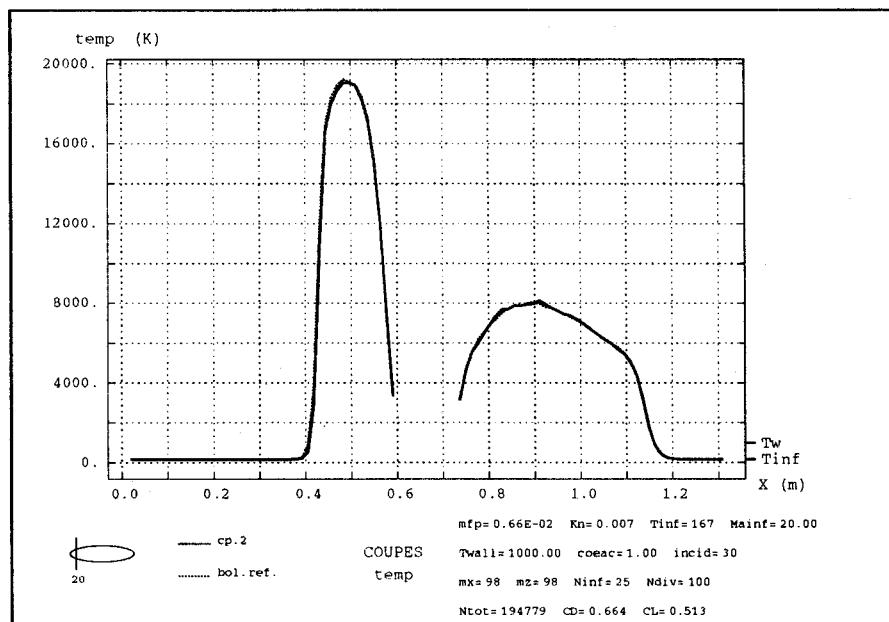


FIG. 9 - Coupe température

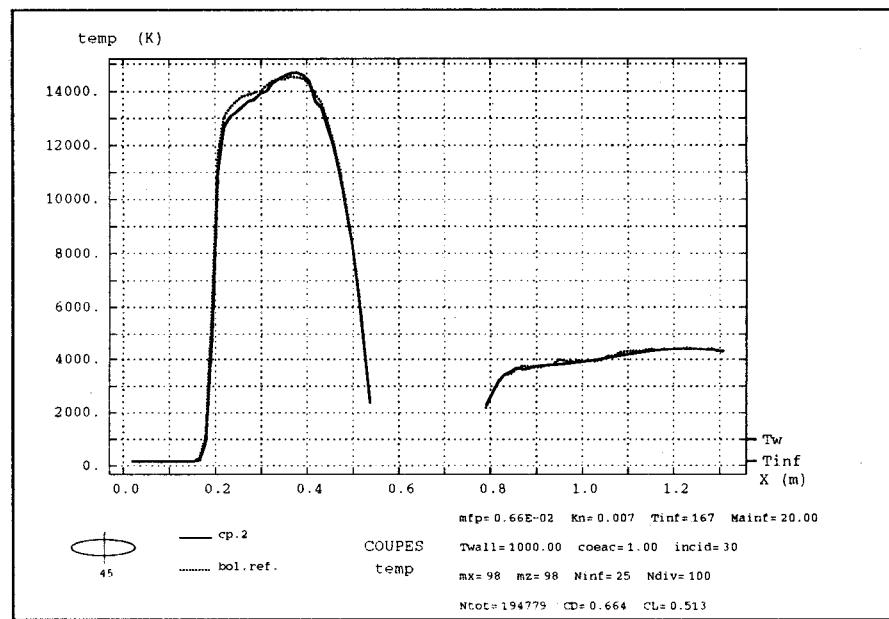


FIG. 10 - Coupe température

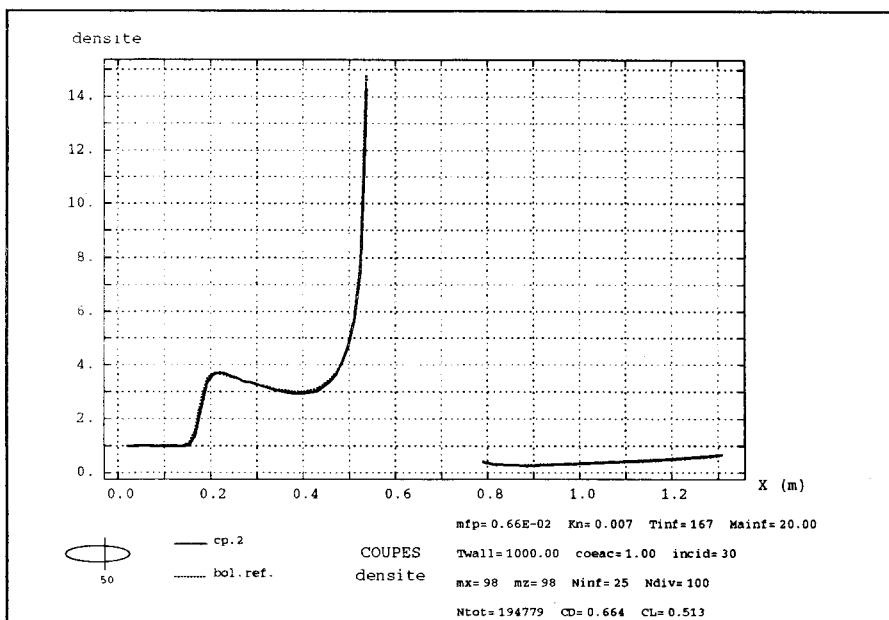


FIG. 11 - Coupe densité

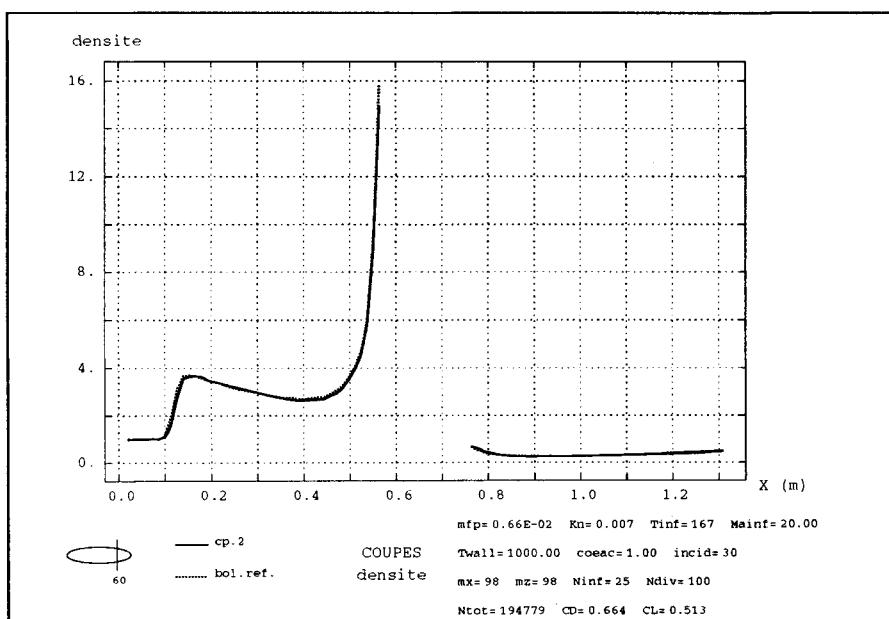


FIG. 12 - Coupe densité

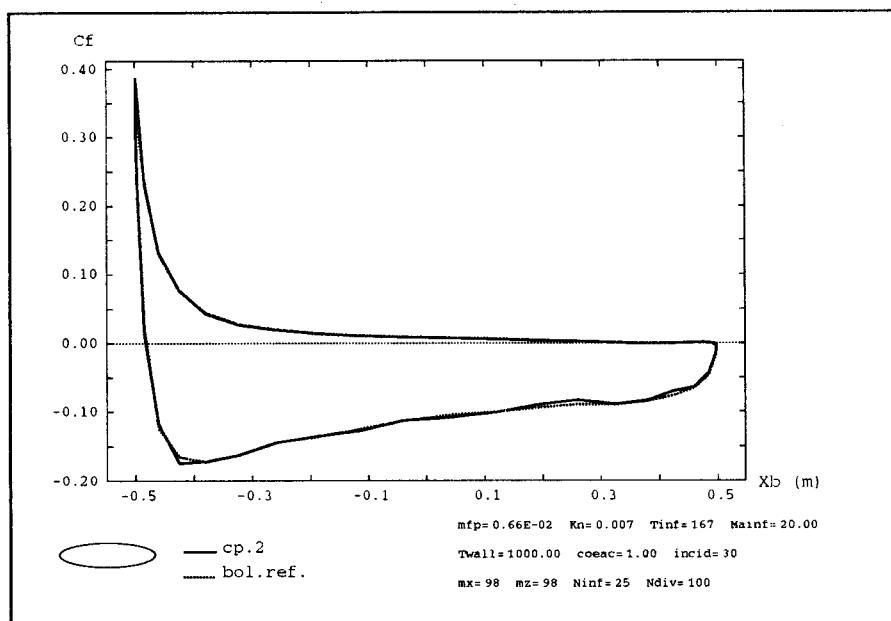


FIG. 13 - Coefficient de frottement  $C_f$

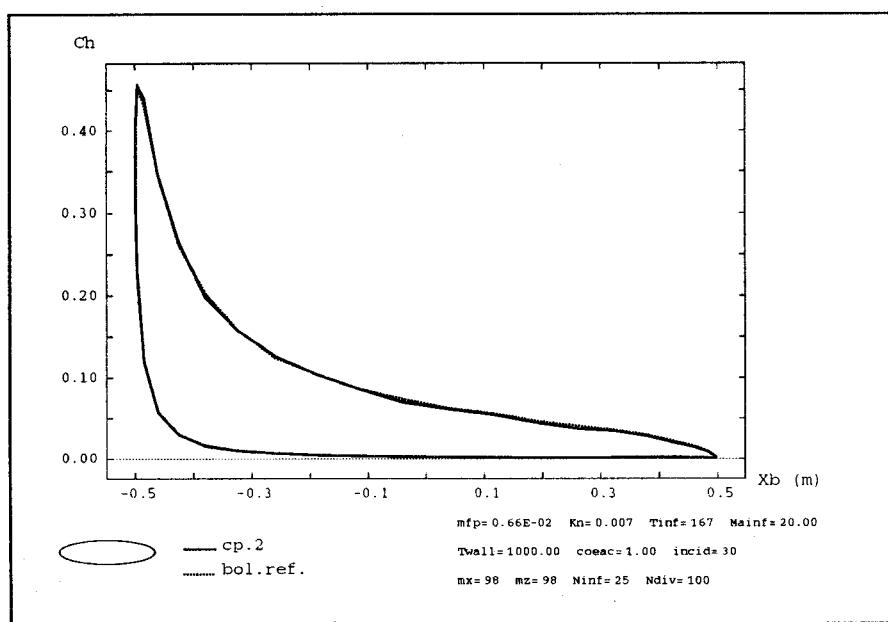


FIG. 14 - Coefficient de chaleur  $Ch$

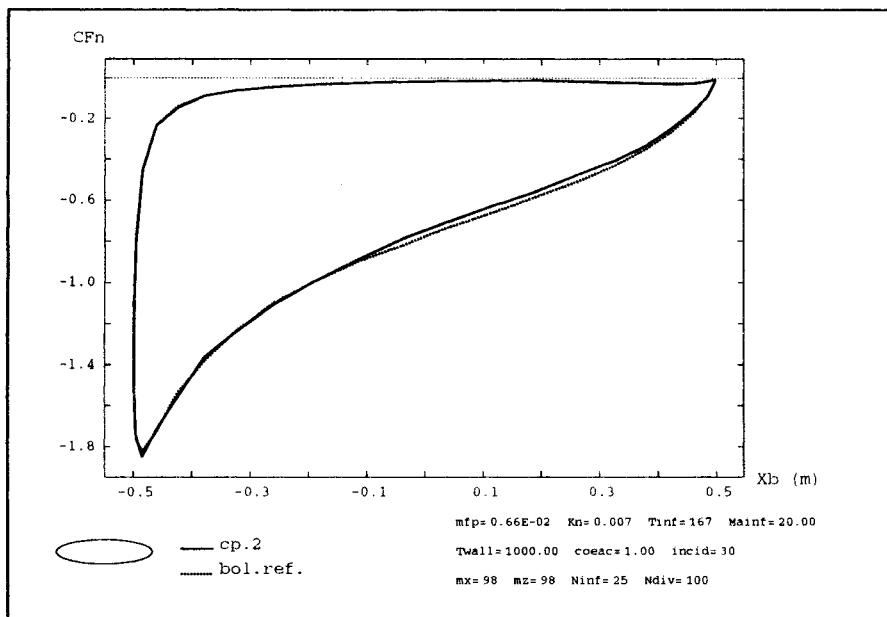


FIG. 15 - Coefficient de force normale  $C_{Fn}$

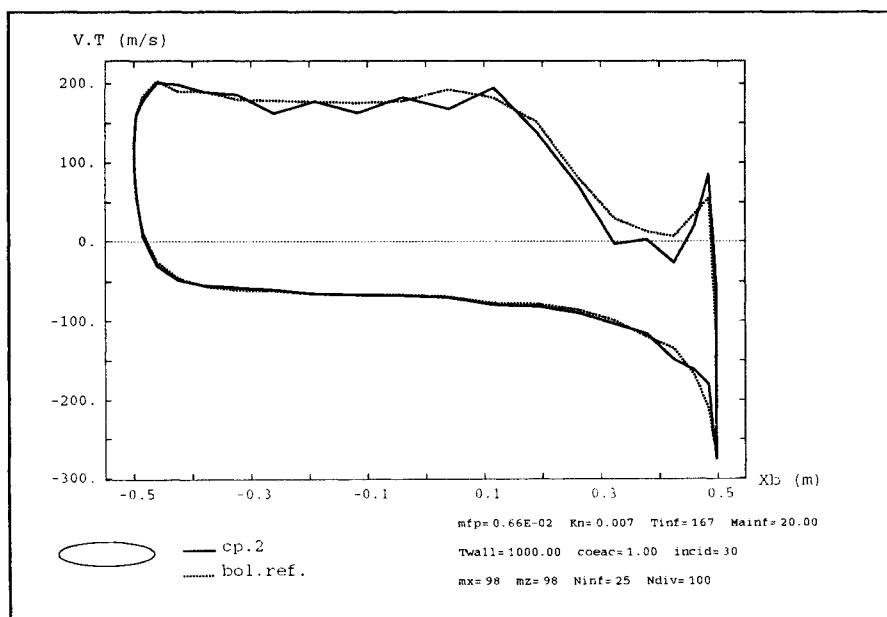


FIG. 16 - Vitesse tangentielle