

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

DANIEL ALTSCHULER

ANTOINE COSTE

Invariants de rubans et algèbres quasi Hopf

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1994, tome 46
« Conférences de A. Beauville, A. Coste, J. Dubochet, A. Gramain, M. Holschneider, C. Itzykson, P. Le Tallec, V. Rivasseau, C. Weber », , exp. n° 1, p. 1-42

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1994__46__1_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Invariants de Rubans et Algèbres Quasi Hopf *

Daniel Altschuler

Institut für Theoretische Physik

ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich, Switzerland

et

Antoine Coste **

Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,

91128 Palaiseau cedex France

Résumé

Nous présentons ici une description explicite basée sur des démonstrations détaillées d'une construction d'invariants topologiques à l'aide d'algèbres quasi-Hopf de Drinfeld. La méthode de Reshetikhin et Turaev s'étend à ces algèbres qui semblent jouer un rôle notable dans les théories conformes bidimensionnelles. Tout en se suffisant à lui-même, ce texte approfondit la présentation publiée précédemment (en anglais dans *Communications in Mathematical Physics*) de cette extension nouvelle qui contenait en outre un exposé de motivations et une application reliée aux invariants de Dijkgraaf et Witten pour les variétés tridimensionnelles.

mars 1994

*communication présentée aux rencontres de Strasbourg, décembre 1992, D. Bennequin, M. Rosso, éditeurs.

** rattaché au Centre de Physique Théorique, CNRS Marseille-Luminy.

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Axiomes d'algèbre Quasi-Hopf
- 3 Le carré de l'antipode est une conjugaison
- 4 Le Foncteur de Reshetikhin-Turaev généralisé
 - 4.1 Algèbre Quasi-Hopf de ruban
 - 4.2 Graphes de ruban colorés
 - 4.3 Définition du foncteur F
 - 4.4 Démonstration de l'invariance isotopique. Formules pour R^{-1}
 - 4.5 Traces "quantiques" et invariants d'entrelacs
 - 4.6 Représentations du groupe des tresses
- 5 Conclusion et perspectives

1 Introduction

De nombreux auteurs s'intéressent aux relations entre les théories conformes bidimensionnelles, les théories topologiques tridimensionnelles, et les groupes quantiques. Sans être exhaustifs, citons [1]-[17].

Un aspect remarquable de ces relations est que les trois types d'objets ci-dessus fournissent des invariants topologiques d'entrelacs et de variétés tridimensionnelles. Par exemple les invariants associés à l'entrelac de Hopf sont les éléments de la matrice modulaire S [2, 3], et un raisonnement sur l'entrelac à trois cercles donne la formule de Verlinde.

La construction d'invariants d'entrelacs à partir d'une catégorie de représentations d'un groupe quantique a été réalisée dans les travaux [7, 18, 19, 20] où les algèbres de Hopf enrubannées (ou "de rubans") sont définies.

Néanmoins il arrive que le seul coproduit Δ connu pour une algèbre A n'est pas coassociatif, mais quasi-coassociatif:

$$(\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \phi(\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a))\phi^{-1}, \quad (1.1)$$

où $\phi \in A \otimes A \otimes A$ et satisfait les identités pentagonales et hexagonales naturelles (faisant intervenir également une matrice R , comme on va le voir plus loin). Une telle structure, connue désormais sous le nom d'algèbre quasi-Hopf, a été définie par Drinfeld [21]. Signalons

que l'utilité de ces algèbres dans les théories topologiques des champs a été mise en lumière dans l'article de Dijkgraaf, Pasquier et Roche [22, 23], où est construit un exemple intéressant, $D^\omega(G)$ qui est une déformation discrète du double d'un groupe fini G quelconque à l'aide d'un 3-cocycle non trivial ω . Cette algèbre reproduit les règles de fusion de la théorie topologique de Dijkgraaf-Witten [24, 25]. Mack et Schomerus [26] ont proposé d'utiliser les algèbres quasi-Hopf pour décrire les champs primaires et les règles de fusion des théories des champs rationnelles, par exemple du modèle d'Ising. Pour cela ils ont même semble-t-il dû procéder à une généralisation supplémentaire en définissant des "algèbres quasi-Hopf au sens faible".

Nous présentons ici une généralisation des constructions de Reshetikhin et Turaev [7, 20] au cas des algèbres quasi-Hopf et essayons de donner de façon aussi détaillée et pédagogique qu'il nous a été possible une démonstration de l'invariance isotopique qui puisse intéresser à la fois le mathématicien épris de rigueur et le physicien souhaitant faire des calculs explicites. Aussi notre motivation n'est pas de vérifier le nombre minimal de relations d'isotopie pour établir l'existence des invariants, mais de détailler comment la "machinerie catégorique" est à l'oeuvre, en présentant un enchaînement déductif d'un bon nombre de ces relations qui permettent de calculer(et en pratique de simplifier au maximum, voire d'obtenir des expressions nouvelles comme celles de R^{-1}) l'invariant associé à n'importe quel graphe.

Plusieurs auteurs ont étudié des aspects connexes (cf par ex [27]). Les experts pourraient certainement formuler des axiomes d' "algèbres quasi-Hopf modulaires" selon la ligne de [7, 20]. Nous ne l'avons pas fait car dans l'exemple particulier que nous avons étudié [16, 17] nous avons pu formuler l'invariant d'une variété tridimensionnelle à partir de la représentation régulière.

2 Définitions

Soit A une algèbre associative sur \mathbb{C} , avec unité 1. A est une quasi-bigèbre ssi il existe des homomorphismes d'algèbres $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ et un élément inversible $\phi \in A \otimes A \otimes A$, tel que:

$$(\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \phi(\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a))\phi^{-1} \quad \text{pour tout } a \in A \quad (2.1)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\phi) (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi) = (1 \otimes \phi) (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\phi) (\phi \otimes 1) \quad (2.2)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (2.3)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\phi) = 1 \quad (2.4)$$

Δ est appelé le coproduit, et ε la counité.

Rappelons brièvement quelques conséquences de ces définitions sur la théorie des représentations de A . Nous ne considérerons que des représentations (π, V) de dimension finie de A , interpréterons l'espace vectoriel V comme un A -module et écrirons indifféremment $a \cdot v$ pour $\pi(a)v$, $a \in A$, v ou $|v\rangle$ un vecteur de V , θ ou $\langle\theta|$ pour une forme linéaire. Etant données deux telles représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) , on peut construire les représentations $(\pi_{12}, V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2)$ et $(\pi_{21}, V_2 \otimes_{\mathbb{C}} V_1)$:

$$\pi_{12} = (\pi_1 \otimes \pi_2) \circ \Delta, \quad \pi_{21} = (\pi_2 \otimes \pi_1) \circ \Delta \quad (2.5)$$

Ayant trois représentations (π_i, V_i) , $i = 1, 2, 3$ on peut introduire

$$\phi^{V_1, V_2, V_3} = (\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)(\phi). \quad (2.6)$$

(2.1) signifie que $\phi^{V_1, V_2, V_3} : (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \rightarrow V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ est un entrelaceur, i.e. les représentations portées par les modules $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ et $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ sont équivalentes.

Pour quatre représentations l'identité (2.2) signifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} ((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4 & \rightarrow & (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) & \rightarrow & V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 & \longrightarrow & & & V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4) \end{array}$$

est commutatif pour les flèches $\phi^{V_1 \otimes V_2, V_3, V_4}$, $\phi^{V_1, V_2, V_3 \otimes V_4}$, etc. D'où le nom d' *identité pentagonale de Mac Lane* pour (2.2) [28], [29].

La counité ε , fournit une représentation de A de dimension 1 sur \mathbb{C} appelée représentation triviale. (2.3) signifie que $V \otimes \mathbb{C} = V = \mathbb{C} \otimes V$ pour tout A -module V .

(2.2) et (2.4) impliquent [21]

$$(\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \varepsilon)(\phi) = 1, \quad (2.7)$$

ce qui permet de ne pas se soucier des facteurs triviaux dans les produits tensoriels.

Une quasi-bigèbre A est une algèbre quasi-Hopf si il existe un anti-automorphisme S de A , i.e. $S(ab) = S(b)S(a)$, et deux éléments $\alpha, \beta \in A$ tels que:

$$\sum_i S(a_i^{(1)})\alpha a_i^{(2)} = \varepsilon(a)\alpha \quad \sum_i a_i^{(1)}\beta S(a_i^{(2)}) = \varepsilon(a)\beta \quad (2.8)$$

pour tout $a \in A$ avec $\sum_i a_i^{(1)} \otimes a_i^{(2)} = \Delta(a)$, et

$$\sum_i X_i \beta S(Y_i) \alpha Z_i = 1, \quad \text{avec} \quad \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i = \phi, \quad (2.9)$$

$$\sum_j S(P_j) \alpha Q_j \beta S(R_j) = 1, \quad \text{avec} \quad \sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j = \phi^{-1}. \quad (2.10)$$

Notons deux conséquences des définitions de S, α, β :

$$\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) = 1, \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon. \quad (2.11)$$

S , appelé l'antipode, permet de définir la représentation (π^*, V^*) duale de (π, V) , où V^* est l'espace dual, en termes de la transposition de morphismes:

$$\pi^*(a) = (\pi \circ S(a))^{\dagger} \quad (2.12)$$

Dans le contexte des algèbres de Hopf, on connaît la relation :
 $\Delta(a) = (S \otimes S)(\Delta' \circ S^{-1}(a))$, où

$$\Delta' = P \circ \Delta, \quad P : a \otimes b \mapsto b \otimes a \quad (2.13)$$

Sa généralisation, due à Drinfeld se révèle utile. Soient

$$\sum_j A_j \otimes B_j \otimes C_j \otimes D_j = (\phi \otimes 1)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi^{-1}), \quad (2.14)$$

$$\gamma = \sum_j S(B_j)\alpha C_j \otimes S(A_j)\alpha D_j, \quad (2.15)$$

$$\sum_i K_i \otimes L_i \otimes M_i \otimes N_i = (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi)(\phi^{-1} \otimes 1), \quad (2.16)$$

$$\delta = \sum_i K_i\beta S(N_i) \otimes L_i\beta S(M_i). \quad (2.17)$$

Alors pour tout $a \in A$,

$$f\Delta(a)f^{-1} = (S \otimes S)(\Delta' \circ S^{-1}(a)) \quad (2.18)$$

où

$$f = \sum_i (S \otimes S)(\Delta'(P_i)) \cdot \gamma \cdot \Delta(Q_i\beta S(R_i)). \quad (2.19)$$

De plus,

$$\gamma = f\Delta(\alpha), \quad \delta = \Delta(\beta)f^{-1}. \quad (2.20)$$

En fait, Drinfeld a montré que f définit une torsion de A , pour laquelle le coproduit modifié est le membre de droite de (2.18).

Une algèbre quasi-Hopf est dite *quasi-triangulaire*, ssi il existe un élément inversible $R \in A \otimes A$, satisfaisant:

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad (2.21)$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = \phi_{312} R_{13} \phi_{132}^{-1} R_{23} \phi, \quad (2.22)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = \phi_{231}^{-1} R_{13} \phi_{213} R_{12} \phi^{-1}, \quad (2.23)$$

où nous avons utilisé la notation: R_{ij} est l'image de R dans le produit tensoriel (sur \mathbb{C}) $A \otimes \cdots \otimes A$, non triviale sur les i -eme et j -eme composantes.

Si s denote une permutation de $\{1, 2, 3\}$ et $\phi = \sum_i a_i^1 \otimes a_i^2 \otimes a_i^3$ posons $\phi_{s(1)s(2)s(3)} = \sum_i a_i^{s^{-1}(1)} \otimes a_i^{s^{-1}(2)} \otimes a_i^{s^{-1}(3)}$.

Ces relations impliquent l'équation de quasi-Yang-Baxter:

$$R_{12} \phi_{312} R_{13} \phi_{132}^{-1} R_{23} \phi = \phi_{321} R_{23} \phi_{231}^{-1} R_{13} \phi_{213} R_{12}. \quad (2.24)$$

(2.22) et (2.23) sont représentés par des diagrammes commutatifs hexagonaux [21].

Il est aisé d'établir la propriété suivante de R :

$$(\varepsilon \otimes \text{id})R = (\text{id} \otimes \varepsilon)R = 1. \quad (2.25)$$

La conséquence la plus importante de (2.21) pour la théorie des représentations est l'équivalence de $(\pi_{12}, V_1 \otimes V_2)$ et de $(\pi_{21}, V_2 \otimes V_1)$:

$$\pi_{21}(a) = \check{R}_{12} \circ \pi_{12}(a) \circ \check{R}_{12}^{-1} \quad (2.26)$$

où $\check{R}_{12} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$ est donnée par $\check{R}_{12} = P_{12}(\pi_1 \otimes \pi_2)R$ et P_{12} est l'opérateur qui permute les espaces V_1 et V_2 .

3 Le carré de l'antipode

Soit A une algèbre quasi-Hopf munie d'une "matrice universelle" R au sens ci-dessus et vérifiant (2.21).

Généralisant un théorème de Drinfeld sur les algèbres de Hopf montrons que pour tout $a \in A$,

$$S^2(a) = uau^{-1}, \quad (3.1)$$

avec u donné par:

$$u = \sum_{j,p} S(Q_j \beta S(R_j)) S(b_p) \alpha a_p P_j, \quad (3.2)$$

en termes de

$$R = \sum_p a_p \otimes b_p, \quad \phi^{-1} = \sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j. \quad (3.3)$$

Commençons par établir:

$$S^2(a)u = ua. \quad (3.4)$$

Posons $(\Delta \otimes \text{id})\Delta(a) = \sum_k f_k \otimes g_k \otimes h_k$; en utilisant (2.3) et (2.8) on obtient:

$$\sum_k S(f_k)\alpha g_k \otimes h_k = \alpha \otimes a, \quad (3.5)$$

et donc

$$S^2(a)u = \sum_{j,k,p} S^2(h_k)S(Q_j\beta S(R_j)) S(b_p)S(f_k)\alpha g_k a_p P_j. \quad (3.6)$$

Mais (2.21) implique

$$\sum_{k,p} a_p f_k \otimes b_p g_k \otimes h_k = \sum_{k,p} g_k a_p \otimes f_k b_p \otimes h_k, \quad (3.7)$$

de sorte que:

$$S^2(a)u = \sum_{j,k,p} S(g_k Q_j \beta S(h_k R_j)) S(b_p) \alpha a_p f_k P_j. \quad (3.8)$$

Mais, $(\Delta \otimes \text{id})\Delta(a)\phi^{-1} = \phi^{-1}(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(a)$, (2.3) et (2.8), donnent (3.4).

L'étape suivante est l'établissement du lemme:

$$S(\alpha)u = \sum_p S(b_p)\alpha a_p. \quad (3.9)$$

Pour cela effectuons dans la définition (3.2) de u la substitution

$$\sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j \otimes 1 = (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi^{-1})(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\phi^{-1})(1 \otimes \phi)(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\phi)$$

et simplifions en plusieurs étapes l'expression obtenue pour $S(\alpha)u$ en faisant un bon usage de (2.4), (2.7), (2.8) et (2.9).

Or (3.9) implique

$$ut = \alpha \quad (3.10)$$

où nous avons posé:

$$t = \sum_q S^{-1}(\alpha d_q)c_q, \quad R^{-1} = \sum_q c_q \otimes d_q \quad (3.11)$$

En reportant (3.10) dans (2.10) nous obtenons

$$1 = \sum_j S(P_j)utQ_j\beta S(R_j) = u \sum_j S^{-1}(P_j)tQ_j\beta S(R_j) = S^2\left(\sum_j S^{-1}(P_j)tQ_j\beta S(R_j)\right)u \quad (3.12)$$

u , qui a des inverses à droite et à gauche est donc inversible, ainsi que $S(u)$. Ceci clôt la preuve de (3.1).

Mentionnons quelques corollaires simples:

$$S^2(u) = u \quad (3.13)$$

$$uS(u) = S(u)u \quad \text{est central} \quad (3.14)$$

$$\sum_p S(b_p)\alpha a_p = S(\alpha)u = S(t)S(u)u = S(u)u \sum_q S(c_q)\alpha d_q \quad (3.15)$$

De plus (2.4) et (2.11) entraînent

$$\varepsilon(u) = 1. \tag{3.16}$$

La conséquence la plus importante du théorème (3.1) pour la théorie des représentations, est que pour une algèbre quasi-Hopf quasitriangulaire A , et pour une représentation (π, V) de dimension finie, le bidual (π^{**}, V^{**}) est équivalent à (π, V) , au moyen de l'entrelaceur $\pi(u)$. Cela signifie également que le dual (à droite) (π^*, V^*) est équivalent au *dual à gauche* $({}^*\pi, V^*)$ défini en [21] par ${}^*\pi(a) = (\pi \circ S^{-1}(a))^t$ pour tout $a \in A$.

4 Le foncteur de Reshetikhin-Turaev généralisé

4.1 algèbre quasi-Hopf de rubans

Soit A une algèbre quasi-Hopf quasitriangulaire. Nous proposons la généralisation suivante de la structure d'algèbre de Hopf de rubans (ou "enrubannée") de Reshetikhin et Turaev. Nous dirons que A est une algèbre quasi-Hopf de rubans ssi il existe un élément central $v \in A$ vérifiant

R1. $v^2 = uS(u)$

R2. $S(v) = v$

R3. $\varepsilon(v) = 1$

R4. $\Delta(uv^{-1}) = f^{-1}((S \otimes S)(f_{21}))(uv^{-1} \otimes uv^{-1}),$

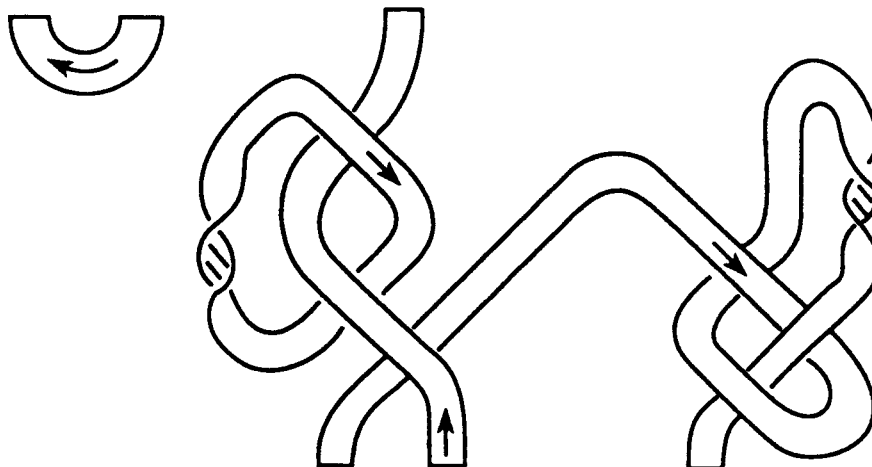
où f est défini en (2.19) (cf aussi (2.10)). Nous avons étudié en détail l'algèbre $D^\omega(G)$ de Dijkgraaf-Pasquier-Roche-Witten [22, 25], qui est une algèbre quasi-Hopf de rubans, dans l'article [16].

4.2 Graphes de rubans colorés

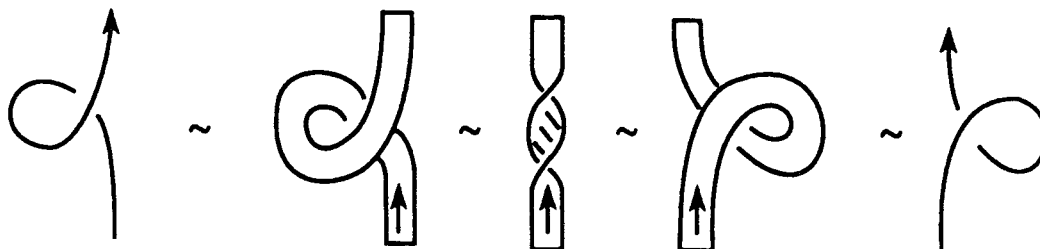
Un graphe de rubans [20] peut être défini comme une projection régulière sur un plan d'un nombre fini de rubans orientés de \mathbb{R}^3 , i.e. des sous variétés bidimensionnelles orientées, à bords, images disjointes de plongements réguliers $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ (rubans ouverts) ou $S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ (anneaux). Les rubans de Moebius sont exclus par cette définition, les rubans considérés ont un côté "foncé" et un côté "clair" (cela ne les empêche d'ailleurs pas de prendre des couleurs). La définition de graphe de ruban sous-entend aussi que le

côté clair est face au lecteur en haut et en bas du dessin. De plus les extrémités de tous les rubans ouverts sont verticales et appartiennent à $\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$. Les rubans sont aussi dirigés, i.e. munis d'une flèche indiquant une direction de parcours.

Voici un exemple de graphe de rubans:



Deux graphes sont considérés comme équivalents ssi ce sont des projections de rubans isotopes. Ce qui signifie que nous considérons une isotopie lisse de \mathbb{R}^3 qui conserve les directions des flèches, l'orientation de la surface du graphe et laisse fixes les extrémités des rubans ouverts. Par commodité, nous représenterons graphiquement un tel graphe de rubans comme la projection d'un câblage (entrelac avec composantes éventuellement ouvertes):



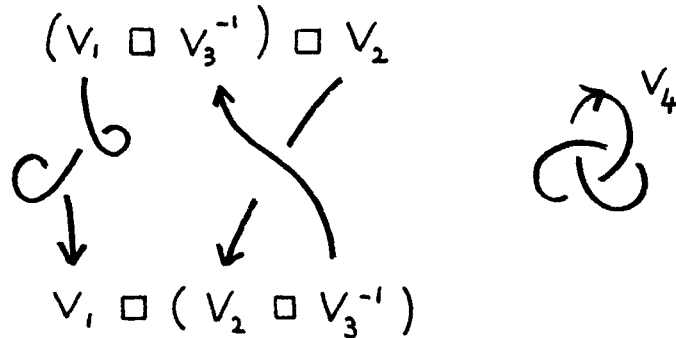
Définissons maintenant les *graphes de rubans colorés*, ou *c-graphes* en abrégé. Soit A une algèbre quasi-Hopf de rubans. Notons $N(A)_k$ la classe de tous les mots (expressions non associatives formelles) de la forme

$$((((V_1^{\varepsilon_1} \square ((V_2^{\varepsilon_2} \square \dots)) \dots) \square V_k^{\varepsilon_k}))) \quad (4.1)$$

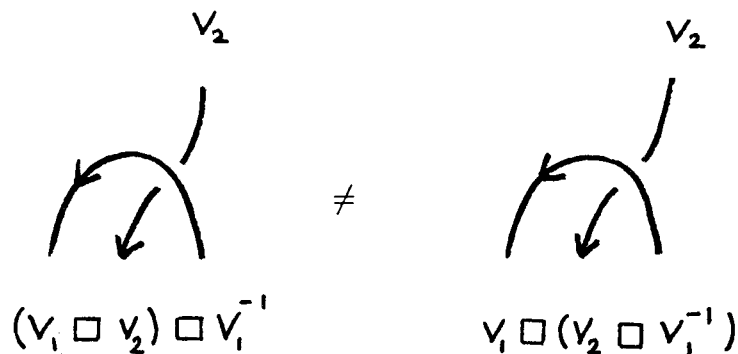
où les k lettres V_i sont des A -modules, $\varepsilon_i = \pm 1$, à ce stade V^1 et V^{-1} sont de simples symboles, que nous n'identifierons que plus tard au module V et au module dual. Il n'y a pas de restriction sur l'emplacement des parenthèses, et nous considérons deux mots constitués des mêmes lettres parenthésées différemment comme distincts. ainsi $(V_1 \square V_2) \square V_3 \neq V_1 \square (V_2 \square V_3)$.

Par définition $N(A)_0$ contient seulement le mot à une lettre, \mathbb{C} , la représentation triviale.

Un c -graphe est un graphe de rubans, décoré à son sommet et à sa base de deux mots $w_k \in N(A)_k, w_l \in N(A)_l$, chaque ruban étant "coloré" par un A -module V . Ces décorations doivent être compatibles, i.e. les lettres de w_k et w_l correspondant aux extrémités d'un ruban ouvert doivent être égales à sa couleur, et la direction de la flèche tracée sur le ruban est déterminée par le signe ε_i d'après la règle suivante: si l'extrémité d'un ruban correspond à la lettre $V_i^{\varepsilon_i}$, la flèche est dirigée vers le bas (resp. vers le haut) si $\varepsilon_i = +1$ (resp. -1). Voici un exemple de tel c -graphe:



Ces définitions permettent de définir une catégorie $\text{Grc}(A)$ des c -graphes. Ses objets sont les éléments de $N(A) = \bigcup_k N(A)_k$, et les morphismes sont les c -graphes. Par exemple, le c -graphe de la figure 3 est un morphisme $V_1 \square (V_2 \square V_3^{-1}) \rightarrow (V_1 \square V_3^{-1}) \square V_2$. Notre convention graphique est qu'un c -graphe est un morphisme de l'objet situé en bas du graphe vers l'objet situé en haut de celui-ci. Si un c -graphe ne présente pas d'extrémités de rubans ouverts au bas ou au sommet, c'est un morphisme de ou vers \mathbb{C} . S'il n'a aucun ruban ouvert nous dirons que c'est un c -graphe fermé. Il peut être utile de souligner que les objets de départ et d'arrivée, avec leur parenthésage, sont pour nous des parties essentielles du graphe, ainsi

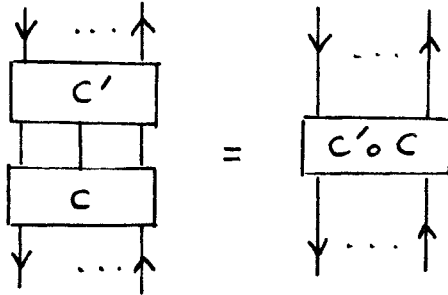


4.3 Le foncteur F

Nous nous proposons de définir un foncteur F de $\text{Grc}(A)$ vers la catégorie $\text{Rep}(A)$ des représentations de dimension finie de A , dont les objets sont les A -modules de dimension finie, et les morphismes les entrelaceurs. Si $w \in N(A)$, $F(w)$ est le A -module obtenu en remplaçant les produits formels pour \square par les produits tensoriels \otimes définis en (2.5), et en remplaçant les lettres $V_i^{\varepsilon_i}$ par V_i si $\varepsilon_i = +1$, par V_i^* si $\varepsilon_i = -1$. Pour un c-graphe $C : w \rightarrow w'$, $F(C)$ est un entrelaceur $F(w) \rightarrow F(w')$. L'image $F(C)$ d'un c-graphe C fermé, $F(C) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est identifiée à un scalaire, qui est l'ingrédient essentiel des invariants d'entrelacs et de 3-variétés que l'on construit par ces méthodes. La définition de $F(C)$ repose sur l'observation que tout c-graphe C peut être construit à partir de quelques graphes "élémentaires" par collage et juxtaposition. Ces c-graphes élémentaires I^\pm, X^\pm, U, D, Φ sont

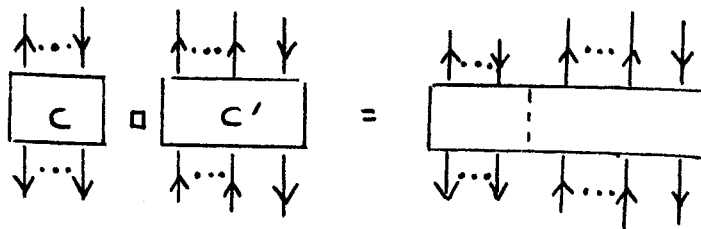
$$\begin{array}{ll}
 \mathbb{I}_V^+ = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & \mathbb{I}_V^- = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \\
 X_{VW}^+ = \begin{array}{c} W \square V \\ \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V \square W \end{array} & X_{VW}^- = \begin{array}{c} W \square V \\ \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V \square W \end{array} \\
 U_V^R = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \square \downarrow \\ V^{-1} \square V \end{array} & U_V^L = \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \downarrow \square \downarrow \\ V \square V^{-1} \end{array} \\
 D_V^R = \begin{array}{c} \downarrow \square \downarrow \\ \curvearrowright \\ V \square V^{-1} \end{array} & D_V^L = \begin{array}{c} \downarrow \square \downarrow \\ \curvearrowleft \\ V^{-1} \square V \end{array} \\
 \Phi_{V_1 V_2 V_3} = \begin{array}{c} V_1 \square V_2 \square V_3 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (V_1 \square V_2) \square V_3 \end{array} & = \begin{array}{c} V_1 \square (V_2 \square V_3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (V_1 \square V_2) \square V_3 \end{array}
 \end{array}$$

Définissons plus précisément les notions de collage et juxtaposition. Soit $C : w \rightarrow w'$ et $C' : w' \rightarrow w''$ deux c-graphes. Par "collage" nous entendons la composition des morphismes dans $\text{Grc}(A)$, $C' \circ C : w \rightarrow w''$, définie comme dans



Il est essentiel que l'arrivée w' de C soit exactement égale au départ de C' , avec le même parenthésage.

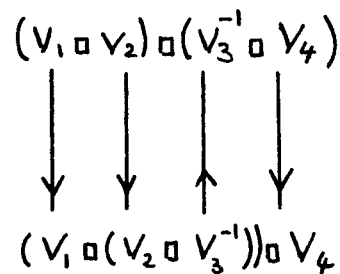
La juxtaposition dans $\text{Grc}(A)$ est une loi de composition \square . Pour $w \in N(A)_k$, $w' \in N(A)_l$, c'est simplement $w_k \square w_l \in N(A)_{k+l}$. Pour les c-graphes $C : w \rightarrow w'$, $C' : x \rightarrow x'$, nous définissons $C \square C' : w \square x \rightarrow w' \square x'$ par juxtaposition des deux graphes:



Signalons que $\text{Grc}(A)$ contient une classe de c-graphes $\Psi_w^{w'}$, composés entièrement de lignes verticales, et tels que w et w' diffèrent seulement par leur parenthésage. Nous poserons alors

$$\Phi_w^{w'} = F(\Psi_w^{w'}) \quad (4.2)$$

Le cas $w = (V_1 \square (V_2 \square V_3^{-1})) \square V_4$, $w' = (V_1 \square V_2) \square (V_3^{-1} \square V_4)$ est représenté par:



On demande que le foncteur F ait les propriétés suivantes: c'est un foncteur covariant,

$$F(C' \circ C) = F(C') \circ F(C), \quad (4.3)$$

la juxtaposition correspond aux produits tensoriels:

$$F(C \square C') = F(C) \otimes F(C'), \quad (4.4)$$

et les Ψ graphes satisfont une propriété de "fusion", ce qui signifie que lorsque $w, w' \in N(A)_k$ diffèrent seulement par leur parenthésage, mais ont une séquence $(V_i^{\varepsilon_i} \square V_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = w^{(i)}$ commune, alors

$$F(\Psi_w^{w'}) = F(\Psi_{w_\otimes}^{w'_\otimes}), \quad (4.5)$$

où $w_\otimes \in N(A)_{k-1}$ est obtenu en remplaçant $w^{(i)}$ par $F(w^{(i)})$ dans w . Le foncteur F est alors défini par ses valeurs sur les graphes élémentaires I^\pm, X^\pm, U, D, Φ , comme suit:

$$F(I_V^+) = \text{id}_V \quad F(I_V^-) = \text{id}_V. \quad (4.6)$$

$$F(X_{V,W}^+) = \check{R}_{V,W} \quad F(X_{V,W}^-) = \check{R}_{W,V}^{-1} \quad (4.7)$$

$$F(U_V^R)(\langle \theta | \otimes |x \rangle) = \langle \theta | \alpha |x \rangle = \theta(\alpha x), \quad \langle \theta | \in V^*, |x \rangle \in V, \quad (4.8)$$

$$F(U_V^L)(|x \rangle \otimes \langle \theta |) = \langle \theta | S(\alpha) u v^{-1} |x \rangle = \theta(S(\alpha) u v^{-1} x) \quad (4.9)$$

$$F(D_V^R)(1) = \sum_j \beta \cdot |e_j \rangle \otimes \langle e^j |, \quad (4.10)$$

où $\{|e_j \rangle\}$ est une base de V , et $\{\langle e^j | \}$ la base duale de V^* ,

$$F(D_V^L)(1) = \sum_j \langle e^j | \otimes u^{-1} v S(\beta) \cdot |e_j \rangle, \quad (4.11)$$

$$F(\Phi^{V_1, V_2, V_3}) = \phi^{V_1, V_2, V_3}. \quad (4.12)$$

F est aussi défini par ses valeurs sur les graphes dont certaines directions de parcours (correspondant à des ε_i négatifs) ont été renversées, obtenues par l'action de S en vertu de (2.12) (cf par exemple (4.16) ci-dessous). Notons que toutes les valeurs ci-dessus sont bien des entrelaceurs, en accord avec le principe général de cette construction.

Les propriétés des algèbres quasi-Hopf concernant les éléments α, β garantissent la cohérence de la définition de F sur les c-graphes contenant des demi cercles U ou D ; celles concernant la matrice R universelle la cohérence de la définition de F sur les graphes tressés [28].

Illustrons ce point par les exemples suivants:

Dans l'espace vectoriel sous jacent

$$\begin{aligned}
F \left(\begin{array}{c} (V_1 \square (V_2 \square V_2^{-1})) \square V_3 \\ \downarrow \quad \curvearrowright \quad \downarrow \end{array} \right) |\psi_1 \rangle \otimes |\psi_3 \rangle &= F \left(\begin{array}{c} V_1 \square ((V_2 \square V_2^{-1}) \square V_3) \\ \downarrow \quad \curvearrowright \quad \downarrow \end{array} \right) |\psi_1 \rangle \otimes |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_a |\psi_1 \rangle \otimes \beta |e_a \rangle \otimes \langle e^a | \otimes |\psi_3 \rangle
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Une condition nécessaire de cohérence à vérifier est que le vecteur de $V_1 \otimes V_2 \otimes V_2^* \otimes V_3$ ci dessus soit invariant sous l'isomorphisme naturel de modules. Nous avons effectivement

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\substack{V_1 \square ((V_2 \square V_2^{-1}) \square V_3) \\ (V_1 \square (V_2 \square V_2^{-1})) \square V_3}} \cdot \sum_a |\psi_1 \rangle \otimes \beta |e_a \rangle \otimes \langle e^a | \otimes |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_{a,i} X_i |\psi_1 \rangle \otimes Y_i^{(1)} \beta |e_a \rangle \otimes \langle e^a | S(Y_i^{(2)}) \otimes Z_i |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_{a,b,i} X_i |\psi_1 \rangle \otimes Y_i^{(1)} \beta |e_a \rangle \otimes \langle e^a | S(Y_i^{(2)}) |e_b \rangle \langle e^b | \otimes Z_i |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_{a,b,i} X_i |\psi_1 \rangle \otimes Y_i^{(1)} \beta \langle e^a | S(Y_i^{(2)}) |e_b \rangle \otimes \langle e^b | \otimes Z_i |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_{b,i} X_i |\psi_1 \rangle \otimes Y_i^{(1)} \beta S(Y_i^{(2)}) |e_b \rangle \otimes \langle e^b | \otimes Z_i |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_{b,i} X_i |\psi_1 \rangle \otimes \varepsilon(Y_i) \beta |e_b \rangle \otimes \langle e^b | \otimes Z_i |\psi_3 \rangle \\
&= \sum_b |\psi_1 \rangle \otimes \beta |e_b \rangle \otimes \langle e^b | \otimes |\psi_3 \rangle
\end{aligned} \tag{4.14}$$

où $(id \otimes \Delta \otimes id)\phi = \sum_i X_i \otimes Y_i^{(1)} \otimes Y_i^{(2)} \otimes Z_i$ et où nous avons utilisé les axiomes (2.4), (2.8).

De même

$$\begin{aligned}
& F\left(\begin{array}{ccc} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ (V_1 \square (V_2^{-1} \square V_2)) \square V_3 & & \end{array} \right) |\psi_1\rangle \otimes \langle \theta_2| \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \\
&= F\left(\begin{array}{ccc} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ V_1 \square ((V_2^{-1} \square V_2) \square V_3) & & \end{array} \right) |\psi_1\rangle \otimes \langle \theta_2| \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \\
&= \langle \theta_2 | \alpha | \psi_2 \rangle |\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle
\end{aligned}$$

est tel que

$$\begin{aligned}
& F\left(\begin{array}{ccc} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ V_1 \square ((V_2^{-1} \square V_2) \square V_3) & & \end{array} \right) = \\
& F\left(\begin{array}{ccc} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ V_1 \square ((V_2^{-1} \square V_2) \square V_3) & & \end{array} \right) \circ F\left(\begin{array}{ccc} V_1 \square ((V_2^{-1} \square V_2) \square V_3) & & \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \downarrow \\ (V_1 \square (V_2^{-1} \square V_2)) \square V_3 & & \end{array} \right) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus jointes au théorème de Mac Lane permettent de montrer que pour tout graphe:

$$F\left(\begin{array}{c} | \cdots \cup | \cdots \cap \cdots \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} | \cdots \cup \cup | \cdots \cap \cdots \end{array} \right)$$

Les deux dernières égalités étant comprises dans

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2 \otimes_{\mathbb{C}} V_3 \otimes_{\mathbb{C}} V_4 \rightarrow V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_3 \otimes_{\mathbb{C}} V_2 \otimes_{\mathbb{C}} V_4).$$

De même $\Phi_{(V_1 \square V_2) \square (V_3 \square V_4)}^{V_1 \square (V_2 \square (V_3 \square V_4))} = (id \otimes id \otimes \Delta) \phi$ donne

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} V_1 \square (V_2 \square (V_4 \square V_3)) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ V_1 \square (V_2 \square (V_3 \square V_4)) \end{array} \\ & = \Phi_{(V_1 \square V_2) \square (V_3 \square V_4)}^{V_1 \square (V_2 \square (V_3 \square V_4))} \circ F \left(\begin{array}{c} (V_1 \square V_2) \square (V_4 \square V_3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (V_1 \square V_2) \square (V_3 \square V_4) \end{array} \right) \circ \Phi_{V_1 \square (V_2 \square (V_3 \square V_4))}^{(V_1 \square V_2) \square (V_3 \square V_4)} \\ & = F \left(\begin{array}{c} (V_1 \square V_2) \square (V_4 \square V_3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (V_1 \square V_2) \square (V_3 \square V_4) \end{array} \right) = \check{R}_{34} \end{aligned}$$

Le théorème de cohérence de Mac Lane nous assure alors que l'application linéaire \check{R}_{i+1} reste bien définie, c'est à dire indépendante du parenthésage, quel que soit le nombre d'espaces apparaissant dans le produit tensoriel, pourvu que V_i et V_{i+1} soient placés dans une même parenthèse $(V_i \square V_{i+1})$. La spécification des parenthésages reste bien sûr indispensable pour un graphe général.

4.4 Démonstration détaillée de l'invariance d'isotopie

Nous prouvons ci dessous l'invariance de F sous isotopie de ruban en vérifiant l'invariance sous les déformations du graphe (espaces de départ et d'arrivée fixés) et sous les trois types de mouvement de Reidemeister [31, 32].

Notons que le rôle de l'antipode S dans la définition de F donnée ci-dessus signifie entre autres que:

Et on obtient les identités où la direction des flèches a été renversée en appliquant l'antipode aux formules ci-dessus.

Prenant la numérotation traditionnelle à rebours, examinons tout d'abord l'invariance sous les mouvements de Reidemeister du troisième type:

$$F\left(\begin{array}{c} V_1 \square (V_2 \square V_3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (V_1 \square V_2) \square V_3 \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} V_1 \square (V_2 \square V_3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (V_1 \square V_2) \square V_3 \end{array} \right) \quad (4.17)$$

L'expression du membre de gauche est, à une permutation des facteurs près

$$\begin{aligned}
 & (R \otimes 1) (\Delta \otimes id) R \\
 &= \sum a_r Y_i a_q P_j X_k \otimes b_r Z_i R_j a_p Y_k \otimes X_i b_q Q_j b_p Z_k ,
 \end{aligned}$$

ce qui, en vertu de quasi Yang-Baxter est aussi égal à

$$\begin{aligned}
 & (\Delta' \otimes id) R (R \otimes 1) \\
 &= \sum Z_i R_j a_p Y_k a_r \otimes Y_i a_q P_j X_k b_r \otimes X_i b_q Q_j b_p Z_k ,
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

ce qui est encore, à la même permutation près, l'expression du membre de droite.

Les identités correspondant à des directions de flèches opposées sont obtenues, en vertu des définitions ci-dessus des images des huit croisements, par application de l'antipode aux divers facteurs.

Si le mouvement de Reidemeister de type 2 le plus simple:

$$F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \right) \quad (4.19)$$

résulte de $R R^{-1} = R^{-1} R = 1 \otimes 1$; il n'en faut pas moins considérer aussi les mouvements de type 2 sur des graphes obliques!

Ainsi pour vérifier que

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ V_i^{-1} \square (V_1 \square V_2) \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ V_i^{-1} \square (V_1 \square V_2) \end{array} \right), \quad (4.20)$$

évaluons l'action de ce graphe sur un vecteur $\langle \theta_1 | \otimes |\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle$ de $V_1^* \otimes V_1 \otimes V_2$, nous posons $\mathcal{T}(a \otimes b \otimes c) = S(a)ab \otimes c$:

$$\begin{aligned} & F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ V_i^{-1} \square (V_1 \square V_2) \end{array} \right) \langle \theta_1 | \otimes (|\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle) \\ &= F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ V_i^{-1} \square (V_2 \square V_1) \end{array} \right) \sum_q \langle \theta_1 | \otimes (b_q |\psi_2 \rangle \otimes a_q |\psi_1 \rangle) \\ &= F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ (V_i^{-1} \square V_2) \square V_1 \end{array} \right) \sum_{j,q} (\langle \theta_1 | S(P_j) \otimes Q_j b_q |\psi_2 \rangle) \otimes R_j a_q |\psi_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F\left(\downarrow \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \right) \sum_{j,p,q} (b_p Q_j b_q |\psi_2\rangle \otimes \langle \theta_1 | S(a_p P_j)) \otimes R_j a_q |\psi_1\rangle \\
&\quad (Y_2 \square Y_i^{-1}) \square Y_i \\
&= F\left(\downarrow \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \right) \sum_{i,j,p,q} X_i b_p Q_j b_q |\psi_2\rangle \otimes (\langle \theta_1 | S(Y_i a_p P_j) \otimes Z_i R_j a_q |\psi_1\rangle) \\
&\quad Y_2 \square (Y_i^{-1} \square Y_i) \\
&= \sum_{i,j,p,q} \langle \theta_1 | S(Y_i a_p P_j) \alpha Z_i R_j a_q |\psi_1\rangle X_i b_p Q_j b_q |\psi_2\rangle \\
&= (\langle \theta_1 | \otimes id) \mathcal{T}(\phi_{312} R_{13} \phi_{132}^{-1} R_{23}) (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\
&= (\langle \theta_1 | \otimes id) \mathcal{T}((\Delta \otimes id) R \text{ phi}^{-1}) (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\
&= (\langle \theta_1 | \otimes id) \mathcal{T}\left(\sum_{p,j} a_p^{(1)} P_j \otimes a_p^{(2)} Q_j \otimes b_p R_j\right) (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\
&= \sum_{p,j} \langle \theta_1 | S(P_j) S(a_p^{(1)}) \alpha a_p^{(2)} Q_j |\psi_1\rangle b_p R_j |\psi_2\rangle \\
&= \sum_{p,j} \varepsilon(a_p) \langle \theta_1 | S(P_j) \alpha Q_j |\psi_1\rangle b_p R_j |\psi_2\rangle \\
&= \sum_j \langle \theta_1 | S(P_j) \alpha Q_j |\psi_1\rangle R_j |\psi_2\rangle \\
&= F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \right) \langle \theta_1 | \otimes |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\
&\quad Y_i^{-1} \square (Y_i \square Y_2)
\end{aligned}$$

En d'autres termes l'invariance de F sous le mouvement ci-dessus découle des axiomes d'antipode, de $(\varepsilon \otimes id)R = 1_A$, et de

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)R \phi^{-1} &= \sum_{j,p} a_p^{(1)} P_j \otimes a_p^{(2)} Q_j \otimes b_p R_j \\
&= \phi_{312} R_{13} \phi_{132}^{-1} R_{23} = \sum_{i,j,p} Y_i a_p P_j \otimes Z_i R_j a_q \otimes X_i b_p Q_j b_q
\end{aligned}$$

On démontre de même

$$F\left(\begin{array}{c} (Y_1 \square Y_2) \square Y_2^{-1} \\ \curvearrowright \\ \downarrow \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} (Y_1 \square Y_2) \square Y_2^{-1} \\ \downarrow \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} (Y_1 \square Y_2) \square Y_2^{-1} \\ \downarrow \end{array}\right) \quad (4.21)$$

et en utilisant $(id \otimes \Delta)R \phi = \phi_{231}^{-1} R_{13} \phi_{213} R_{12}$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ (V_1 \circ V_2^{-1}) \circ V_2 \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 2} \\ (V_1 \circ V_2^{-1}) \circ V_2 \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ (V_1 \circ V_2^{-1}) \circ V_2 \end{array}\right) \quad (4.22)$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 4} \\ V_1 \circ (V_1^{-1} \circ V_2) \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 5} \\ V_1 \circ (V_1^{-1} \circ V_2) \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 6} \\ V_1 \circ (V_1^{-1} \circ V_2) \end{array}\right) \quad (4.23)$$

Composant le graphe (4.20) ci-dessus avec $F\left(\begin{array}{c} V_1 \circ (V_1 \circ V_2) \\ \text{diagram 7} \\ V_1 \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right)$ on obtient

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 8} \\ V_1^{-1} \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 9} \\ V_1^{-1} \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right) \quad (4.24)$$

qui correspond au croquis simplifié:

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 10} \\ V_1^{-1} \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 11} \\ V_1^{-1} \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right) \quad (4.25)$$

et à l'identité

$$\sum_{i,j,p} S(Y_i a_p P_j) \alpha Z_i R_j \otimes X_i b_p Q_j = \sum_{j,l} S(P_j) \alpha Q_j c_l \otimes R_j d_l \quad (4.26)$$

De même

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 12} \\ V_1^{-1} \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram 13} \\ V_1^{-1} \circ (V_2 \circ V_1) \end{array}\right) \quad (4.27)$$

$$F\left(\begin{array}{c} V_1 \alpha (V_2 \alpha V_1^{-1}) \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} V_1 \alpha (V_2 \alpha V_1^{-1}) \\ \searrow \quad \swarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) \quad (4.28)$$

$$F\left(\begin{array}{c} V_1 \alpha (V_2 \alpha V_1^{-1}) \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} V_1 \alpha (V_2 \alpha V_1^{-1}) \\ \searrow \quad \swarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) \quad (4.29)$$

correspondant respectivement aux identités:

$$\sum_{i,j,l} X_i c_l Q_j \otimes S(Y_i d_l P_j) \alpha Z_i R_j = \sum_{j,p} R_j a_p \otimes S(P_j) \alpha Q_j b_p \quad (4.30)$$

$$\sum_{i,j,p} X_i b_p Q_j \beta S(Z_i R_j) \otimes Y_i a_p P_j = \sum_{i,l} X_i \beta S(d_l Y_i) \otimes c_l Z_i \quad (4.31)$$

$$\sum_{i,j,l} X_i c_l Q_j \beta S(Z_i R_j) \otimes Y_i d_l P_j = \sum_{i,p} X_i \beta S(a_p Y_i) \otimes b_p Z_i \quad (4.32)$$

Les images des graphes dont les directions de certaines composantes ont été renversées peuvent également être calculées, et l'invariance sous les mouvements ci-dessus résulte des mêmes identités combinées avec $S^2(x) = xux^{-1}$. Par exemple

$$F\left(\begin{array}{c} \swarrow \quad \nearrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ V_1 \alpha (V_2 \alpha V_1^{-1}) \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \searrow \quad \swarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ V_1 \alpha (V_2 \alpha V_1^{-1}) \end{array} \right) \quad (4.33)$$

correspond à l'identité

$$\sum_{i,j,p} S(\alpha Z_i R_j) u Y_i a_p P_j \otimes X_i b_p Q_j = \sum_{j,l} S(\alpha Q_j c_l) u P_j \otimes R_j d_l \quad (4.34)$$

équivalente à (4.26).

Pour terminer la démonstration de l'invariance sous les mouvements de type 2 il reste encore à vérifier:

$$F\left(\begin{array}{c} \swarrow \quad \nearrow \\ \searrow \quad \swarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \swarrow \quad \nearrow \\ \searrow \quad \swarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \swarrow \quad \nearrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \searrow \quad \swarrow \end{array} \right) \quad (4.35)$$

Nous avons par exemple:

$$\begin{aligned}
 & F\left(\begin{array}{c} V_2 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ V_1^{-1} \end{array} \right) = \\
 & [F\left(\begin{array}{c} V_2 \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ V_1^{-1} \end{array} \right) \otimes F\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ V_1^{-1} \circ (V_2^{-1} \circ V_1) \end{array} \right)] \circ F\left(\begin{array}{c} V_2 \circ (V_1^{-1} \circ (V_2^{-1} \circ V_1)) \\ \downarrow \\ \uparrow \\ V_1 \end{array} \right) \\
 & = F\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ V_2 \circ (V_1^{-1} \circ (V_2^{-1} \circ V_1)) \end{array} \right) \circ F\left(\begin{array}{c} V_2 \circ (V_1^{-1} \circ (V_2^{-1} \circ V_1)) \\ \downarrow \\ \uparrow \\ V_1 \end{array} \right) \\
 & = F\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \text{[Diagram of a crossing]} \end{array} \right) \\
 & = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \downarrow \\ (V_2 \circ (V_2^{-1} \circ V_1^{-1})) \circ V_1 \end{array} \right) \circ [F\left(\begin{array}{c} V_2 \circ (V_2^{-1} \circ V_1^{-1}) \\ \downarrow \\ \uparrow \\ V_1 \end{array} \right) \otimes F\left(\begin{array}{c} V_1 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right)] \\
 & = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Les mouvements de type 1 engendrant l'isotopie de ruban (qui correspond à l'isotopie ambiante des rubans dans \mathbb{R}^3) sont :

$$\begin{array}{c} \text{[Diagram 1: A loop with a crossing]} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} | \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{[Diagram 2: A loop with a crossing]} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{[Diagram 3: A loop with a crossing]} \end{array} \quad (4.36)$$

Pour vérifier l'invariance d'isotopie correspondante on peut présenter une étude systématique des valeurs des boucles élémentaires, appelées "twists" en anglais et représentant les torons

observés fréquemment par les alpinistes sur leur corde:

$$\text{La formule } S(\alpha) u = \sum_p S(b_p) \alpha a_p \quad (4.37)$$

implique

$$F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V \quad V^{-1} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{arc} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V \quad V^{-1} \end{array} \right) \circ (v \otimes id_{V^*}) \quad (4.38)$$

Appliquant S à (4.37) on obtient

$$\begin{aligned} S(u) S^2(\alpha) &= \sum_p S(\alpha a_p) S^2(b_p) \\ \text{i.e. } v^2 \alpha &= \sum_p S(\alpha a_p) u b_p \end{aligned} \quad (4.39)$$

impliquant l'identité avec la direction opposée:

$$F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ V^{-1} \quad V \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{arc} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ V^{-1} \quad V \end{array} \right) \circ (id_{V^*} \otimes v) \quad (4.40)$$

L'identité

$$\alpha = u \sum_l S^{(-1)}(\alpha d_l) c_l \quad (4.41)$$

est équivalente à

$$S(\alpha) u = \sum_l S(c_l) \alpha d_l v^2 \quad (4.42)$$

qui implique

$$F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V \quad V^{-1} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{arc} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V \quad V^{-1} \end{array} \right) \circ (v^{-1} \otimes id_{V^*}) \quad (4.43)$$

Appliquant à nouveau S à (4.42) on obtient

$$\alpha = \sum_l S(\alpha d_l) u c_l \quad (4.44)$$

et donc

$$F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \\ v^{-1} \quad v \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \text{arc} \\ \downarrow \\ v^{-1} \quad v \end{array}\right) \circ (id_{v \cdot} \otimes v^{-1}) \quad (4.45)$$

Evaluons maintenant les boucles latérales

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \\ v \end{array}\right) |\psi\rangle &= F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \\ (v^{-1} \square v) \square v \end{array}\right) \sum_a \langle e^a | \otimes v u^{-1} S(\beta) | e_a \rangle \otimes |\psi\rangle \\ &= F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \\ v^{-1} \square (v \square v) \end{array}\right) \sum_{a,i} \langle e^a | S(X_i) \otimes v Y_i u^{-1} S(\beta) | e_a \rangle \otimes Z_i |\psi\rangle \\ &= F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \\ v^{-1} \square (v \square v) \end{array}\right) \sum_{a,i,l} \langle e^a | S(X_i) \otimes c_l Z_i |\psi\rangle \otimes v d_l Y_i u^{-1} S(\beta) | e_a \rangle \\ &= F\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow \\ (v^{-1} \square v) \square v \end{array}\right) \sum_{a,i,j,l} \langle e^a | S(P_j X_i) \otimes Q_j c_l Z_i |\psi\rangle \otimes v R_j d_l Y_i u^{-1} S(\beta) | e_a \rangle \\ &= \sum_{a,i,j,l} \langle e^a | S(P_j X_i) \alpha Q_j c_l Z_i |\psi\rangle v R_j d_l Y_i u^{-1} S(\beta) | e_a \rangle \\ &= v \sum_{i,j,l} R_j d_l Y_i u^{-1} S(\beta) S(P_j X_i) \alpha Q_j c_l Z_i |\psi\rangle \\ &= v \sum_{i,j,l} u^{-1} S(P_j X_i \beta S(R_j d_l Y_i)) \alpha Q_j c_l Z_i |\psi\rangle \end{aligned}$$

Mais la formule (4.31) ci-dessus est équivalente à

$$\sum_{i,j,l} P_j X_i \beta S(R_j d_l Y_i) \otimes Q_j c_l Z_i = \sum_{j,p} b_p Q_j \beta S(R_j) \otimes a_p P_j \quad (4.46)$$

de sorte que

$$\sum_{i,j,l} S(P_j X_i \beta S(R_j d_l Y_i)) \alpha Q_j c_l Z_i = \sum_{j,p} S(b_p Q_j \beta S(R_j)) \alpha a_p P_j = u \quad (4.47)$$

et on a donc tout simplement

$$F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \right) = v \quad (4.48)$$

Cette démonstration qui peut paraître à première vue un peu miraculeuse n'est que la mise en forme de l'intuition graphique suivante:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \right) &= F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ (v^{-1} \circ v) \circ v \\ \downarrow \end{array} \right) \circ F\left(\begin{array}{c} (v^{-1} \circ v) \circ v \\ \downarrow \end{array} \right) \\ &= F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ (v^{-1} \circ v) \circ v \\ \downarrow \end{array} \right) \circ F\left(\begin{array}{c} (v^{-1} \circ v) \circ v \\ \downarrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \end{array} \right) = v \end{aligned}$$

de même

$$F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \end{array} \right) \circ v^{-2} \circ F\left(\begin{array}{c} \downarrow \end{array} \right) = v^{-1} \quad (4.49)$$

$$F\left(\begin{array}{c} \downarrow \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \end{array} \right) \circ v = v \quad (4.50)$$

$$F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) \circ v^{-1} = v^{-1} \quad (4.51)$$

Pour obtenir les valeurs des boucles inférieures écrivons enfin:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) &= F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) \circ F\left(\begin{array}{c} (\bar{v}^{-1} \square v) \square v \\ \downarrow \end{array}\right) \\ &= F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) \circ F\left(\begin{array}{c} (\bar{v}^{-1} \square v) \square v \\ \downarrow \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ \text{loop} \end{array}\right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

partons de

$$v = \sum_{i,p} X_i b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) S(Y_i) \alpha Z_i \quad (4.53)$$

et substituons l'identité pentagonale $\phi \otimes 1 =$

$$(id \otimes \Delta \otimes id) \phi^{-1} (1 \otimes \phi^{-1}) (id \otimes id \otimes \Delta) \phi (\Delta \otimes id \otimes id)$$

$$\text{i.e. } \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i \otimes 1 = \sum_{i,j,k,m} P_j X_i X_k^{(1)} \otimes Q_j^{(1)} P_m Y_i X_k^{(2)} \otimes Q_j^{(2)} Q_m Z_i^{(1)} Y_k \otimes R_j R_m Z_i^{(2)} Z_k$$

dans

$$\begin{aligned} v\beta &= \sum X_i b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) S(Y_i) \alpha Z_i \beta S(1) \\ &= \sum P_j X_i X_k^{(1)} b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) S(Q_j^{(1)} P_m Y_i X_k^{(2)}) \alpha Q_j^{(2)} Q_m Z_i^{(1)} Y_k \beta S(R_j R_m Z_i^{(2)} Z_k) \\ &= \sum X_i X_k^{(1)} b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) S(P_m Y_i X_k^{(2)}) \alpha Q_m Z_i^{(1)} Y_k \beta S(R_m Z_i^{(2)} Z_k) \\ &= \sum X_i b_p X_k^{(2)} u^{-1} v S(\beta) S(X_k^{(1)}) S(a_p) S(P_m Y_i) \alpha Q_m Z_i^{(1)} Y_k \beta S(R_m Z_i^{(2)} Z_k) \\ &= \sum X_i b_p u^{-1} v S(X_k^{(1)} \beta S(X_k^{(2)})) S(a_p) S(P_m Y_i) \alpha Q_m Z_i^{(1)} Y_k \beta S(R_m Z_i^{(2)} Z_k) \\ &= \sum X_i b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) S(P_m Y_i) \alpha Q_m Z_i^{(1)} \beta S(Z_i^{(2)}) S(R_m) \\ &= \sum b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) S(P_m) \alpha Q_m \beta S(R_m) \\ &= \sum b_p u^{-1} v S(\beta) S(a_p) \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré, puisque v est central,

$$\beta = \sum_p b_p u^{-1} S(a_p \beta) \quad (4.54)$$

qui implique

$$F\left(\begin{array}{c} v \quad v^{-1} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \end{array} \right) = (v \otimes id_{v \bullet}) F\left(\begin{array}{c} v \quad v^{-1} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \end{array} \right) \quad (4.55)$$

L'intuition graphique de la démonstration ci-dessus de (4.54) est simple:

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{---} \\ \text{diagram} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{---} \\ \text{diagram} \end{array} \right)$$

mais à cause de la nécessité de parenthésier les objets intermédiaires sa mise en formules a dû utiliser l'identité pentagonale !

De (4.54) on déduit

$$S(\beta) = u \sum_p a_p \beta u^{-1} S(u^{-1}) S(b_p)$$

ou encore

$$v^2 u^{-1} S(\beta) = \sum_p a_p \beta S(b_p) \quad (4.56)$$

qui donne

$$F\left(\begin{array}{c} v^{-1} \quad v \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \end{array} \right) = (id_{v \bullet} \otimes v) F\left(\begin{array}{c} v^{-1} \quad v \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \end{array} \right) \quad (4.57)$$

On dérive encore de (4.54)

$$u^{-1} S(\beta) = \sum_l d_l \beta S(c_l) \quad (4.58)$$

et en appliquant S aux deux membres

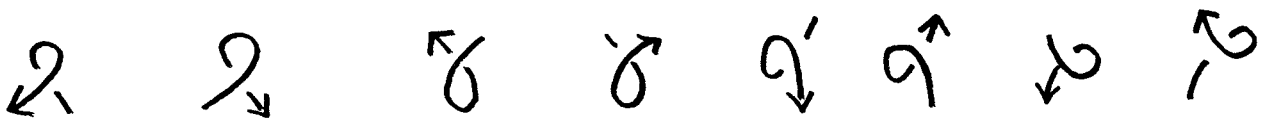
$$v^{-2}\beta = \sum_l c_l v^{-1} S(\beta) S(d_l) \quad (4.59)$$

(4.58) et (4.59) impliquent respectivement

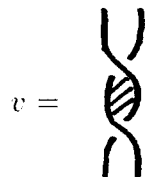
$$F\left(\begin{array}{c} v^{-1} \quad v \\ \curvearrowright \end{array} \right) = (id_{V \cdot} \otimes v^{-1}) \circ F\left(\begin{array}{c} v^{-1} \quad v \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \quad (4.60)$$

$$F\left(\begin{array}{c} v \quad v^{-1} \\ \curvearrowright \end{array} \right) = (v^{-1} \otimes id_{V \cdot}) \circ F\left(\begin{array}{c} v \quad v^{-1} \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \quad (4.61)$$

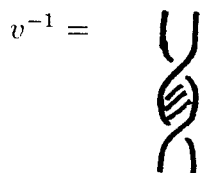
En résumé on a montré qu'à chacune des boucles



est associé l'opérateur v qui correspond à la torsion du ruban



Alors que l'opérateur v^{-1} est associé aux huit autres boucles



Pour parachever cette démonstration il est encore nécessaire de vérifier la consistance des valeurs posées pour les huit croisements avec l'invariance par isotopie, et au passage cela donne une expression explicite pour R^{-1} .

Etablissons en premier lieu

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \quad (4.62)$$

équivalente à

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right)$$

dont la démonstration comporte les étapes suivantes:

$$\begin{aligned}
F\left(\begin{array}{c} V_1 \quad V_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Diagram 1} \end{array}\right) &= \\
F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Diagram 2} \\ V_1 \circ (V_1^{-1} \circ (V_1 \circ V_2)) \end{array}\right) &\circ F\left(\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2) \end{array}\right) \circ F\left(\begin{array}{c} \cup \quad \downarrow \downarrow \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2) \end{array}\right) = \\
F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Diagram 3} \\ V_1 \circ (V_1^{-1} \circ (V_1 \circ V_2)) \end{array}\right) &\circ F\left(\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2) \end{array}\right) \circ F\left(\begin{array}{c} \cup \quad \downarrow \downarrow \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2) \end{array}\right) = \\
F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Diagram 4} \\ V_1 \circ (V_1^{-1} \circ (V_1 \circ V_2)) \end{array}\right) &\circ \Phi_{\substack{V_1 \circ (V_1^{-1} \circ (V_1 \circ V_2)) \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2)}} \circ F\left(\begin{array}{c} \cup \quad \downarrow \downarrow \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2) \end{array}\right) = \\
F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Diagram 5} \\ V_1 \circ ((V_1^{-1} \circ V_1) \circ V_2) \end{array}\right) &\circ \Phi_{\substack{V_1 \circ ((V_1^{-1} \circ V_1) \circ V_2) \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2)}} \circ F\left(\begin{array}{c} \cup \quad \downarrow \downarrow \\ (V_1 \circ V_1^{-1}) \circ (V_1 \circ V_2) \end{array}\right) = \\
F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Diagram 6} \\ (V_1 \circ (V_1^{-1} \circ V_1)) \circ V_2 \end{array}\right) &\circ \Phi_{\substack{V_1 \circ (V_1^{-1} \circ V_1) \circ V_2 \\ ((V_1 \circ V_1^{-1}) \circ V_1) \circ V_2}} \circ F\left(\begin{array}{c} \cup \quad \downarrow \downarrow \\ ((V_1 \circ V_1^{-1}) \circ V_1) \circ V_2 \end{array}\right) = \\
F\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ V_1 \end{array}\right) &\circ F\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ V_2 \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ V_1 \quad V_2 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Pour achever de convaincre le lecteur de la valeur de telles démonstrations graphiques donnons à nouveau sa transcription en formules explicites:

Evaluons tout d'abord

$$F\left(\begin{array}{c} V_1 \quad V_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \end{array}\right) |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$

$$= F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \\ V_1 \otimes ((V_1^{-1} \otimes V_2) \otimes V_1) \end{array}\right) \circ [id \otimes S \otimes id \otimes id] [(1 \otimes \varphi^{-1})(id \otimes id \otimes \Delta)\varphi] \sum_a \beta |e_a\rangle \otimes \langle e^a| \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$

$$= F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \\ V_1 \otimes ((V_1^{-1} \otimes V_2) \otimes V_1) \end{array}\right) \sum_{a,i} T_i \beta |e_a\rangle \otimes \langle e^a| S(U_i) \otimes V_i |\psi_2\rangle \otimes W_i |\psi_1\rangle$$

$$= F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \\ V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_1^{-1}) \otimes V_1) \end{array}\right) \sum_{a,i,p} T_i \beta |e_a\rangle \otimes b_p V_i |\psi_2\rangle \otimes \langle e^a| S(a_p U_i) \otimes W_i |\psi_1\rangle$$

$$= F\left(\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagram} \\ V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_1^{-1} \otimes V_1)) \end{array}\right) \sum_{a,i,p,l} T_i \beta |e_a\rangle \otimes X_l b_p V_i |\psi_2\rangle \otimes \langle e^a| S(Y_l a_p U_i) \otimes Z_l W_i |\psi_1\rangle$$

$$= \sum_{i,p,l} T_i \beta S(Y_l a_p U_i) \otimes Z_l W_i |\psi_1\rangle \otimes X_l b_p V_i |\psi_2\rangle \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \text{où } (1 \otimes \varphi^{-1})(id \otimes id \otimes \Delta)\varphi &= \sum_i T_i \otimes U_i \otimes V_i \otimes W_i \\ &= \sum_{j,m} X_m \otimes P_j Y_m \otimes Q_j Z_m^{(1)} \otimes R_j Z_m^{(2)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ce calcul nous donne donc explicitement:

$$F\left(\begin{array}{c} V_1 \quad V_2 \\ \text{diagram} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j,l,m,p,q} X_m \beta S(Y_l a_p P_j Y_m) \alpha Z_l R_j Z_m^{(2)} a_q \otimes X_l b_p Q_j Z_m^{(1)} b_q \\ &= \sum_{j,l,m,p,q} X_m \beta S(Y_l a_p P_j Y_m) \alpha Z_l R_j a_q Z_m^{(1)} \otimes X_l b_p Q_j b_q Z_m^{(2)} \end{aligned}$$

mais d'après (4.24) cette expression est égale à

$$\sum_{j,m} X_m \beta S(Y_m) S(P_j) \alpha Q_j Z_m^{(1)} \otimes R_j Z_m^{(2)}$$

Et l'identité pentagonale s'écrit encore

$$\sum_{j,m} X_m \otimes P_j Y_m \otimes Q_j Z_m^{(1)} \otimes R_j Z_m^{(2)} = (id \otimes \Delta \otimes id) \phi (\phi \otimes 1) (\Delta \otimes id \otimes id) \phi^{-1}$$

de sorte qu'en utilisant les axiomes on obtient bien

$$F\left(\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right) = 1 \otimes 1 \quad (4.65)$$

Nous avons donc démontré au passage la formule explicite

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \sum_q c_q \otimes d_q \\ &= \sum_{i,p,l} T_i \beta S(Y_l a_p U_i) \alpha Z_l W_i \otimes X_l b_p V_i \end{aligned} \quad (4.66)$$

avec les notations de Drinfeld données en (4.64).

En utilisant l'identité pentagonale et les axiomes on a également la formule équivalente:

$$R^{-1} = \sum_{i,l,p} K_i X_l \beta S(M_i a_p Y_l) \alpha N_i \otimes L_i b_p Z_l \quad (4.67)$$

$$\text{où } \sum_i K_i \otimes L_i \otimes M_i \otimes N_i = (\Delta \otimes id \otimes id) \varphi (\varphi^{-1} \otimes 1) \quad (4.68)$$

Des preuves analogues donnent

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \quad (4.69)$$

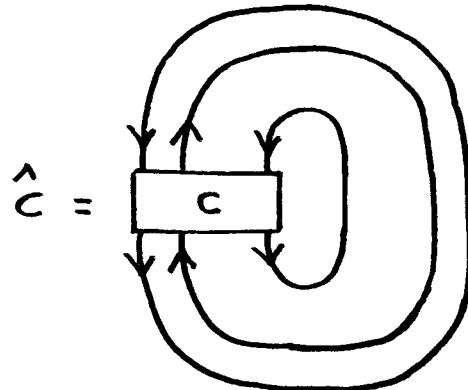
$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \quad (4.70)$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \quad (4.71)$$

et les identités similaires lorsque la direction de certaines flèches a été renversée.

4.5 Traces et dimensions quantiques

Soit $C : w \rightarrow w$ un c -graphe muni des mêmes mots de départ et d'arrivée, $w \in N(A)_k$. Définissons la fermeture \hat{C} de C comme sur la figure:



Par construction $F(C) \in \text{End } F(w)$ est un entrelaceur. Posons:

$$\text{tr}_q F(C) = \text{tr}_{F(w)}(F(C) \beta S(\alpha) u v^{-1}). \quad (4.72)$$

Nous avons

$$F(\widehat{C}) = \text{tr}_q F(C). \quad (4.73)$$

Et pour deux tels c-graphes C, C'

$$\text{tr}_q(F(C \circ C')) = \text{tr}_q(F(C' \circ C)), \quad (4.74)$$

La démonstration de (4.73) fait appel à l'axiome (R4) d'algèbre quasi-Hopf de ruban, à (2.18) et (2.20). Considérons d'abord le cas $C : V_1 \square V_2 \rightarrow V_1 \square V_2$. Soit $\Lambda = (\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_2^* \otimes \pi_1^*)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi)(\phi^{-1} \otimes 1)$. On a alors

$$\begin{aligned} F(\widehat{C}) &= F(U_{V_1}^L)(\text{id} \otimes F(U_{V_2}^L) \otimes \text{id})\Lambda^{-1}(F(C) \otimes \text{id}_{V_2^*} \otimes \text{id}_{V_1^*})\Lambda(\text{id} \otimes F(D_{V_2}^R) \otimes \text{id})F(D_{V_1}^R) \\ &= \sum_{i,j} \text{tr}_{V_1 \otimes V_2}[(S(\alpha D_i N_j)uv^{-1}A_i \otimes S(\alpha C_i M_j)uv^{-1}B_i)F(C)(K_j\beta \otimes L_j\beta)] \\ &= \text{tr}_{V_1 \otimes V_2}[F(C)(\delta(S \otimes S)(\gamma_{21})(uv^{-1} \otimes uv^{-1})] \\ &= \text{tr}_{V_1 \otimes V_2}[F(C)\Delta(\beta)f^{-1}(S \otimes S)(f_{21}\Delta'(\alpha))(uv^{-1} \otimes uv^{-1})] \\ &= \text{tr}_{V_1 \otimes V_2}[F(C)\Delta(\beta S(\alpha))f^{-1}(S \otimes S)(f_{21})(uv^{-1} \otimes uv^{-1})] \\ &= \text{tr}_q F(C). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Le cas général peut s'établir par récurrence.

La dimension quantique est alors:

$$\dim_q(V) = \text{tr}_q(\text{id}_V) = \text{tr}_V(\pi(\beta S(\alpha)uv^{-1})). \quad (4.76)$$

L'utilisation de (4.73) pour le graphe vertical correspondant à l'identité nous montre que les dimensions quantiques sont multiplicatives,

$$\dim_q(V_1 \otimes V_2) = \dim_q(V_1) \cdot \dim_q(V_2). \quad (4.77)$$

Remarque. Il est possible de formuler la condition fondamentale (R4), de manière semblable à l'axiome correspondant pour une algèbre de Hopf de ruban. Commençons par calculer $\Delta(u)$: Lorsque α est inversible, de (3.9), (2.18) et (2.21) on déduit:

$$\Delta(u) = f^{-1}(S \otimes S)(\gamma_{21}^{-1} f_{21}) \sum_p (S \otimes S)(\Delta'(b_p))\gamma\Delta(a_p). \quad (4.78)$$

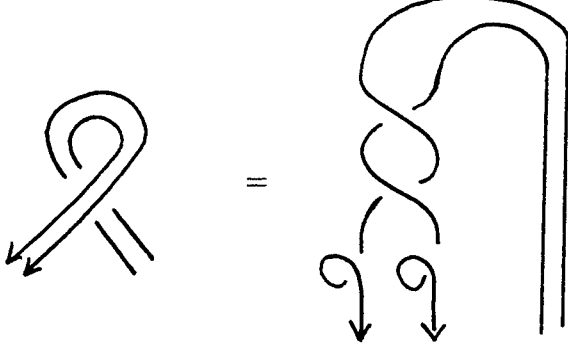
Que l'on peut réexprimer à l'aide des propriétés du foncteur F sous la forme:

$$\Delta(u) = f^{-1}(S \otimes S)f_{21}(u \otimes u)(R_{21}R_{12})^{-1} \quad (4.79)$$

Cette formule peut en fait s'établir sans hypothèse sur α en partant directement de la définition de u et en utilisant (2.18) et (2.20). Pour cela il faut d'abord montrer

$$\sum_p (S \otimes S)\Delta'(b_p) \gamma\Delta(a_p) = (S \otimes S)\gamma_{21}(u \otimes u)(R_{21} R_{12})^{-1} \quad (4.80)$$

dont la démonstration assez longue (dont nous tenons le manuscrit à disposition du lecteur intéressé) utilise notamment l'identité pentagonale. L'isotopie de graphes correspondant à (4.80) est



Comme, en plus de (4.79) on peut aussi montrer que

$$(S \otimes S)R = f_{21}Rf^{-1}, \quad (4.81)$$

qui implique

$$(S \otimes S)(R_{12}R_{21}) = fR_{21}R_{12}f^{-1}, \quad (4.82)$$

l'expression $\Delta(S(u)) = f^{-1}(S \otimes S)\Delta'(u)f$ devient:

$$\Delta(S(u)) = (R_{21}R_{12})^{-1}(S(u) \otimes S(u))(S \otimes S)f_{21}^{-1}f. \quad (4.83)$$

d'où

$$\Delta(S(u)u) = (S(u)u \otimes S(u)u)(R_{21}R_{12})^{-2}, \quad (4.84)$$

en accord avec (R1) et

$$\Delta(v) = (v \otimes v)(R_{21}R_{12})^{-1}. \quad (4.85)$$

cette condition est un des axiomes d'algèbre de Hopf de ruban, qui a la même interprétation graphique dans le cas d'une algèbre quasi-Hopf. En d'autres termes nous avons montré que (4.85) est équivalente à (R.4),

4.6 Représentations du groupe des tresses

Toute représentation (π, V) d'une algèbre quasi-Hopf quasitriangulaire conduit à une représentation du groupe des tresses à n brins, B_n [26]. Les images des générateurs b_i , $i = 1, \dots, n - 1$ sont les endomorphismes suivants du module

$((V \otimes V) \otimes V) \otimes \dots \otimes V = V_L^{\otimes n}$ (nous ouvrons toutes les parenthèses à gauche):

$$b_1 = \check{R}_{12} \quad (4.86)$$

$$b_i = \psi_i^{-1} \check{R}_{i,i+1} \psi_i, \quad i > 1 \quad (4.87)$$

où

$$\psi_i = \pi^{\otimes n}(\Delta_L^{i-2}(\phi) \otimes 1^{\otimes n-i-1}). \quad (4.88)$$

Ici $\check{R}_{i,i+1}$ agit sur les i ème et $i + 1$ ème espaces accouplés, Δ_L est défini pour $n \geq 1$ par

$$\Delta_L(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \Delta(a_1) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n, \quad (4.89)$$

et la notation Δ_L^k représente $\Delta_L \circ \Delta_L \cdots \Delta_L$ (k fois) pour $k \geq 1$, $\Delta_L^0 = \text{id}$. Par exemple, dans le cas de B_5 , \check{R}_{34} est un morphisme du module $((V \otimes V) \otimes (V \otimes V)) \otimes V$ et b_3 est le morphisme correspondant de $((V \otimes V) \otimes V) \otimes V$:

$$b_3 = \pi^{\otimes 5}((\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi^{-1}) \otimes 1) \check{R}_{34} \pi^{\otimes 5}((\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi) \otimes 1). \quad (4.90)$$

Les relations du groupe des tresses:

$$b_i b_j = b_j b_i \text{ for } |i - j| \geq 2 \quad (4.91)$$

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \quad (4.92)$$

résultent comme on l'a vu plus haut de l'invariance isotopique du foncteur F , (4.92) étant la représentation graphique de l'équation quasi-Yang-Baxter (2.24). Soulignons encore que ces résultats méritaient une démonstration, car c'est l'insertion de morphismes $\Delta_L^k(\phi)$ qui rend possible la composition des générateurs formant un mot du groupe des tresses. En d'autres termes, il existe des identités du style:

$$\begin{aligned} \Delta_L^{i-1}(\phi)(\Delta_L^{i-2}(\phi^{-1}) \otimes 1) &= (\text{id}^{\otimes i} \otimes \Delta) \Delta_L^{i-2}(\phi^{-1})(1^{\otimes i-1} \otimes \phi) \Delta_L^{i-2}(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\phi) \\ \Delta_L^{i-2}(\phi) \Delta_L^{j-2}(\phi^{-1}) &= (\text{id}^{\otimes i-1} \otimes \Delta \otimes \text{id}^{\otimes n-i-1}) \Delta_L^{j-3}(\phi^{-1}) \Delta_L^{i-2}(\phi) \end{aligned}$$

qui découlent de l'identité pentagonale, en accord avec le théorème de cohérence de Mac Lane.

Cette représentation du groupe des tresses dépend du choix de parenthèses fait sur $V_L^{\otimes n}$, mais d'autres choix donnent des représentations équivalentes. Le présent choix permet le plongement de B_n dans B_{n+1} en ajoutant un brin à droite.

Limitons nous maintenant à une représentation (π, V) irréductible telle que $\dim_q V \neq 0$. Posons

$$\mathcal{T}_n(g) = (\dim_q V)^{-n} \text{tr}_{qV^{\otimes n}}(g) \quad (4.93)$$

où $g \in B_n$. En vertu de (4.74), \mathcal{T}_n est une trace de Markov:

$$\mathcal{T}_n(g_1 g_2) = \mathcal{T}_n(g_2 g_1) \quad (4.94)$$

$$\mathcal{T}_{n+1}(g b_n^{\pm 1}) = \tau_V^{\pm} \mathcal{T}_n(g), \quad (4.95)$$

où $\tau_V^\pm = \pi(v^{\mp 1}) / \dim_q V$. Cette trace s'étend à B_∞ , car

$$\mathcal{T}_n(g) = \mathcal{T}_m(g) \quad \text{si } m > n, \quad g \in B_n \subset B_m. \quad (4.96)$$

A l'aide de \mathcal{T}_n on construit des invariants d'isotopie ambiante des entrelacs par la méthode usuelle [32, 33].

Conclusion et Perspectives

La construction d'invariants topologiques à partir de catégories tressées semble très générale. Nous avons montré qu'elle pouvait être mise en oeuvre, au prix de l'insertion (lourde mais parfaitement rigoureuse) d'associateurs (appelés Ψ graphes dans le texte), dès que l'on rencontre une algèbre Quasi-Hopf de ruban. Il est connu que l'on peut même parfois élargir encore certains des axiomes de Drinfeld [26].

Par delà la théorie des entrelacs, ces méthodes donnent accès, via la chirurgie de Dehn, Kirby, Fenn, Rourke à des invariants de variétés tridimensionnelles orientées. Nous avons construit explicitement de tels invariants à partir de l'algèbre $D^\omega(G)$ de Dijkgraaf, Pasquier, Roche [22, 23] dans le paragraphe 5 de [16] et vérifié leur coïncidence avec les fonctions de partition de Dijkgraaf Witten [25, 17] pour des espaces lenticulaires. De façon cavalière on peut dire que ces auteurs formulent une théorie des champs topologique de Chern-Simons associée au 3-cocycle ω du groupe fini G général considéré [27].

Les déformations d'algèbres enveloppantes prises à des racines de l'unité se sont également révélées très intéressantes [3, 7, 8, 34].

On pourrait conclure par la question suivante: Ayant une telle algèbre, comment prédire à partir de caractéristiques algébriques la finesse des invariants qu'elle engendre, comment ces invariants se placent-ils dans la classification de Vassiliev ?

Remerciements. Nous avons bénéficié de nombreuses discussions avec E. Buffenoir, P. Degiovanni, M. Domergue, C. Kassel, J. Lascoux, E. Mourre, V. Pasquier, P. Roche, C. Roger, M. Rosso, V. Turaev, J. B. Zuber. A. C. est particulièrement reconnaissant à D. Bennequin, M. Rosso et J. Moreau pour leur gentillesse et leur patience dans l'organisation des rencontres de Strasbourg et la mise au point de ce texte.

Les recherches de D. Altschuler sont subventionnées par le Fond National Suisse de la Recherche Scientifique.

References

- [1] E. Witten, *Communications in Mathematical Physics* **121** (1989) 351.
- [2] G. Moore, N. Seiberg, lectures at the Trieste and Banff schools, 1989.
Commun. Math. Phys. **123** (1989) 177.
- [3] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Sierra, *Nuclear Physics* **B319** (1989) 155; *Nuclear Physics* **B330** (1990) 347.
- [4] G. Felder, J. Fröhlich, G. Keller, *Commun. Math. Phys.* **124** (1989) 647.
- [5] A. Alekseev, S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.* **133** (1990) 353.
- [6] K. Gawedzki, *Commun. Math. Phys.* **139** (1991) 201.
- [7] N. Reshetikhin, V.G. Turaev, *Inv. Math.* **103** (1991) 547.
- [8] M. Rosso, séminaire Bourbaki 744 (1991) et ref. incluses
Comm. Math. Phys. 117 (1988) 581, 124 (1989) 307.
- [9] V. Pasquier, H. Saleur, *Nucl. Phys.* **B330** (1990) 523.
P. Furlan, A. Ganchev, V. Petkova, *Nucl. Phys.* **B243** (1990) 205.
M. Walton, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 777.
J. Fuchs, P. Van Driel, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 632.
F. Goodman, H. Wenzl, *Advances in Math.* **82** (1990) 244.
G. Keller, *Letters in Mathematical Physics* **21** (1991) 273.
- [10] T. Kohno, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **37** (1987) 139.
A. Tsuchiya, Y. Kanie, *Lett. Math. Phys.* **13** (1987) 303; *Adv. Studies in Pure Mathematics* **16** (1988) 297.
- [11] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, proc. of the ICM, Berkeley, 1986, et références subséquentes.
M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63.
L. Faddeev, N. Reshetikhin, L. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, LOMI preprint E-14-87, Leningrad 1987; *Leningrad Math. J.* **1** (1990) 193.
- [12] M. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots* (Cambridge Univ. Press, 1990).
P. Degiovanni, *Théories topologiques, développements récents. Notes de cours, Ecole Normale Supérieure* prètirage, June 1991.
P. Degiovanni, *Commun. Math. Phys.* **145** (1992) 459.

- S. Piunikhin, *Reshetikhin-Turaev and Kontsevich-Kohno-Crane 3-manifold invariants coincide*, Moscow preprint (1991).
- [13] R. Kirby, P. Melvin, *On the 3-Manifolds Invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$* , preprint (1991).
- [14] V. G. Turaev, H. Wenzl, *Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras*, preprint, 1991.
- [15] D. Altschuler, A. Coste, *Invariants of three-manifolds from finite groups*, preprint CERN-TH 6204/91, to appear in proc. XXth Int. Conf. on Diff. Geometric Methods in Theor. Phys., New York City, 1991 (World Scientific, Singapore, 1991).
- [16] D. Altschuler, A. Coste, *Quasi-quantum groups, knots, three-Manifolds, and topological field theory*, Communications in Mathematical Physics **150** (1992) 83.
- [17] D. Altschuler, A. Coste, *Invariants of 3-manifolds from finite groups cohomology*, Journal of Geometry and Physics, 11 (1993) 191.
- [18] A. Kirillov, N. Reshetikhin, *Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links*, compte rendus d'un congrès à Luminy, 1987 (V. G. Kac, ed.), Adv. Series in Math. Phys. vol. 7, p. 285-339 (World Scientific, Singapore, 1988).
- [19] N. Reshetikhin, *Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I and II*. LOMI preprints E-4-87 and E-17-87, Leningrad 1988.
N. Reshetikhin, Leningrad Math. J. **1** (1990) 491.
V. G. Turaev, Inv. Math. **92** (1988) 527.
- [20] N. Reshetikhin, V. G. Turaev, Commun. Math. Phys. **127** (1990) 1.
- [21] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras and the Knizhnik-Zamolodchikov equations*, in *Problems of modern quantum field theory*, A. Belavin et al. ed. (Springer, 1990).
V. G. Drinfeld, Leningrad Math. J. **1** (1991) 1419.
- [22] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche, in proc. workshop *Integrable Systems and Quantum Groups*, Pavia, 1990; and in proc. Int. coll. on *Modern Quantum Field Theory*, Tata Institute, Bombay, 1990.
- [23] P. Roche, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1991.
- [24] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, H. Verlinde, Commun. Math. Phys. **123** (1989) 485.

- [25] R. Dijkgraaf, E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **129** (1990) 393.
- [26] G. Mack and V. Schomerus, *Quasi-Hopf quantum symmetry in quantum theory*, preprint DESY-91-037.
G. Mack and V. Schomerus, *Phys. Lett.* **267B** (1991) 213.
- [27] D. Freed and F. Quinn, *Chern-Simons theory with finite gauge groups*, preprint, 1991.
L. Kauffman, D. Radford, *A necessary and sufficient condition for a finite-dimensional Drinfeld double to be a ribbon Hopf algebra*, RIMS preprint, Kyoto 1991.
M. Hennings, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **109** (1991) 59.
D. Freed and R. Gompf, *Computer calculation of Witten's 3-manifold invariant*, preprint, 1990.
- [28] Joyal, Street.
J. Benabou *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, vol 256 (1963) 1887.
- [29] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician* (Springer, New York, 1971).
- [30] V. G. Drinfeld, *Leningrad Math. J.* **1** (1990) 321.
- [31] K. Reidemeister *Knot Theory* (version anglaise commentée) BCS associates, Moscow, Idaho USA (1983).
- [32] L. Kauffman, *On Knots* (Princeton Univ. Press, 1987); proc. Johns Hopkins Florence workshop 1989 (World Scientific).
- [33] H. Saleur, J.-B. Zuber, *Integrable lattice models and quantum groups*, prétirage Saclay SPhT/90-071, compte rendus école de Trieste, 1990.
- [34] D. Altschuler, L. Freidel, *On universal Vassiliev invariants*, prétirage Zürich et Enslapp-1, disponible sur hep-th (1994).