

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

MARC RABAUD

Expériences sur les formes de croissance à une interface air-huile

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1993, tome 45
« Conférences de P. Cartier, P. Di Francesco, J. Fröhlich, P. Hello, Ch. Kassel, V. Kharlamov, B. Khesin, J. Magnen, M. Rabaud, M. Schottenloher », , exp. n° 10, p. 181-191

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1993__45__181_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPÉRIENCES SUR LES FORMES DE CROISSANCE

A UNE INTERFACE AIR-HUILE

Marc Rabaud,

Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, FRANCE.

I. INTRODUCTION

Les formes de croissance qui apparaissent dans les expériences d'instabilité interfaciale posent d'importants problèmes fondamentaux. En effet la complexité apparaît généralement lorsque des termes non-linéaires prennent de l'ampleur : c'est le cas par exemple de la turbulence en mécanique des fluides. Le cas des expériences de croissance est différent car la complexité n'est pas liée à la valeur élevée d'un nombre de Reynolds, elle est plutôt causée par une rétroaction non locale existant dans les problèmes à frontière libre.

II. ÉQUATIONS

Un des cas les plus simples de croissance hydrodynamique est l'instabilité de Saffman et Taylor [1], instabilité qui affecte la frontière entre deux fluides non miscibles confinés entre deux plaques de verre parallèles. Dans le cas où les plaques sont très proches et où l'un des fluides (par exemple de l'air) est nettement moins visqueux que l'autre (par exemple de l'huile) le problème se simplifie encore et peut se décrire à deux dimensions (figure 1).

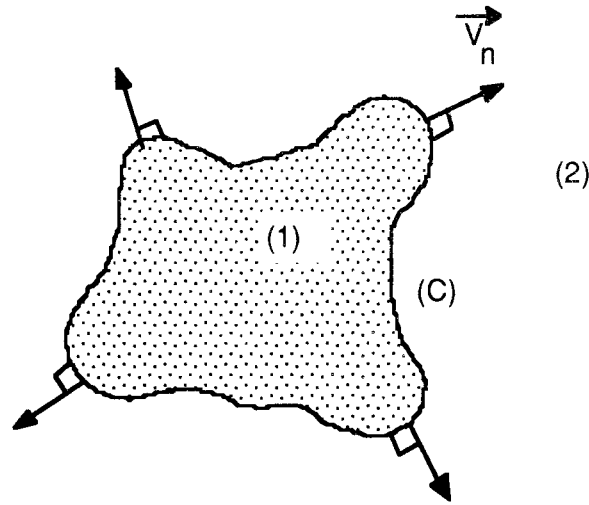


Figure 1 : Le fluide (1) repousse le fluide (2). L'interface - la courbe (C) - se déplace avec une vitesse normale $V_n(s)$, en chaque point d'abscisse curviligne, s .

Le mouvement de l'interface (la courbe plane fermée C) est uniquement déterminé par le champ de pression dans le fluide visqueux (2) et par la courbure locale. La vitesse normale de (C) est donné par la loi de Darcy,

$$\vec{v}_n = - \frac{b^2}{12 \mu} \vec{\nabla} P ,$$

Où b - espacement entre les plaques - et μ - viscosité du milieu 2 - sont des constantes. Le champ de pression P satisfait, dans le domaine (2), à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 P = 0 .$$

Les conditions aux limites pour le champ de pression sont :

i) $P = 0$ à l'infini, ou sur une courbe extérieure fermée et fixe. Dans ce dernier cas, la forme des isobares et du front est toujours très influencée par la forme de cette courbe extérieure, ceci à cause des propriétés de sensibilité aux conditions aux limites de l'équation de Laplace, si on la compare par exemple à une équation de diffusion qui possède, elle, une longueur caractéristique d'écrantage.

ii) sur la courbe (C) :

$$P = P_1 - \frac{T}{R(s)} ,$$

où P_1 - pression dans le domaine (1) - et T - tension interfaciale entre les fluides (1) et (2) - sont des constantes. $R(s)$ est le rayon de courbure de (C) à l'abscisse curviligne, s , considérée. Le cas $T = 0$ est un cas limite intéressant. Généralement les physiciens s'intéressent à la croissance du domaine (1) (cas instable $P_1 > 0$), où la courbe (C) peut devenir très sinueuse, tandis que les mathématiciens préfèrent étudier le problème de la fusion du domaine (1), ou problème de Stéfan (cas $p_1 < 0$ et $T = 0$), et ils s'intéressent alors à la fragmentation possible du domaine (1).

III. ANALYSE LINÉAIRE

Dans le cas limite d'un front plan entre les deux milieux, se propageant à une vitesse constante V , il est possible d'effectuer une analyse linéaire en mode normaux pour trouver les longueurs d'ondes instables [2]. Si V est positif (déplacement du milieu peu visqueux vers le milieu visqueux) toute longueur d'onde plus grande que $\lambda_{\min}$ est instable,

$$\lambda_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{b^2}{12 \mu} \frac{T}{V}} ,$$

avec une longueur d'onde la plus instable $\lambda_c = \sqrt{3} \lambda_{\min}$. Les petites longueurs d'onde sont stabilisées sous l'effet de la tension superficielle.

IV. LES FORMES SIMPLES

a) La géométrie linéaire :

Saffman et Taylor [1] ont été les premiers en 1958 à s'intéresser à cette géométrie linéaire, expérimentalement et théoriquement. Leur cellule expérimentale était un long rectangle où le fluide (1) pénètre à une extrémité et le fluide (2) sort à l'autre. L'avantage de cette géométrie est qu'on trouve expérimentalement une famille de formes stationnaires pour l'interface (C) se propageant à vitesse constante (figure 2). Ces solutions portent maintenant le nom de *doigts de Saffman-Taylor*. Cette famille est entièrement décrite par la

largeur du doigt, qui est une fonction de la vitesse de propagation. A faible vitesse, le doigt est large et sa largeur est proche de celle du canal. A plus forte vitesse, le doigt occupe la moitié de la largeur du canal. Notons déjà qu'à très forte vitesse le doigt redevient instable et qu'il n'existe plus de solution invariante par translation.

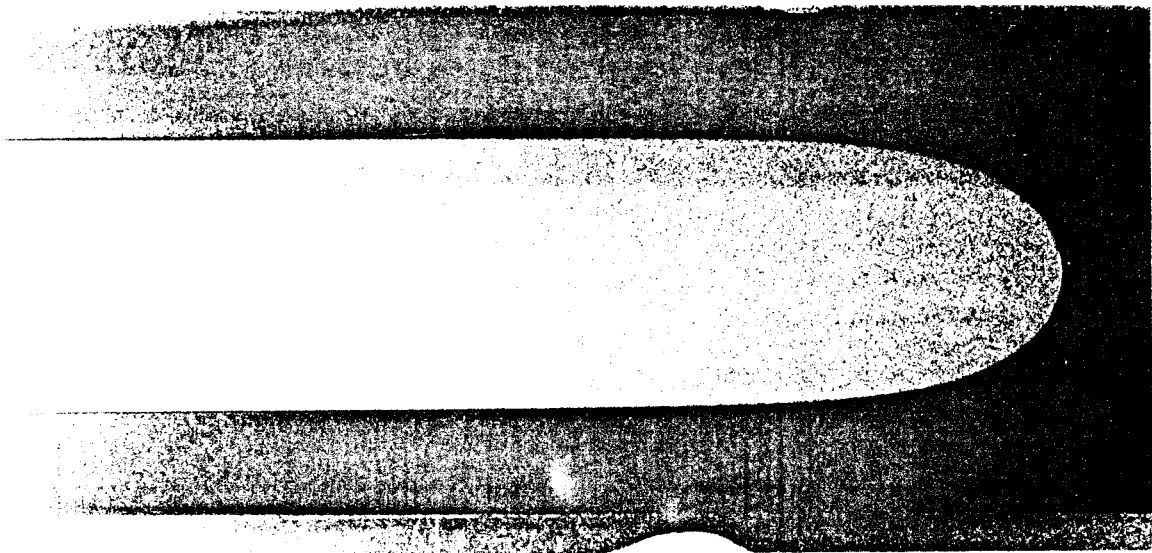


Figure 2 : *Doigt d'air de Saffman-Taylor se propageant de gauche à droite à vitesse constante dans un canal linéaire initialement rempli d'huile.*

En l'absence, toute théorique, de tension superficielle ($T = 0$), il est possible de résoudre le problème par transformation conforme et de trouver la forme des doigts invariants par translation. On obtient alors une famille continue de courbes paramétrée par la largeur relative du doigt. Toutes les valeurs entre 0 et 1 sont possibles, et ce, quelle que soit la vitesse d'avancée [1]. Ce n'est qu'en 1986 [3] que ce problème de la sélection de la largeur du doigt par la vitesse d'avancée a pu être résolu en tenant compte du terme de tension superficielle. Ce terme, bien que petit, ne pouvait pas en effet être correctement traité par une méthode de perturbation, et son effet transcendentement petit a conduit à une condition de solvabilité pour que le doigt soit dérivable à la pointe. Cette condition est en bon accord avec la sélection expérimentale de la largeur du doigt par sa vitesse d'avancée.

b) Les cellules angulaires :

En 1989 [4] nous avons montré expérimentalement que d'autres solutions simples, auto-similaires, pouvaient exister dans des cellules angulaires (canaux aux parois non parallèles, convergentes ou divergentes) (figure 3).

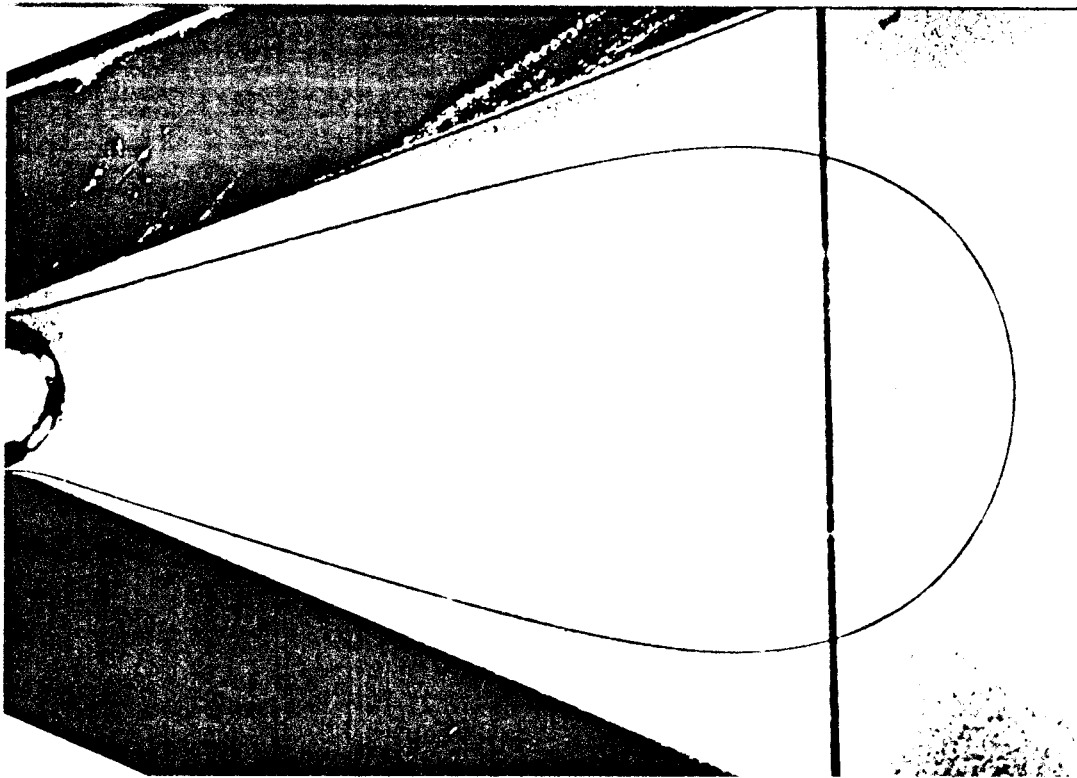


Figure 3 : *Exemple de doigt d'air auto-similaire se propageant dans une cellule divergente d'angle 46° .*

Théoriquement, en l'absence de tension superficielle, ce problème à frontière libre peut se transformer en une équation différentielle non-linéaire de Ricatti. Une famille de fonctions hypergéométriques, solutions pour chaque angle de la cellule, a ainsi pu être trouvée [5]. Le problème de la sélection par la tension superficielle a lui aussi été résolu, numériquement puis analytiquement [6].

V. LES FORMES COMPLEXES

a) Géométrie circulaire :

Dans une géométrie circulaire où l'air est injecté au centre, et dans la limite des très grandes vitesses et/ou des très grandes cellules expérimentales, le front est très instable et peut devenir complexe et tortueux (figure 4). Il existe toutefois une limite inférieure fixe au rayon de courbure de l'interface, qui est de l'ordre de λ_c , la longueur d'onde la plus instable de l'analyse linéaire. La complexité apparaît donc au fur et à mesure du développement de la surface du domaine (1). Les formes obtenues ont des propriétés fractales [7] et peuvent être comparées aux modèles *d'agrégation limitée par la diffusion* (DLA) de Witten et Sander [8].

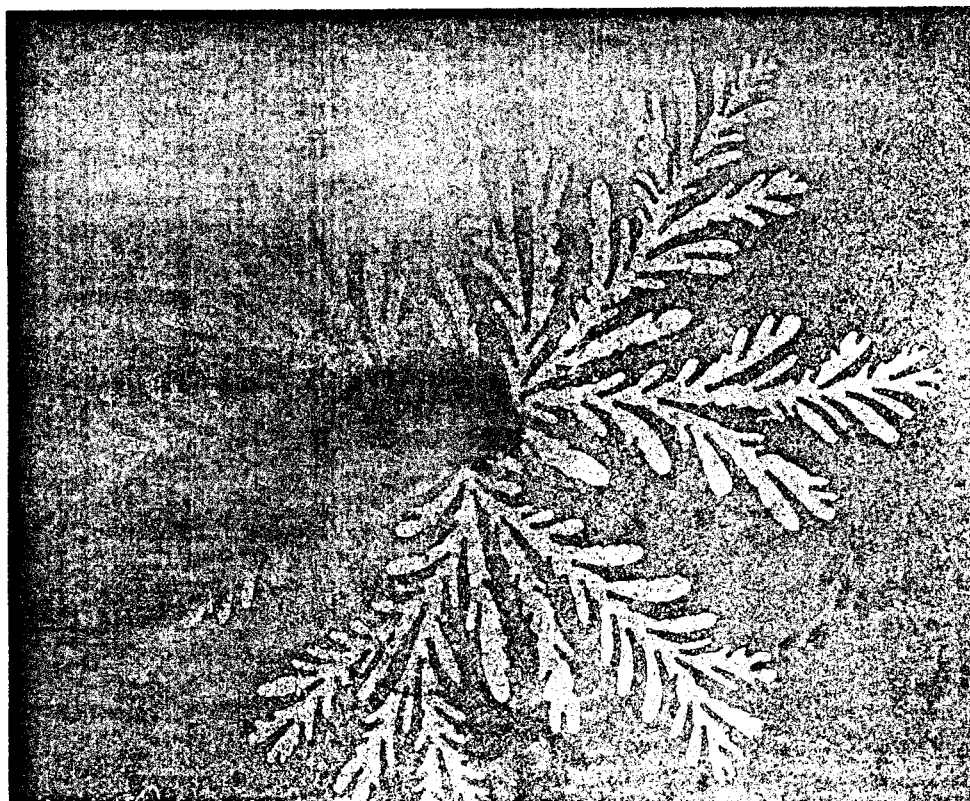


Figure 4 : Photographie de l'interface en géométrie circulaire. Seules les parties externes et convexes continuent à croître. Les autres parties de la courbe (C) sont écrantées comme en électrostatique, et elles sont donc pratiquement immobiles.

b) Les cellules linéaires ou angulaires :

De telles structures complexes peuvent aussi être obtenues pour de très fortes valeurs des vitesses d'avancées, en géométrie linéaire ou en géométrie angulaire (figure 5). Cette seconde déstabilisation du front courbe peut se comprendre dans les termes de l'analyse de la stabilité des fronts de flamme développée par Zel'dovich *et al.* [9]. En effet, dans le repère où le doigt est immobile, les perturbations et le bruit existants à l'avant du front sont advectés vers l'aval par l'écoulement. A faible vitesse, la croissance de ces perturbations est plus lente que leur advection et elles sont donc entraînées à l'infini avant d'avoir été amplifiées. Ce n'est plus le cas à haute vitesse, et le front latéral du doigt se déforme, de plus en plus tôt au fur et à mesure que la vitesse augmente.

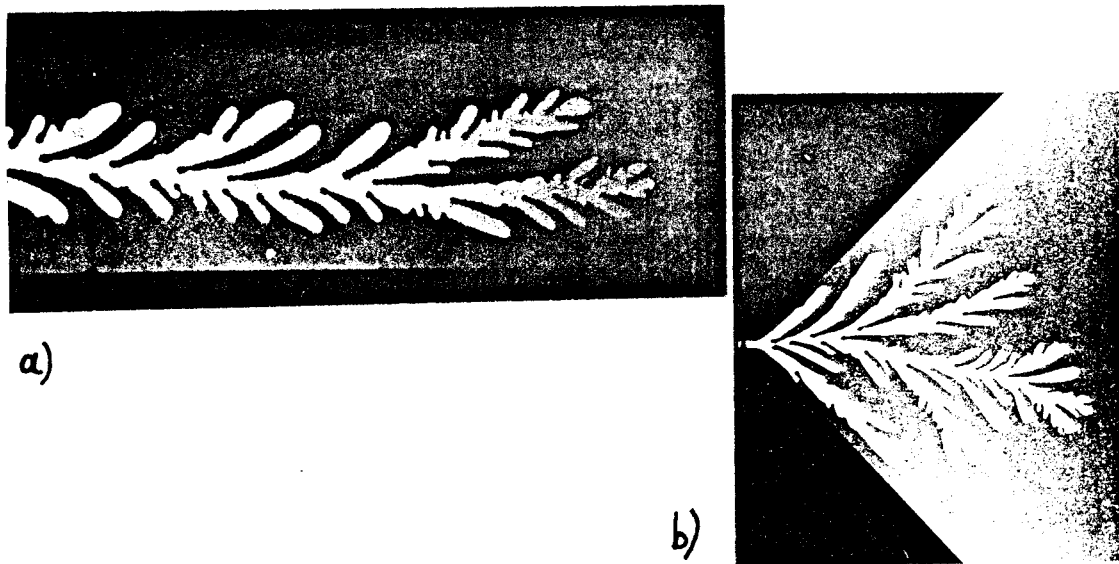


Figure 5 : Doigt d'air instable obtenu à haut débit d'injection (a) dans une cellule linéaire (b) dans une cellule divergente à 90° .

Dans ces deux derniers cas, nous avons montré qu'en mesurant une statistique d'occupation de la cellule sur un grand nombre de réalisations de la même expérience, il était possible de mettre en évidence la forme asymptotique sous-jacente des doigts stables de Saffman et Taylor [10]. Le même résultat a été obtenu pour le modèle DLA. Une approche théorique de type champ moyen, légèrement modifiée, a permis de retrouver ces résultats [11].

VI. QUELQUES VARIANTES DU PROBLÈME

a) Les dendrites, ou l'effet d'anisotropie de la tension superficielle :

Les cas de la croissance visqueuse (doigts de Saffman et Taylor) et de la croissance cristalline (dendrites) sont en fait très proches. En rajoutant une légère anisotropie de la tension superficielle dans les expériences de Saffman et Taylor [12] nous avons en effet retrouvé des formes et des lois de sélection de la taille par la vitesse d'avancée tout à fait comparables à ce qui est obtenu pour la croissance dendritique [13] (figure 6).

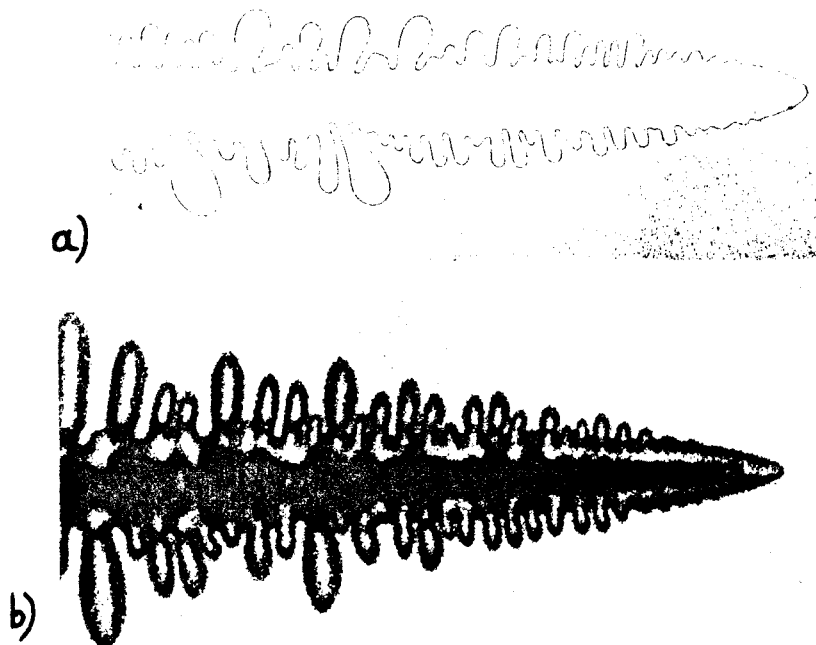


Figure 6 : Doigt de Saffman Taylor anisotrope (a) et dendrite de bromure d'ammonium (b). L'anisotropie dans le cas visqueux (a) est créée par un fil de nylon tendu au centre et dans l'axe de la cellule. Dans le cas de la dendrite (b), l'anisotropie est simplement causée par la structure microscopique anisotrope du cristal.

b) La géométrie de l'Imprimeur :

Dans ces problèmes d'étude des formes de croissances, une variante importante de l'instabilité de Saffman et Taylor apparaît lorsque les parois horizontales qui confinent les fluides ne sont plus parallèles. Dans la géométrie dite de l'Imprimeur que nous avons

étudiée, l'interface est stationnaire dans le repère du laboratoire, et se sont les parois qui se déplacent (figure 7).

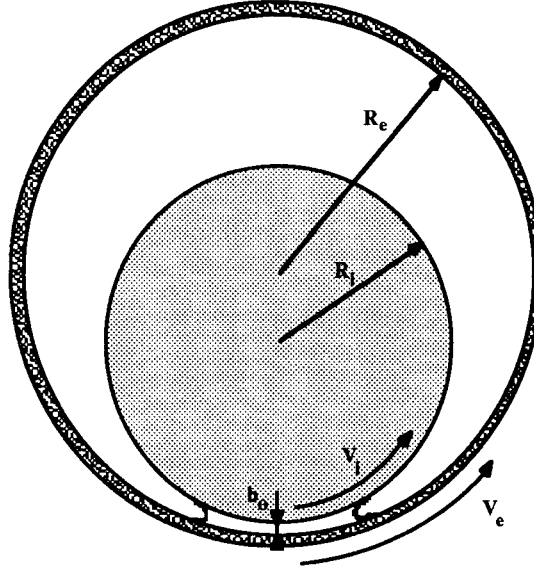


Figure 7 : Schéma du montage de l'imprimeur. Deux cylindres, imbriqués, peuvent tourner indépendamment et induisent un écoulement dans l'huile situé dans le bas du montage. Le domaine entièrement rempli d'huile est limité par deux interfaces dont l'une peut devenir instable.

Le fait maintenant que les parois ne soient pas parallèles, modifie les équations qui gouvernent la forme de l'interface. En effet la perméabilité du milieu dépend maintenant de la position, et la vitesse de l'interface est donc donnée par une loi de Darcy modifiée :

$$\vec{v}_n = \frac{\vec{V}_i + \vec{V}_e}{2} - \frac{b(x)^2}{12 \mu} \nabla P ,$$

tandis que le champ de pression P , satisfait maintenant dans le domaine (2) à une équation qui n'est plus l'équation de Laplace, mais plutôt une équation de diffusion modifiée :

$$\nabla^2 P + \frac{1}{G(x)} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{6 \mu (V_i + V_e)}{b(x)^3} \frac{\partial b(x)}{\partial x} ,$$

Où $G(x)$ est une longueur caractéristique construite avec le gradient d'épaisseur :

$$\frac{1}{G(x)} = \frac{3}{b(x)} \frac{\partial b(x)}{\partial x}.$$

Les conditions aux limites étant, elles, inchangées.

Dans ce cas expérimental, la forme du front peut être soit une droite (à basse vitesse) soit une structure cellulaire périodique formée d'un ensemble de doigts de Saffman-Taylor [14] (figure 8). Cet ensemble peut être régulier et stationnaire si V_i ou V_e sont nuls. Le problème de la sélection de la longueur d'onde dans cette géométrie est encore non résolu [15]. Lorsque V_i et V_e sont simultanément non nuls, l'interface présente une grande richesse de modes dynamiques : régimes propagatifs [16], structures localisées, et une transition au chaos par intermittence spatio-temporelle [17].

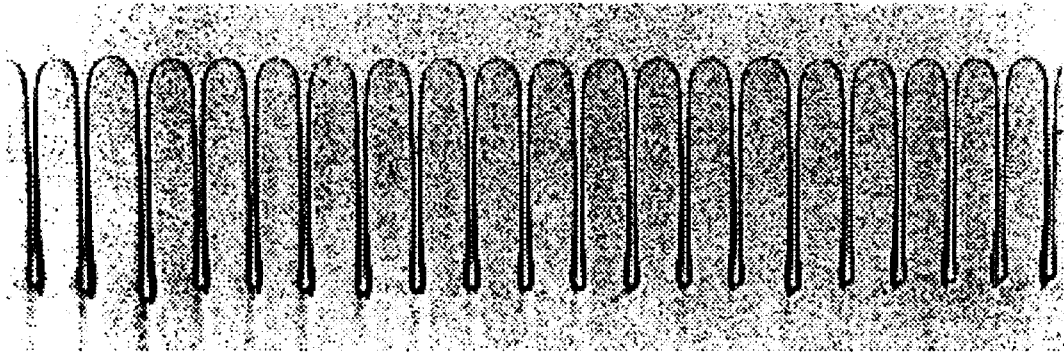


Figure 8 : *Interface air-huile dans la géométrie de l'Imprimeur, loin au dessus du seuil lorsqu'un seul des deux cylindres tourne.*

VII. CONCLUSION

Les images d'instabilités interfaciales présentées ici, illustrent la grande richesse des problèmes à frontière libre, même à deux dimensions. Mais notre compréhension de l'existence, de la stabilité ou de la dynamique des formes obtenues est encore incomplète.

Remerciements : Ces expériences ont été réalisées en collaboration avec Y. Couder, H. Thomé et S. Michalland.

RÉFÉRENCES

- [1] P. G. Saffman et G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London , Ser. A, **245**, 312 (1958).
- [2] R. L. Chuoke, P. Van Meurs et C. Van der Pol, Tr . AIME **216**, 188 (1959).
- [3] B. Shraiman, Phys. Rev. Lett. **56**, 2028 (1986) ; D. C. Hong et J. Langer, Phys. Rev. Lett. **56**, 2032 (1986) ; R. Combescot, T. Dombre, V. Hakim, Y. Pomeau et A. Pumir, Phys. Rev. Lett. **56**, 2036 (1986) et Phys. Rev. A **37**, 1270 (1988).
- [4] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim et Y. Couder, Phys. Fluids **A1**, 224 (1989).
- [5] M. Ben Amar, Phys. Rev. A. **43**, 5724 (1991) ; Yuhai Tu, Phys. Rev. A. **44**, 1203 (1991).
- [6] E. Brener, D. Kessler, H. Levine et W.-J. Rappel, Europhys. Lett. **13**, 161 (1990) ; M. Ben Amar, Phys. Rev. A. **44**, 3673 (1991).
- [7] Y. Couder, dans Random Fluctuations and Pattern Growth, édité par E. Stanley et N. Ostrowsky, Kluwer Academic Press (1988).
- [8] T. Witten et L. M. Sander, Phys. Rev. Lett. **47**, 1400 (1981) et Phys. Rev. B **27**, 5686 (1983).
- [9] Ya. B. Zel'dovich, A. G. Istratov, N. I. Kidin et V. B. Librovich, Combust. Science Technol. **24**, 1 (1980) ; P. Pelcé, *Dynamics of Curved Fronts* (Academic Press, Orlando, 1988).
- [10] A. Arnéodo, Y. Couder, G. Grasseau, V. Hakim et M. Rabaud, Phys. Rev. Lett. **63**, 984 (1989).
- [11] E. Brener, H. Levine et Yuhai Tu, Phys. Rev. Lett. **66**, 1978 (1991).
- [12] M. Rabaud, Y. Couder et N. Gerard, Phys. Rev. A **37**, 935 (1988).
- [13] J. Maurer, P. Bouissou, B. Perrin et P. Tabeling, Europhys. Lett. **6**, 67 (1989).
- [14] M. Rabaud, S. Michalland et Y. Couder, Phys. Rev. Lett. **64**, 184 (1990) ; M. Rabaud et V. Hakim, dans *Instabilities and Nonequilibrium Structures III*, p. 217, éditeurs E. Tirapegui et W. Zeller, Kluwer Academic Press (1991).
- [15] M. Rabaud, Y. Couder et S. Michalland, Eur. J. Mech., B/Fluids **10**, 253 (1991) ; L. Fourtune, W.-J. Rappel et M. Rabaud, *Phase Dynamics Near a Parity Breaking Instability*, preprint 1993.
- [16] H.Z. Cummins, L. Fourtune et M. Rabaud, Phys. Rev. E **47**, 1727 (1993).
- [17] S. Michalland, M. Rabaud, et Y. Couder, Europhys. Letters **22**, 17 (1993).

