

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

PIERRE PANSU

Compacité de l'espace des métriques d'Einstein en dimension 4 d'après M. Anderson et al.

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 43
« Conférences de A. Aspect, B. Carter, R. Coquereaux, G.W. Gibbons, Ch. Kassel, Y. Kosman-Schwarzbach, S. Majid, G. Maltsiniotis, P. Pansu, G.A. Vilkovisky, Z. Wojtkowiak », , exp. n° 2, p. 27-34

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__43__27_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Compacité de l'espace des métriques d'Einstein en dimension 4 d'après M. Anderson et al.

Pierre Pansu

U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau
pansu@cmap.polytechnique.fr

U.R.A. 1169 du C.N.R.S.
Mathématiques
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay
pansu@matups.matups.fr

Je tente de rendre compte des progrès obtenus récemment par plusieurs auteurs - L.Z. GAO, M. ANDERSON, H. NAKAJIMA, et j'en oublie - dans la compréhension des équations d'Einstein *riemanniennes*.

Ils se posent le problème suivant : quelles sont les limites possibles de suites de variétés riemanniennes d'Einstein. Autrement dit, il s'agit de compactifier l'espace des variétés d'Einstein.

Si le phénomène d'effondrement, sous-jacent à la compactification connue en dimension 2, est toujours présent, il s'y ajoute en dimension 4 un nouveau phénomène, modelé sur l'écrasement de courbes dans les surfaces complexes. Alors que l'effondrement ne correspond pas à l'apparition de singularités - si ce n'est "à l'infini" - l'écrasement produit à la limite une orbifold d'Einstein.

Les résultats sont obtenus en transportant dans le cadre "gravitationnel" les idées et techniques qui ont émergé de l'étude des connexions autoduales. On retrouve, à l'exception des conséquences topologiques, les caractéristiques qui font la richesse de ce sujet :

- grand choix de solutions explicites - notamment les instantons gravitationnels de Eguchi-Hanson qui constituent un modèle local de l'écrasement riemannien - obtenus au moyen de la transformation de Penrose ;
- le cas "intégrable" des variétés complexes - c'est l'objet de la conjecture de Calabi ;
- l'intervention des classes caractéristiques - seule la caractéristique d'Euler a joué un rôle jusqu'à présent, mais il y a beaucoup à attendre de la signature ;
- un principe de superposition - possibilité d'effectuer des chirurgies sur les variétés d'Einstein - qui n'a été mis en évidence pour l'instant que dans le cadre kählérien.

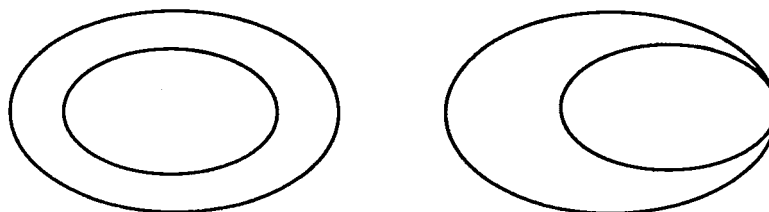
1 EFFONDREMENT ET COMPACTIFICATION DE L'ESPACE DES MODULES DES COURBES

Décidons qu'une variété riemannienne de dimension 2 est d'Einstein si sa courbure est constante. En dimension 2, on a un dictionnaire entre variétés complexes compactes de dimension 1 et surfaces riemanniennes orientées à courbure constante : chaque variété complexe compacte de dimension 1 admet des métriques hermitiennes de courbure constante et celles-ci sont deux à deux proportionnelles. L'espace des variétés d'Einstein compactes orientées de dimension 2 est donc le produit d'une droite réelle par l'espace des modules des courbes compactes (tous genres confondus), noté

$$\mathcal{M} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{M}_g.$$

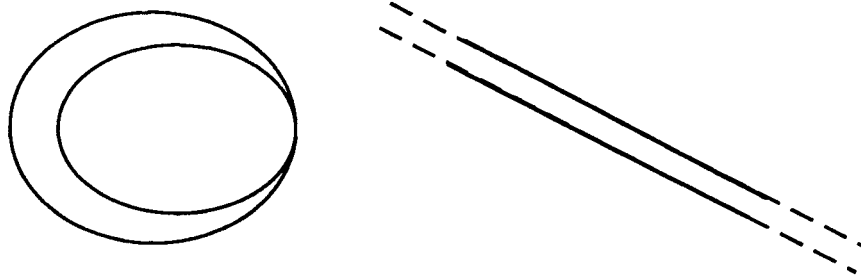
P. DELIGNE et D. MUMFORD ont décrit une compactification de \mathcal{M}_g où le phénomène essentiel est l'apparition d'un point double ou *noeud*. Pour l'espace des métriques, la présence du paramètre supplémentaire (changement d'échelle) fait que l'apparition d'un noeud donne lieu à plusieurs interprétations différentes. En effet, on peut choisir de normaliser les métriques riemannienne en demandant que la courbure, ou le diamètre, ou l'aire, reste constant.

Choisissons de fixer l'aire des surfaces. En genre zéro, l'espace des modules \mathcal{M}_0 est réduit à un point, donc il y a compacité.



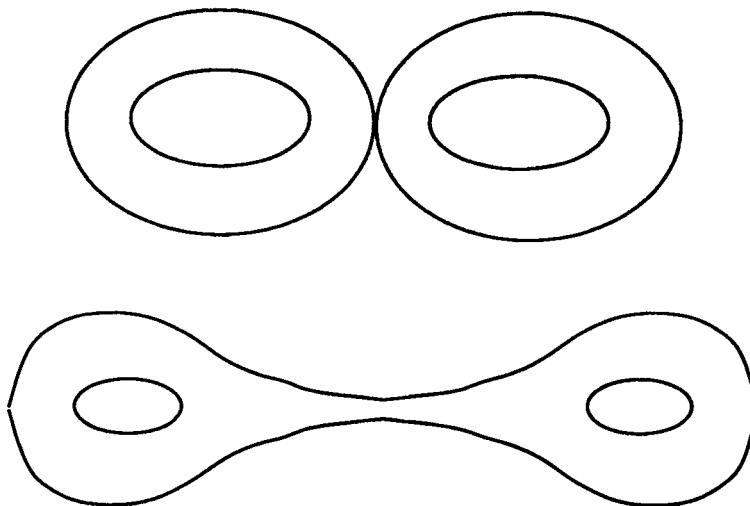
Apparition d'un noeud

En genre 1 l'apparition d'un noeud correspond à un tore plat qui converge vers une droite.



Apparition d'un noeud en genre 1, aire fixée

En genre supérieur à 1, on voit une surface compacte se scinder en une ou plusieurs surfaces complètes non compactes et d'aire finie.



Apparition d'un noeud en genre > 1 , aire fixée

Dans les deux derniers cas, la non compacité s'accompagne d'un phénomène local appelé *effondrement* (collapsing). Le cycle évanescent peut être représenté par une géodésique dont la longueur tend vers zéro, alors que la courbure reste bornée. Un voisinage de largeur de plus en plus grande de la géodésique évanescence converge vers une droite. Une particularité de l'effondrement est que, à aire fixée, le diamètre ne peut rester borné.

2 MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN

Le dictionnaire variétés complexes \leftrightarrow métriques d'Einstein a une généralisation partielle en dimension supérieure : la théorie des métriques de Kähler-Einstein. Partielle car elle ne concerne pas toutes les variétés complexes.

D'abord, le simple fait de posséder une métrique kählérienne est restrictif. Mais il y a d'autres conditions.

Pour une métrique kählérienne, la contraction de la structure complexe avec la métrique (resp. la courbure de Ricci) produit deux formes fermées de type $(1, 1)$ notées ω , et ρ . La classe de cohomologie de $\frac{1}{2\pi}\rho$ est la première classe de Chern du fibré tangent, celle de ω en revanche dépend de la métrique. La condition d'Einstein est que ρ soit colinéaire à ω . L'existence d'une métrique de Kähler-Einstein sur une variété complexe a donc une conséquence cohomologique : la première classe de Chern peut-être représentée par une forme de type $(1, 1)$ définie positive (resp. nulle, resp. définie négative). On note cette propriété $c_1 > 0$ (resp. $c_1 = 0$, resp. $c_1 < 0$).

Cette condition sur la structure complexe, vide en dimension 1, est très restrictive en dimensions supérieures. Par exemple, les surfaces à $c_1 > 0$ forment une petite famille, finie à déformation près.

Dans ce cadre restreint, la correspondance prend la forme suivante.

Une variété compacte à $c_1 < 0$ admet une métrique de Kähler-Einstein, unique à une constante multiplicative près, i.e., le paramètre supplémentaire est un réel positif (T. AUBIN, S.T. YAU).

Une variété compacte à $c_1 = 0$ admet une métrique de Kähler-Einstein unique dans chaque classe de Kähler, i.e., le paramètre supplémentaire est une classe de cohomologie dans le cône de Kähler, i.e., le cône convexe ouvert de $H_{\mathbf{R}}^{1,1}$ formé des classes représentables par des formes définies positives (S.T. YAU).

Dans le cas où $c_1 > 0$, il y a encore d'autres conditions nécessaires. La condition nécessaire et suffisante est connue en dimension 2 (voir [TY]). Lorsqu'elle existe la métrique de Kähler-Einstein est unique à homothétie près (S. BANDO - T. MABUCHI, voir par exemple [B]).

Il n'est pas clair si une variété compacte peut admettre simultanément une métrique de Kähler-Einstein et une métrique d'Einstein qui n'est kählérienne pour aucune structure complexe. De toute façon, les résultats ci-dessus fournissent des familles continues de variétés d'Einstein, pour lesquelles le problème de décrire les limites possibles se pose. On peut ranger les causes de non compacité en 3 catégories :

1. non compacité de l'espace des structures complexes ;
2. dans le cas où $c_1 > 0$, non fermeture de la condition $c_1 > 0$;
3. dans le cas où $c_1 = 0$, non fermeture du cône de Kähler.

Dans les cas 2 et 3, on s'attend à voir des 2-cycles analytiques dont le volume tend vers 0 alors qu'ailleurs, la métrique converge. Cela se produit-il vraiment ? Oui, il existe à la fois un modèle local explicite, dû à Eguchi et Hanson, et des exemples globaux, les surfaces de Kummer.

3 LES MÉTRIQUES D'EGUCHI-HANSON

On part du quotient $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_2$ où \mathbf{Z}_2 agit par $z \rightarrow -z$. C'est un espace analytique, isomorphe au cône quadratique dans \mathbf{C}^3 . Sa résolution s'obtient par un éclatement : c'est l'espace total du fibré en droites de degré 2 sur \mathbf{P}^1 , i.e., $T\mathbf{P}^1$. Tout ceci est équivariant sous $U(2)$. Il existe [EH] une famille à un paramètre de métriques de Kähler-Einstein selfduales à courbure de Ricci nulle, $U(2)$ -invariantes, sur $T\mathbf{P}^1$, notées M_t . Le paramètre réel, c'est le volume du diviseur exceptionnel (la section nulle). Lorsqu'il tend vers 0, M_t converge vers le quotient de l'espace euclidien \mathbf{C}^2 par \mathbf{Z}_2 . En fait, à l'infini, toutes les M_t sont asymptotiquement localement euclidiennes (ALE), modelées sur $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_2$.

Ce modèle local est effectivement présent dans des dégénérescences de variétés de Kähler-Einstein compactes, de volume fixé et de diamètre borné, comme l'ont montré R. KOBAYASHI et A. TODOROV, [KT].

On part de $T^4 = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^4$. L'automorphisme $\tau : z \rightarrow -z$ a 16 points fixes. La résolution du quotient T^4/τ est une surface K3 dite *surface de Kummer* qui possède 16 courbes rationnelles exceptionnelles. Sa première classe de Chern est nulle. En relevant la métrique plate de T^4/τ , on obtient une classe de $H_{\mathbf{R}}^{1,1}$ nulle sur les courbes exceptionnelles, mais qui se trouve sur le bord du cône de Kähler. En fait, comme les 16 volumes des courbes exceptionnelles s'ajoutent aux 4 paramètres de la métrique plate sur l'orbifold T^4/τ pour donner

$$20 = \dim H_{\mathbf{R}}^{1,1},$$

les classes de Kähler voisines sont toutes obtenues par "éclatement" d'une orbifold plate. R. Kobayashi et A. Todorov montrent que les métriques de Kähler-Einstein sont aussi obtenues par "éclatement", en greffant sur l'orbifold plate une copie de l'une des variétés M_t d'Eguchi-Hanson pour chaque point singulier. Il s'agit d'une description précise du phénomène 3.

Cette idée de greffe rappelle la construction par C. TAUBES d'instantons sur une somme connexe. On verra plus loin que la théorie des variétés d'Einstein présente des analogies profondes avec celle des instantons.

4 LES THÉORÈMES DE COMPACITÉ

Dans une variété riemannienne, on appelle *2-systole* le plus petit volume d'un cycle de dimension 2 non nul en homologie.

4.1 THÉORÈME (L.Z. Gao, M. Anderson).— Pour $\lambda \in \{+1, 0, -1\}$, $v > 0$, $D < +\infty$, $B < +\infty$, soit $\mathcal{E}_{4,v,D}^\lambda$ l'espace des variétés d'Einstein de dimension 4 telles que $\text{Ricci}_g = \lambda g$, de volume au moins v , de diamètre au plus D , de second nombre de Betti au plus B . Sur $\mathcal{E}_{4,v,D}^\lambda$, le rayon d'injectivité (L.Z. GAO, [G]) la 2-systole (M. ANDERSON, [A]) sont des fonctions d'exhaustion.

Autrement dit, à aire et diamètre bornés, il y a compacité à moins qu'un 2-cycle ne s'écrase. Que se passe-t'il si on enlève la borne inférieure sur la systole ? Il y a convergence vers une orbifold d'Einstein.

4.2 DÉFINITION.—

Un orbifold d'Einstein est un espace métrique dans lequel tout point a un voisinage isométrique au quotient par un groupe fini d'isométries d'une variété d'Einstein. En incluant les orbifolds d'Einstein, on obtient un espace des modules étendu $\overline{\mathcal{E}}_{4,v,D}^\lambda$. On le munit de la distance dite de *Hausdorff-Gromov*.

4.3 THÉORÈME (M. Anderson [A], H. Nakajima).— *L'espace $\overline{\mathcal{E}}_{4,v,D}^\lambda$ est compact.*

4.4 REMARQUE.—

Lorsque $\lambda = +1$, la borne sur le diamètre est automatique (S.B. MYERS).

Dans une composante connexe de $\mathcal{E}_{4,v,D}^\lambda$, $\lambda \neq 0$, le volume et le second nombre de Betti sont constants. Par conséquent, dans ce cas, sans aucune borne (autre que la normalisation par la courbure de Ricci) on obtient une compactification de l'espace des modules par des orbifolds.

4.5 EXEMPLES.—

1. Un espace $\mathcal{E}_{4,v,D}^\lambda$, $\lambda = +1$, non compact (G. TIAN, S.T. YAU, [TY]).

Soit M la variété obtenue en éclatant 8 points sur \mathbf{CP}^2 . Génériquement, cette variété a une première classe de Chern positive, et il existe une unique métrique de Kähler-Einstein. Quand on quitte le cas générique, le phénomène 2 se produit. Par exemple, trois points viennent à être alignés. Alors c_1 vient s'annuler sur la droite joignant ces trois points, qui a une auto-intersection -2 . A la limite, on obtient une métrique de Kähler-Einstein sur l'écrasement de cette droite, variété qui présente un point double ordinaire.

2. L'espace des modules des surfaces K3 hyperkählériennes (A.L. BESSE).

A travers une "application des périodes", il s'identifie à un ouvert de l'orbifold non compacte

$$X = \Gamma \backslash SO(3,19)/SO(3) \times SO(19),$$

où Γ est le groupe d'automorphismes de la forme d'intersection de la surface K3, $H \oplus H \oplus H \oplus E_8 \oplus E_8$. Le complémentaire est une réunion dénombrable de sous-variétés de codimension 3. Chacune de ces sous-variétés correspond à une racine, i.e., une classe entière dans H_2 de carré -2 , sur laquelle la classe de Kähler vient à s'annuler (phénomène 3).

L'espace des modules étendu $\overline{\mathcal{E}}$ s'identifie à X . Comme les réflexions associées aux racines engendrent Γ , les orbifolds d'Einstein sont des points singuliers de l'orbifold X , mais constituent seulement une petite partie de ce lieu singulier. Autrement dit, rien ne distingue vraiment les orbifolds des honnêtes K3 dans l'espace X .

En revanche, lorsqu'on va à l'infini dans $\overline{\mathcal{E}}$, la structure complexe va à l'infini, c'est le phénomène 1. Métriquement, il se passe une sorte d'effondrement où 3 paramètres réels (les systoles d'un tore T^4 ?) prédominent.

5 PREUVE DU THÉORÈME DE COMPACITÉ

Elle suit de près le déroulement de la preuve du théorème de compacité de K. Uhlenbeck pour les connexions autoduales.

5.1 ETAPE 1.-

Compacité en présence d'une borne uniforme sur la courbure.

Pour les connexions, il s'agit de la construction - élémentaire - de la "jauge exponentielle". Ici, on a recours au théorème de compacité de J. CHEEGER-M. GROMOV : *toute suite de variétés riemanniennes à diamètre borné, volume borné inférieurement et courbure sectionnelle bornée admet une sous-suite convergente.*

5.2 ETAPE 2.-

En dimension 4, pour une variété d'Einstein, la norme L^2 de la courbure est contrôlée par un invariant topologique.

En effet, on a en général

$$2 + b_2 \geq \chi \geq \frac{1}{8\pi^2} \int |R|^2 + |Scal|^2 - 4|Ricci_0|^2$$

où $Ricci_0$, la partie sans trace de la courbure de Ricci, s'annule exactement lorsque la métrique est d'Einstein.

5.3 ETAPE 3.-

Pour une variété d'Einstein, le tenseur de courbure est harmonique. Par conséquent, si $\|R\|_2^2$ est assez petit, il contrôle la norme uniforme de la courbure.

Le point nouveau par rapport au cas des connexions est que la métrique sur la base est *variable*. Il est essentiel de contrôler la constante dans l'inégalité de Sobolev en fonction des seules informations disponibles : courbure de Ricci, diamètre, volume. Les théorèmes indispensables ici sont dus à C. CROKE et à S. GALLOT.

L'intégrale $\|R\|_2^2$ est invariante conforme. Par conséquent, elle ne peut se concentrer qu'en un nombre fini de points. Ceci explique pourquoi les limites ne présentent que des singularités isolées, mais ne suffit pas à établir que ces singularités sont des quotients (cette dernière propriété est l'analogie du théorème des singularités inessentiels de K. UHLENBECK). Pour cela, on dilate (multiplie la métrique par une grande constante) les petites boules contenant une quantité appréciable d'intégrale de courbure, pour ramener la borne supérieure de la courbure à 1. Les boules dilatées convergent alors vers des variétés riemanniennes N telles que

- (i) N est complète, à courbure de Ricci nulle ;
- (ii) dans N , le volume $v(r)$ d'une boule de rayon r satisfait $v(r) \geq C r^4$;
- (iii) $0 < \int_N |R|^2 < +\infty$;
- (iv) $H_2(N, \mathbf{Z}) \neq 0$.

5.4 LEMME .- *Une variété riemannienne N qui satisfait (i) à (iii) est asymptotiquement localement euclidienne, i.e., hors d'un compact, N est difféomorphe au quotient de \mathbf{R}^4 par un groupe fini d'isométries, et la métrique de N converge vers la métrique euclidienne à l'infini.*

Les variétés Ricci plates asymptotiquement localement euclidiennes sont les analogues “gravitationnels” des instantons de la sphère S^4 . Il devrait être possible de les classifier. C’est ce qu’a fait P. KRONHEIMER [Kr] pour les ALE hyperkähleriens. Dans cette famille, on trouve notamment les “multiinstantons gravitationnels” de G. GIBBONS ET S. HAWKING.

Pour terminer, remarquons que, comme dans le cas des connexions, sous des hypothèses topologiques particulières, on peut exclure la formation de singularités, et obtenir un vrai théorème de compacité.

5.5 COROLLAIRE (M. Anderson).— *Si M est une variété compacte de dimension 4, de caractéristique d’Euler $\chi(M) \leq 3$, alors l’espace des métriques d’Einstein sur M de courbure de Ricci positive, de volume 1 est compact.*

En effet, si des variétés d’Einstein de dimension 4 M_i convergent vers une orbifold X singulière aux points p_j , alors

$$\begin{aligned} \liminf \chi(M_i) &\geq \frac{1}{8\pi^2} \int_{X^{reg}} |R|^2 + \sum_j \int_{ALE(p_j)} |R|^2 \\ &= \chi(X^{reg}) + \sum_j \left(\frac{1}{|\Gamma_j|} + \chi(ALE(p_j)) - \frac{1}{|\Theta_j|} \right), \end{aligned}$$

où \mathbf{R}^4/Γ_j est le cône tangent de X en p_i et \mathbf{R}^4/Θ_j le cône tangent à l’infini de $ALE(p_j)$ (qui n’est pas obligatoirement le même). De plus, tout ALE différent de \mathbf{R}^4 a une caractéristique d’Euler au moins égale à 2 et $|\Theta_j| \geq 2$. Par conséquent, si $\chi(M_i) \leq 3$, il n’y a pas de points singuliers, X est lisse et les variétés M_i convergent C^∞ .

Références

- [A] M. ANDERSON, *Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 455-490.
- [B] A. L. BESSE, *Einstein manifolds*, *Ergebn. Band 10*, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [EH] T. EGUCHI ET A. HANSON, *Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity*, Phys. Lett. B **74** (1978), 249-251.
- [G] L.Z. GAO, *Einstein metrics*, J. Differen. Geom. **32** (1990), 155-184.
- [KT] R. KOBAYASHI ET A. TODOROV, *Polarized period map for generalized K3 surfaces and the moduli of Einstein metrics*, Tohoku Math. J. **39** (1987), 341-363.
- [Kr] P. KRONHEIMER, *The construction of ALE spaces as hyperkähler quotients*, J. Diff. Geom. **29** (1989), 465-483.
- [TY] G. TIAN ET S.T. YAU, *Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $c_1 > 0$* , Comm. Math. Phys. **112** (1987), 175-203.