

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

G. MALTSINIOTIS

**Formes différentielles invariantes à gauche sur le
groupe quantique $GL_{p,q}(2)$**

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 43
« Conférences de A. Aspect, B. Carter, R. Coquereaux, G.W. Gibbons, Ch. Kassel, Y. Kosman-Schwarzbach, S. Majid, G. Maltsiniotis, P. Pansu, G.A. Vilkovisky, Z. Wojtkowiak », , exp. n° 9, p. 163-180

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__43__163_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMES DIFFERENTIELLES INVARIANTES A GAUCHE SUR LE GROUPE QUANTIQUE $GL_{p,q}(2)$

G. MALTSINIOTIS

Le but de cet article est de décrire les formes différentielles invariantes à gauche, sur la déformation quantique à deux paramètres du groupe $GL(2)$, relatives au calcul différentiel introduit dans [Mal1] et redécouvert indépendamment par Manin [Man4]. On en déduit des formules de Maurer-Cartan quantiques et une description de l'algèbre enveloppante de ce groupe quantique. Je tiens à exprimer ma gratitude à P. Cartier qui a grandement influencé ce travail.

(0.0.) On se fixe un anneau commutatif K . On dira module pour K -module, application linéaire pour application K -linéaire et \otimes désignera le produit tensoriel sur K . Les algèbres considérées seront des K -algèbres associatives unifères et les morphismes d'algèbres des morphismes unifères. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'indéterminées, on notera $K\langle (x_i)_{i \in I} \rangle$ l'algèbre des polynômes non commutatifs en les x_i , autrement dit, l'algèbre associative unifère libre engendrée par la famille $(x_i)_{i \in I}$.

(0.1.) Bigèbres différentielles graduées. On rappelle qu'une *bigèbre* est un triplet (B, Δ, ε) , où B désigne une algèbre et

$$\Delta : B \rightarrow B \otimes B \quad \text{et} \quad \varepsilon : B \rightarrow K$$

des morphismes d'algèbres, appelés respectivement *coproduit* et *coûnité*, satisfaisant aux relations

$$(\Delta \otimes 1_B)\Delta = (1_B \otimes \Delta)\Delta \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes 1_B)\Delta = 1_B = (1_B \otimes \varepsilon)\Delta \quad .$$

On appelle *antipode* d'une bigèbre (B, Δ, ε) une application linéaire $I : B \rightarrow B$ telle que

$$\mu(I \otimes 1_B)\Delta = \eta\varepsilon = \mu(1_B \otimes I)\Delta \quad ,$$

où μ (resp. η) désigne l'application linéaire $\mu : B \otimes B \rightarrow B$ (resp. $\eta : K \rightarrow B$) définie par la multiplication (resp. l'unité)

$$\mu(a \otimes b) = ab \quad , \quad a, b \in B \quad \text{et} \quad \eta(\lambda) = \lambda \cdot 1 \quad , \quad \lambda \in K \quad .$$

Un antipode d'une bigèbre, s'il existe, est unique et est un antihomomorphisme de bigèbres :

$$I(ab) = I(b)I(a) \quad , \quad a, b \in B \quad , \quad I(1) = 1$$

et

$$I\Delta = \sigma\Delta I \quad \text{et} \quad \varepsilon I = \varepsilon \quad ,$$

où $\sigma : B \otimes B \rightarrow B \otimes B$ désigne l'application linéaire définie par $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$. On appelle *bigèbre de Hopf* une bigèbre munie d'un antipode.

Une *algèbre différentielle graduée* est un couple (Ω, d) formé d'une algèbre graduée par \mathbb{N}

$$\Omega = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \Omega^m \quad , \quad \Omega^m \Omega^n \subset \Omega^{m+n} \quad ,$$

et d'une application linéaire homogène de degré 1

$$d : \Omega \rightarrow \Omega \quad , \quad d = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} d_m \quad , \quad d_m : \Omega^m \rightarrow \Omega^{m+1} \quad ,$$

satisfaisant aux conditions :

- i) $d(ab) = d(a)b + (-1)^m a d(b)$, $a \in \Omega^m$, $b \in \Omega$;
- ii) $d^2 = 0$.

Un morphisme d'une algèbre différentielle graduée (Ω, d) dans une autre (Ω', d') est une application linéaire homogène de degré 0

$$u : \Omega \rightarrow \Omega' \quad , \quad u = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} u_m \quad , \quad u_m : \Omega^m \rightarrow \Omega'^m$$

telle que $u d = d' u$. Si (Ω', d') et (Ω'', d'') désignent deux algèbres différentielles graduées, leur produit tensoriel (Ω, d) est défini comme suit. Comme module $\Omega = \Omega' \otimes \Omega''$. La graduation de Ω est définie par

$$\Omega^m = \bigoplus_{m_1+m_2=m} \Omega'^{m_1} \otimes \Omega''^{m_2} \quad ,$$

la multiplication est définie par

$$(a' \otimes a'')(b' \otimes b'') = (-1)^{mn} a' b' \otimes a'' b'' \quad , \quad a' \in \Omega' \quad , \quad b' \in \Omega'^m \quad , \quad a'' \in \Omega''^n \quad , \quad b'' \in \Omega''^n$$

et la différentielle par

$$d(a' \otimes a'') = d' a' \otimes a'' + (-1)^m a' \otimes d'' a'' \quad , \quad a' \in \Omega'^m \quad , \quad a'' \in \Omega''^n \quad .$$

On dira souvent, par abus de langage, que Ω est une algèbre différentielle graduée (sans préciser la différentielle) et on notera $\Omega' \otimes \Omega''$ le produit tensoriel de deux algèbres différentielles graduées Ω' et Ω'' . Une *bigèbre différentielle graduée* est un quadruplet $(\Omega, d, \Delta, \varepsilon)$, où (Ω, d) est une algèbre différentielle graduée et

$$\Delta : \Omega \rightarrow \Omega \otimes \Omega \quad \text{et} \quad \varepsilon : \Omega \rightarrow K$$

sont des morphismes d'algèbres différentielles graduées (K étant muni de la structure triviale d'algèbre différentielle graduée), appelés respectivement *coproduit* et *coûnité*, satisfaisant aux relations

$$(\Delta \otimes 1_\Omega)\Delta = (1_\Omega \otimes \Delta)\Delta \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes 1_\Omega)\Delta = 1_\Omega = (1_\Omega \otimes \varepsilon)\Delta \quad .$$

On se gardera de croire que $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ soit alors en général une bigèbre ordinaire (en effet, les algèbres $\Omega \otimes \Omega$ et $\Omega^g \otimes \Omega$ sont en général non isomorphes). Le triplet $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ est en fait ce qu'on appelle une *bigèbre graduée gauche*. On appelle *antipode* d'une bigèbre différentielle graduée $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ une application linéaire $I : \Omega \rightarrow \Omega$ telle que $dI = I d$ et

$$\mu(I \otimes 1_\Omega)\Delta = \eta\varepsilon = \mu(1_\Omega \otimes I)\Delta \quad ,$$

où μ (resp. η) désigne l'application linéaire $\mu : \Omega \otimes \Omega \rightarrow \Omega$ (resp. $\eta : K \rightarrow \Omega$) définie par la multiplication (resp. l'unité) de Ω . Un antipode d'une bigèbre différentielle graduée, s'il existe, est unique et est un antihomomorphisme de bigèbres différentielles graduées :

$$I(ab) = (-1)^{mn} I(b)I(a) \quad , \quad a \in \Omega^m, b \in \Omega^n \quad , \quad I(1) = 1$$

$$I\Delta = \sigma\Delta I \quad \text{et} \quad \varepsilon I = \varepsilon \quad ,$$

où $\sigma : \Omega^g \otimes \Omega \rightarrow \Omega^g \otimes \Omega$ désigne l'application linéaire définie par

$$\sigma(a \otimes b) = (-1)^{mn} b \otimes a \quad , \quad a \in \Omega^m, b \in \Omega^n \quad .$$

On appelle *bigèbre différentielle graduée de Hopf* une bigèbre différentielle graduée munie d'un antipode.

(1.1.) La déformation quantique à deux paramètres de l'algèbre des fonctions sur l'espace affine des matrices 2×2 . Soient a, b, c et d des indéterminées. L'algèbre des polynômes non commutatifs $M = K\langle a, b, c, d \rangle$ possède une structure de bigèbre, le coproduit Δ (resp. la coûnité ε) étant défini par

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c \quad ,$$

$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d \quad ,$$

$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c \quad ,$$

$$\Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d \quad ,$$

$$(\text{resp.} \quad \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \quad) \quad .$$

Soient p, q des éléments inversibles de K et $J_{p,q}$ l'idéal bilatère de M engendré par les générateurs

- (1) $ba - pab \quad ,$
- (2) $dc - pcd \quad ,$
- (3) $ca - qac \quad ,$
- (4) $db - qbd \quad ,$
- (5) $cb - p^{-1}qbc \quad ,$
- (6) $da - ad - (q - p^{-1})bc \quad .$

On vérifie facilement que $J_{p,q}$ est aussi un coïdéal de M :

$$\Delta(J_{p,q}) \subset J_{p,q} \otimes M + M \otimes J_{p,q} \quad ,$$

ce qui implique que si l'on pose

$$M_{p,q} = M/J_{p,q} \quad ,$$

alors l'algèbre $M_{p,q}$ est munie d'une structure de bigèbre, obtenue par passage au quotient de celle de M ([AST], [Mal1], [Su]). Par abus de notation, on notera également a, b, c et d les images de a, b, c et d dans $M_{p,q}$ et Δ (resp. ε) le coproduit (resp. la coïunité) de $M_{p,q}$. En utilisant le lemme de Bergman, le "diamond lemma" ([Be]), on démontre que la famille

$$(a^m b^n c^r d^s)_{m,n,r,s \in \mathbb{N}}$$

est une base du K -module $M_{p,q}$. Si $p = q = 1$, $M_{p,q}$ est l'algèbre des polynômes (commutatifs) sur l'espace affine des matrices carrées d'ordre 2, le coproduit étant celui déduit de la multiplication des matrices. L'algèbre $M_{p,q}$ peut donc être considérée comme une déformation quantique de cette algèbre de polynômes.

(1.2.) Complexe bicovariant des différentielles sur $M_{p,q}$. Soient α, β, γ et δ de nouvelles indéterminées. L'algèbre des polynômes non commutatifs

$$\Omega = K\langle a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle \quad ,$$

graduée par le degré total en α, β, γ et δ , possède une structure d'algèbre différentielle graduée définie par l'unique antidérivation K -linéaire $d : \Omega \rightarrow \Omega$ de carré nul telle que

$$da = \alpha \quad , \quad db = \beta \quad , \quad dc = \gamma \quad , \quad dd = \delta \quad .$$

Par exemple,

$$d(cadb\beta\alpha d) = \gammaadb\beta\alpha d + c\alpha db\beta\alpha d - ca\delta\beta^2\alpha d - ca\delta b\beta\alpha\delta \quad .$$

La structure de bigèbre de M se prolonge de façon unique en une structure de bigèbre différentielle graduée sur Ω . Le coproduit est l'unique prolongement K -linéaire de $\Delta : M \rightarrow M \otimes M$, noté également $\Delta : \Omega \rightarrow \Omega \otimes \Omega$, en un morphisme d'algèbres différentielles graduées. En particulier, on a

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \alpha \otimes a + \beta \otimes c + a \otimes \alpha + b \otimes \gamma \quad , \\ \Delta(\beta) &= \alpha \otimes b + \beta \otimes d + a \otimes \beta + b \otimes \delta \quad , \\ \Delta(\gamma) &= \gamma \otimes a + \delta \otimes c + c \otimes \alpha + d \otimes \gamma \quad , \\ \Delta(\delta) &= \gamma \otimes b + \delta \otimes d + c \otimes \beta + d \otimes \delta \quad . \end{aligned}$$

La coïunité est l'unique prolongement K -linéaire de $\varepsilon : M \rightarrow K$, noté également $\varepsilon : \Omega \rightarrow K$, en un morphisme d'algèbres différentielles, la différentielle sur K étant identiquement nulle. En particulier, on a

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta) = \varepsilon(\gamma) = \varepsilon(\delta) = 0 \quad .$$

On désigne par $R_{p,q}$ l'idéal bilatère de Ω engendré par $J_{p,q}$ et les générateurs

- (7) $\alpha a - pqa\alpha$,
- (8) $\beta b - pqb\beta$,
- (9) $\gamma c - pqc\gamma$,
- (10) $\delta d - pqd\delta$,
- (11) $\alpha c - pc\alpha$,
- (12) $\beta d - pd\beta$,
- (13) $\alpha b - qb\alpha$,
- (14) $\gamma d - qd\gamma$,
- (15) $\beta a - pa\beta - (pq - 1)b\alpha$,
- (16) $\delta c - pc\delta - (pq - 1)d\gamma$,
- (17) $\gamma a - qa\gamma - (pq - 1)c\alpha$,
- (18) $\delta b - qb\delta - (pq - 1)d\beta$,
- (19) $\alpha d - d\alpha$,
- (20) $\beta c - pq^{-1}c\beta - (p - q^{-1})d\alpha$,
- (21) $\gamma b - p^{-1}qb\gamma - (q - p^{-1})d\alpha$,
- (22) $\delta a - a\delta - (q - p^{-1})b\gamma - (p - q^{-1})c\beta - (pq - 2 + p^{-1}q^{-1})d\alpha$,
- (23) α^2 ,
- (24) β^2 ,
- (25) γ^2 ,
- (26) δ^2 ,
- (27) $\alpha\gamma + p\gamma\alpha$,
- (28) $\beta\delta + p\delta\beta$,
- (29) $\alpha\beta + q\beta\alpha$,
- (30) $\gamma\delta + q\delta\gamma$,
- (31) $\alpha\delta + \delta\alpha$,
- (32) $\beta\gamma + pq^{-1}\gamma\beta + (p - q^{-1})\delta\alpha$.

On démontre que l'idéal $R_{p,q}$ est stable par d et qu'il est aussi un coïdéal de Ω ([Mal1], [Man4]), ce qui implique que si l'on pose

$$\Omega_{p,q} = \Omega / R_{p,q} \quad ,$$

alors l'algèbre $\Omega_{p,q}$ est munie d'une structure de bigèbre différentielle graduée, appelée *complexe de de Rham quantique* des formes différentielles sur $M_{p,q} = \Omega_{p,q}^0$. Si $p = q = 1$, alors $\Omega_{p,q}$ n'est autre que le complexe de de Rham algébrique ordinaire sur l'espace affine des matrices carrées d'ordre 2. L'idéal $R_{p,q}$ est bigradué pour la bigraduation de Ω définie

par le degré total en a, b, c et d et en α, β, γ et δ , ce qui implique que $\Omega_{p,q}$ est aussi une algèbre bigraduée

$$\Omega_{p,q} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}} \Omega_{p,q}^{m,n} .$$

Pour cette bigraduation, la différentielle est bihomogène de bidegré $(-1,1)$. Il résulte du “diamond lemma” de Bergman [Be] que la famille

$$(a^m b^n c^r d^s \delta^i \gamma^j \beta^k \alpha^l)_{m,n,r,s \in \mathbb{N}, i,j,k,l \in \{0,1\}}$$

est une base du K -module $\Omega_{p,q}$.

(1.3.) Le déterminant quantique, le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$ et son complexe de de Rham quantique. On appelle déterminant quantique l’élément

$$t = ad - q^{-1}cb = da - qbc = da - pcb = ad - p^{-1}bc ,$$

de $M_{p,q}$. On vérifie aussitôt que

$$\Delta(t) = t \otimes t , \quad \varepsilon(t) = 1 ,$$

que

$$dt = a\delta - q^{-1}c\beta - p^{-1}b\gamma + p^{-1}q^{-1}d\alpha$$

et que

$$\begin{aligned} ta &= at , \\ tb &= p^{-1}qbt , \\ tc &= pq^{-1}ct , \\ td &= dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha t &= pqt\alpha , \\ \beta t &= p^2t\beta , \\ \gamma t &= q^2t\gamma , \\ \delta t &= pqt\delta . \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -pb \\ -p^{-1}c & a \end{pmatrix} = tI$$

(formules de Cramer quantiques).

Soient t^{-1} une nouvelle indéterminée et $J'_{p,q}$ l’idéal bilatère de $M' = K\langle a, b, c, d, t^{-1} \rangle$, engendré par les générateurs (1) à (8) de (0.1) et

$$(33) \quad tt^{-1} - 1 ,$$

$$(34) \quad t^{-1}t - 1 .$$

On désigne par $G_{p,q}$ l'algèbre quotient

$$G_{p,q} = M' / J'_{p,q}$$

et l'on démontre que l'application canonique de $M_{p,q}$ dans $G_{p,q}$ est injective, que le coproduit Δ (resp. la coïunité ε) de $M_{p,q}$ se prolonge de façon unique en un morphisme d'algèbres, noté également

$$\Delta : G_{p,q} \rightarrow G_{p,q} \otimes G_{p,q}$$

$$(\text{resp. } \varepsilon : G_{p,q} \rightarrow K)$$

et qu'on définit ainsi une structure de bigèbre sur $G_{p,q}$. On remarque que

$$\Delta(t^{-1}) = t^{-1} \otimes t^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon(t^{-1}) = 1$$

et que

$$\begin{aligned} t^{-1}a &= at^{-1} \quad , \\ t^{-1}b &= pq^{-1}bt^{-1} \quad , \\ t^{-1}c &= p^{-1}qct^{-1} \quad , \\ t^{-1}d &= dt^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie qu'il existe un unique antihomomorphisme d'algèbres

$$I : G_{p,q} \rightarrow G_{p,q}$$

tel que

$$\begin{aligned} I(a) &= t^{-1}d = dt^{-1} \quad , \\ I(b) &= -qt^{-1}b = -pbt^{-1} \quad , \\ I(c) &= -q^{-1}t^{-1}c = -p^{-1}ct^{-1} \quad , \\ I(d) &= t^{-1}a = at^{-1} \quad . \end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} I(t) &= I(ad - p^{-1}bc) \\ &= I(d)I(a) - p^{-1}I(c)I(b) \\ &= (at^{-1})(dt^{-1}) - p^{-1}(-p^{-1}ct^{-1})(-pbt^{-1}) \\ &= adt^{-2} - q^{-1}cbt^{-2} \\ &= (ad - p^{-1}bc)t^{-2} = t^{-1} \end{aligned}$$

et

$$I(t^{-1}) = t \quad .$$

L'application I est un antipode de la bigèbre $G_{p,q}$. On définit ainsi une structure de bigèbre de Hopf sur l'algèbre $G_{p,q}$, appelée algèbre des fonctions régulières sur le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$. Si $p = q = 1$, l'algèbre $G_{1,1}$ n'est autre que l'algèbre des fonctions

régulières (fonctions rationnelles partout définies) sur le groupe linéaire $GL(2)$ et l'antipode correspond à l'inversion des matrices.

Considérons maintenant l'algèbre quotient

$$\Omega_{G_{p,q}} = K\langle a, b, c, d, t^{-1}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle / R'_{p,q} \quad ,$$

où $R'_{p,q}$ désigne l'idéal bilatère de $K\langle a, b, c, d, t^{-1}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ engendré par les générateurs (1) à (34) ci dessus. On vérifie que les applications canoniques de $\Omega_{p,q}$ et de $G_{p,q}$ dans $\Omega_{G_{p,q}}$ sont injectives et que

$$\begin{aligned} \alpha t^{-1} &= p^{-1} q^{-1} t^{-1} \alpha \quad , \\ \beta t^{-1} &= p^{-2} t^{-1} \beta \quad , \\ \gamma t^{-1} &= q^{-2} t^{-1} \gamma \quad , \\ \delta t^{-1} &= p^{-1} q^{-1} t^{-1} \delta \quad . \end{aligned}$$

La différentielle de $\Omega_{p,q}$ se prolonge de façon unique en une application K -linéaire, notée également

$$d : \Omega_{G_{p,q}} \rightarrow \Omega_{G_{p,q}} \quad ,$$

faisant de cette algèbre une algèbre différentielle graduée (pour la graduation du degré total en α, β, γ et δ) et l'on a

$$\begin{aligned} d(t^{-1}) &= -t^{-1} dt t^{-1} \\ &= t^{-1} (a\delta - q^{-1}c\beta - p^{-1}b\gamma + p^{-1}q^{-1}d\alpha) t^{-1} \\ &= t^{-2} (p^{-1}q^{-1}a\delta - p^{-1}q^{-2}c\beta - p^{-2}q^{-1}b\gamma + p^{-2}q^{-2}d\alpha) \quad . \end{aligned}$$

De même, les coproduits (resp. les coïunités) de $G_{p,q}$ et de $\Omega_{p,q}$ ont un prolongement unique commun en un morphisme d'algèbres différentielles graduées, noté également

$$\Delta : \Omega_{G_{p,q}} \rightarrow \Omega_{G_{p,q}}^{\otimes} \quad (\text{resp. } \varepsilon : \Omega_{G_{p,q}} \rightarrow K) \quad ,$$

qui font de $\Omega_{G_{p,q}}$ une bigèbre différentielle graduée. Enfin, l'antipode I de $G_{p,q}$ se prolonge de façon unique en un antihomomorphisme d'algèbres différentielles graduées, noté également $I : \Omega_{G_{p,q}} \rightarrow \Omega_{G_{p,q}}$, qui est un antipode de $\Omega_{G_{p,q}}$, et l'on a

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= t^{-1} \delta + d(t^{-1}) d \quad , \\ I(\beta) &= -qt^{-1} \beta - q d(t^{-1}) b \quad , \\ I(\gamma) &= -q^{-1} t^{-1} \gamma - q^{-1} d(t^{-1}) c \quad , \\ I(\delta) &= t^{-1} \alpha + d(t^{-1}) a \quad . \end{aligned}$$

On définit ainsi une structure de bigèbre différentielle graduée de Hopf sur $\Omega_{G_{p,q}}$, appelée *complexe de de Rham quantique* des formes différentielles sur le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$. Si $p = q = 1$, alors $\Omega_{G_{p,q}}$ n'est autre que le complexe de de Rham algébrique ordinaire du groupe linéaire $GL(2)$.

(2.1.) **Éléments invariants d'une bigèbre différentielle de Hopf.** Considérons une bigèbre différentielle de Hopf $(\Omega, d, \Delta, \varepsilon, I)$ et soit ω un élément homogène de degré m de Ω , $\omega \in \Omega^m$. Alors on a

$$\Delta(\omega) = \sum_{i=0}^m \Delta_i(\omega) \quad , \quad \Delta_i(\omega) \in \Omega^i \otimes \Omega^{m-i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

cette décomposition étant unique. On dit que ω est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) si $\Delta_0(\omega) = 1 \otimes \omega$ (resp. si $\Delta_m(\omega) = \omega \otimes 1$). Si ω est un élément quelconque de Ω , on dit qu'il est invariant à gauche (resp. à droite) si toutes ses composantes homogènes le sont. On vérifie aussitôt que l'ensemble des éléments invariants à gauche (resp. à droite) de Ω est une sous-algèbre différentielle graduée de Ω notée Ω_λ (resp. Ω_ρ). De plus, on a $\Omega_\lambda^0 = \Omega_\rho^0 = K$. En effet, si par exemple $f \in \Omega_\lambda^0$, alors $\Delta(f) = 1 \otimes f$, ce qui implique que $(1_\Omega \otimes \varepsilon)\Delta(f) = (1_\Omega \otimes \varepsilon)(f)$, d'où $f = \varepsilon(f) \cdot 1$, ce qui prouve que $f \in K$.

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficients dans Ω^0 est une *matrice multiplicative* si

$$\Delta(a_j^i) = \sum_{k=1}^n a_k^i \otimes a_j^k \quad , \quad \varepsilon(a_j^i) = \delta_j^i \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \quad ,$$

où δ_j^i désigne le symbole de Kronecker. On vérifie facilement que si A désigne une matrice multiplicative alors la transposée de la matrice $I(A)$ est également une matrice multiplicative. De plus, on a alors

$$I(A) \cdot A = A \cdot I(A) = 1_n \quad ,$$

où 1_n désigne la matrice unité d'ordre n (autrement dit, une matrice multiplicative A est inversible d'inverse $I(A)$). En effet,

$$\sum_{k=1}^n I(a_k^i) a_j^k = \mu(I \otimes 1_\Omega) \Delta(a_j^i) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad ,$$

où $\mu : \Omega \otimes \Omega \rightarrow \Omega$ désigne l'application linéaire définie par la multiplication. En vertu de la définition de l'antipode, on a donc

$$\sum_{k=1}^n I(a_k^i) a_j^k = \varepsilon(a_j^i) = \delta_j^i \quad ,$$

ce qui prouve que $I(A) \cdot A = 1_n$ et l'on démontre de façon analogue que $A \cdot I(A) = 1_n$.

Proposition (2.1.1.) Soient $(\Omega, d, \Delta, \varepsilon, I)$ une bigèbre différentielle de Hopf et A une matrice multiplicative à coefficients dans Ω^0 . Alors les coefficients de la matrice $I(A) \cdot dA$ sont des éléments invariants à gauche de Ω^1 .

Démonstration. Posons $A = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $I(A) \cdot dA = (\omega_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega_j^i) &= \Delta \left(\sum_{k=1}^n I(a_k^i) da_j^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \Delta(I(a_k^i)) \Delta(da_j^k) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=1}^n I(a_k^r) \otimes I(a_r^i) \right) \left(\sum_{s=1}^n (da_s^k \otimes a_j^s + a_s^k \otimes da_j^s) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n I(a_k^r) da_s^k \otimes I(a_r^i) a_j^s \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n I(a_k^r) a_s^k \otimes I(a_r^i) da_j^s .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\omega_j^i) &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^n I(a_k^r) a_s^k \right) \otimes I(a_r^i) da_j^s \\
&= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \delta_s^r \otimes I(a_r^i) da_j^s \\
&= 1 \otimes \sum_{r=1}^n I(a_r^i) da_j^r = 1 \otimes \omega_j^i ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

(2.2.) Formes différentielles invariantes à gauche sur $GL_{p,q}(2)$. On se fixe désormais deux éléments inversibles p et q de K et l'on désigne simplement par Ω la bigèbre différentielle graduée de Hopf $\Omega_{G_{p,q}}$. Par définition du coproduit dans Ω , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est multiplicative et en vertu de la proposition (2.1.1.), les coefficients de la matrice

$$\begin{aligned}
\omega &= \begin{pmatrix} \omega_a & \omega_b \\ \omega_c & \omega_d \end{pmatrix} = I(A) \cdot dA = t^{-1} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t^{-1}(d\alpha - qb\gamma) & t^{-1}(d\beta - qb\delta) \\ t^{-1}(-q^{-1}c\alpha + a\gamma) & t^{-1}(-q^{-1}c\beta + a\delta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

sont des éléments invariants à gauche de Ω^1 (on dira des *1-formes différentielles invariantes à gauche*). Comme la matrice $I(A)$ est l'inverse de la matrice A , on a $dA = A\omega$, autrement dit

$$\begin{aligned}\alpha &= a\omega_a + b\omega_c \\ \beta &= a\omega_b + b\omega_d \\ \gamma &= c\omega_a + d\omega_c \\ \delta &= c\omega_b + d\omega_d \quad .\end{aligned}$$

Un calcul simple mais fastidieux permet, à partir de ces formules, de montrer qu'on a les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_a a &= pq a \omega_a \\ \omega_a b &= b \omega_a \\ \omega_a c &= pq c \omega_a \\ \omega_a d &= d \omega_a \\ \omega_b a &= p a \omega_b + (p - q^{-1}) b \omega_a \\ \omega_b b &= p b \omega_b \\ \omega_b c &= p c \omega_b + (p - q^{-1}) d \omega_a \\ \omega_b d &= p d \omega_b \\ \omega_c a &= q a \omega_c \\ \omega_c b &= q b \omega_c + (q - p^{-1}) a \omega_a \\ \omega_c c &= q c \omega_c \\ \omega_c d &= q d \omega_c + (q - p^{-1}) c \omega_a \\ \omega_d a &= a \omega_d + (pq - 1) b \omega_c + (pq - 2 + p^{-1} q^{-1}) a \omega_a \\ \omega_d b &= pq b \omega_d + (pq - 1) a \omega_b \\ \omega_d c &= c \omega_d + (pq - 1) d \omega_c + (pq - 2 + p^{-1} q^{-1}) c \omega_a \\ \omega_d d &= pq d \omega_d + (pq - 1) c \omega_b\end{aligned}$$

Un calcul du même type nous permet de vérifier qu'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_a^2 &= 0 \\ \omega_b \omega_a &= -\omega_a \omega_b \\ \omega_b^2 &= 0 \\ \omega_c \omega_a &= -\omega_a \omega_c \\ \omega_c \omega_b &= -\omega_b \omega_c \\ \omega_c^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_d \omega_a &= -\omega_a \omega_d - (pq - 1) \omega_b \omega_c \\
\omega_d \omega_b &= -pq \omega_b \omega_d - (pq - 1) \omega_a \omega_c \\
\omega_d \omega_c &= -p^{-1} q^{-1} \omega_c \omega_d - (p^{-1} q^{-1} - 1) \omega_a \omega_b \\
\omega_d^2 &= -(p^{-1} q^{-1} - 1) \omega_b \omega_c
\end{aligned}$$

Théorème (2.2.1.) *L'algèbre des formes différentielles invariantes à gauche Ω_λ est engendrée par $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ et ω_d . De façon plus précise, la famille $(\omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l)_{0 \leq i,j,k,l \leq 1}$ est une base du K -module Ω_λ et l'on a un isomorphisme de K -modules de Ω avec $\Omega^0 \otimes \Omega_\lambda = G_{p,q} \otimes \Omega_\lambda$.*

Démonstration. La première observation est que la famille $(\alpha^i \beta^j \gamma^k \delta^l)_{0 \leq i,j,k,l \leq 1}$ est une base du Ω^0 -module à gauche Ω . Cela résulte facilement du fait que la famille

$$(a^m b^n c^r d^s \delta^i \gamma^j \beta^k \alpha^l)_{m,n,r,s \in \mathbb{N}, i,j,k,l \in \{0,1\}}$$

est une base du K -module $\Omega_{p,q}$ (cf. (1.2.)), du fait que $\Omega_{p,q}$ s'envoie injectivement dans Ω et des relations de commutation de t^{-1} avec a, b, c, d et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (cf. (1.3.)). Comme $\omega = A^{-1} \cdot dA$ et $dA = A\omega$, on en déduit facilement que $(\omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l)_{0 \leq i,j,k,l \leq 1}$ est une aussi une base du Ω^0 -module à gauche Ω , ce qui implique que la famille

$$(\omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l \otimes \omega_a^{i'} \omega_b^{j'} \omega_c^{k'} \omega_d^{l'})_{0 \leq i,j,k,l,i',j',k',l' \leq 1}$$

est une base du $\Omega^0 \otimes \Omega^0$ -module à gauche $\Omega \otimes \Omega$. Soit maintenant η un élément de Ω^m . En vertu de ce qui précède, η peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\eta = \sum_{\substack{0 \leq i,j,k,l \leq 1 \\ i+j+k+l=m}} f_{ijkl} \omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l, \quad f_{ijkl} \in \Omega^0.$$

D'autre part, posons

$$\Delta(\eta) = \sum_{i=0}^m \Delta_i(\eta) \quad , \quad \Delta_i(\eta) \in \Omega^i \otimes \Omega^{m-i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m.$$

Comme les formes $\omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l$ sont invariantes à gauche, on a

$$\Delta_0(\eta) = \sum_{\substack{0 \leq i,j,k,l \leq 1 \\ i+j+k+l=m}} \Delta(f_{ijkl})(1 \otimes \omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l).$$

Si η est invariante à gauche, on a

$$\Delta_0(\eta) = 1 \otimes \eta = \sum_{\substack{0 \leq i,j,k,l \leq 1 \\ i+j+k+l=m}} (1 \otimes f_{ijkl})(1 \otimes \omega_a^i \omega_b^j \omega_c^k \omega_d^l).$$

On en déduit que pour tout i, j, k et l on a $\Delta(f_{ijkl}) = 1 \otimes f_{ijkl}$, d'où $f_{ijkl} \in \Omega_\lambda^0$, ce qui prouve que $f_{ijkl} \in K$ (cf. (2.1.)) et démontre le théorème.

(2.3.) Formules de Maurer-Cartan. Les formules de Maurer-Cartan sont valables dans un cadre très général. On a la proposition suivante :

Proposition (2.3.1.) *Soient $(\Omega, d, \Delta, \varepsilon, I)$ une bigèbre différentielle de Hopf, A une matrice multiplicative à coefficients dans Ω^0 et posons $\omega = I(A) \cdot dA$. Alors on a*

$$\omega^2 + d\omega = 0$$

(formules de Maurer-Cartan).

Démonstration. Comme A est une matrice multiplicative, on a

$$I(A) \cdot A = A \cdot I(A) = 1$$

(cf. (2.1.)), ce qui implique que

$$d(I(A)) \cdot A + I(A) \cdot dA = 0 \quad ,$$

d'où

$$d(I(A)) = -I(A) \cdot dA \cdot I(A) \quad .$$

On en déduit que

$$d(I(A) \cdot dA) = d(I(A)) \cdot dA = -I(A) \cdot dA \cdot I(A) \cdot dA \quad ,$$

ce qui prouve la proposition.

En appliquant la proposition ci-dessus à notre exemple, on en déduit, en utilisant les formules de (2.2.), que l'on a

$$\begin{aligned} d\omega_a &= -\omega_b\omega_c \quad , \\ d\omega_b &= -\omega_b\omega_d - \omega_a\omega_b \quad , \\ d\omega_c &= p^{-1}q^{-1}\omega_c\omega_d + p^{-1}q^{-1}\omega_a\omega_c \quad , \\ d\omega_d &= p^{-1}q^{-1}\omega_b\omega_c \quad . \end{aligned}$$

(3.1.) Dual de Koszul d'une algèbre quadratique. Supposons désormais que K soit un corps. Soit

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} A^m$$

une K -algèbre graduée telle que $A^0 = K$, $E = A^1$ soit un K -espace vectoriel de dimension finie et A soit engendrée par A^1 . On en déduit un morphisme surjectif d'algèbres graduées

$$T(E) \rightarrow A \quad .$$

On désigne par R le noyau de ce morphisme, qui est un idéal bilatère gradué de A

$$R = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} R^m \quad , \quad R^m \subset A^m$$

et l'on a $R^0 = R^1 = \{0\}$. On dit que l'algèbre A est quadratique, si l'idéal bilatère R est engendré par $R^2 \subset E \otimes E$. Sous ces hypothèses, le *dual de Koszul* de l'algèbre A est l'algèbre quadratique

$$A^! = T(E^*)/R^! \quad ,$$

où $R^!$ désigne l'idéal bilatère de $T(E^*)$ engendré par l'orthogonal $R^{2\perp} \subset E^* \otimes E^* = (E \otimes E)^*$ de $R^2 \subset E \otimes E$ ([Pr], [Man1], [Man2]).

Soient e_1, \dots, e_n une base de E , e^1, \dots, e^n la base duale de E^* et b_1, \dots, b_m une base de A^2 . Posons

$$\varpi = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e^i \in E \otimes E^* \subset A \otimes T(E^*)$$

et

$$\varpi^2 = \varpi \cdot \varpi = \sum_{j=1}^m b_j \otimes f^j \quad , \quad f^j \in E^* \otimes E^* \quad .$$

Alors on vérifie facilement que la famille $(f^j)_{1 \leq j \leq m}$ engendre $R^{2\perp}$ et

$$A^! = T(E^*)/(f^1, \dots, f^m) \quad .$$

Supposons maintenant que l'algèbre quadratique A soit munie d'une différentielle $d : A \rightarrow A$ de degré 1 qui en fait une algèbre différentielle graduée. A ces données on peut associer une autre algèbre quadratique $A(d)$ comme suit : On pose $E' = E \oplus K$ et

$$A(d) = T(E')/R' \quad ,$$

où R' désigne l'idéal bilatère de $T(E')$ engendré par

$$R^2 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n K(e \otimes e_i + e_i \otimes e - d e_i) \right) \oplus K(e \otimes e) \quad ,$$

où $d e_i$ désigne aussi un relèvement de $d e_i$ dans $E \otimes E$ et e l'élément $(0, 1)$ de $E' = E \oplus K$. Soit e^1, \dots, e^n, e^* la base de $(E \oplus K)^*$, duale à e_1, \dots, e_n, e , et posons

$$\varpi' = \varpi + e \otimes e^* \quad .$$

On a

$$\begin{aligned} \varpi' \varpi' &= \varpi \varpi + \sum_{i=1}^n e_i e \otimes e^i e^* + \sum_{i=1}^n e e_i \otimes e^* e^i \\ &= \varpi \varpi + \sum_{i=1}^n e_i e \otimes (e^i e^* - e^* e^i) + \sum_{i=1}^n d e_i \otimes e^* e^i \end{aligned}$$

(dans $A(d) \otimes T(E'^*)$). En particulier, ceci implique que e^* est un élément du centre de $A(d)^1$. On peut donc considérer l'algèbre quotient $UA(d)$ de $A(d)^1$ par l'idéal bilatère engendré par $e^* - 1$ et il résulte de la formule ci dessus que si b_1, \dots, b_m désigne une base de A^2 et si

$$\varpi\varpi + d\varpi = \sum_{j=1}^m b_j \otimes g^j \quad , \quad g^j \in T(E^*) \quad ,$$

où

$$d\varpi = \sum_{i=1}^n d e_i \otimes e^i \quad ,$$

alors l'algèbre $UA(d)$ est isomorphe à $T(A^*)/(g^1, \dots, g^m)$.

Exemple (3.1.1.) Si (A, d) désigne l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles invariantes à gauche sur $GL(2)$, alors l'algèbre $UA(d)$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_2 .

(3.2.) L'algèbre enveloppante du groupe quantique $GL_{p,q}(2)$. En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, on définit l'algèbre enveloppante du groupe quantique $GL_{p,q}(2)$ comme étant l'algèbre $U\Omega_\lambda(d)$, où Ω_λ désigne l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles invariantes à gauche sur $GL_{p,q}(2)$ (cf. (2.2.)). Soit X_a, X_b, X_c, X_d la base de Ω_λ^{1*} , duale à la base $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ de Ω_λ^1 . En utilisant les notations de (3.1.) et les formules de (2.2.), on a

$$\varpi = \omega_a \otimes X_a + \omega_b \otimes X_b + \omega_c \otimes X_c + \omega_d \otimes X_d$$

et

$$\begin{aligned} \varpi^2 &= \omega_a \omega_a \otimes X_a X_a + \omega_a \omega_b \otimes X_a X_b + \omega_a \omega_c \otimes X_a X_c + \omega_a \omega_d \otimes X_a X_d \\ &+ \omega_b \omega_a \otimes X_b X_a + \omega_b \omega_b \otimes X_b X_b + \omega_b \omega_c \otimes X_b X_c + \omega_b \omega_d \otimes X_b X_d \\ &+ \omega_c \omega_a \otimes X_c X_a + \omega_c \omega_b \otimes X_c X_b + \omega_c \omega_c \otimes X_c X_c + \omega_c \omega_d \otimes X_c X_d \\ &+ \omega_d \omega_a \otimes X_d X_a + \omega_d \omega_b \otimes X_d X_b + \omega_d \omega_c \otimes X_d X_c + \omega_d \omega_d \otimes X_d X_d \\ &= \omega_a \omega_b \otimes X_a X_b + \omega_a \omega_c \otimes X_a X_c + \omega_a \omega_d \otimes X_a X_d - \omega_a \omega_b \otimes X_b X_a \\ &+ \omega_b \omega_c \otimes X_b X_c + \omega_b \omega_d \otimes X_b X_d - \omega_a \omega_c \otimes X_c X_a - \omega_b \omega_c \otimes X_c X_b \\ &+ \omega_c \omega_d \otimes X_c X_d - \omega_a \omega_d \otimes X_d X_a - (pq - 1)\omega_b \omega_c \otimes X_d X_a - pq\omega_b \omega_d \otimes X_d X_b \\ &- (pq - 1)\omega_a \omega_b \otimes X_d X_b - p^{-1}q^{-1}\omega_c \omega_d \otimes X_d X_c - (p^{-1}q^{-1} - 1)\omega_a \omega_c \otimes X_d X_c \\ &- (p^{-1}q^{-1} - 1)\omega_b \omega_c \otimes X_d^2 \quad . \end{aligned}$$

De même, en utilisant les formules de (2.3.), on a

$$\begin{aligned} d\varpi &= d\omega_a \otimes X_a + d\omega_b \otimes X_b + d\omega_c \otimes X_c + d\omega_d \otimes X_d \\ &= -\omega_b \omega_c \otimes X_a - \omega_b \omega_d \otimes X_b - \omega_a \omega_b \otimes X_b \\ &+ p^{-1}q^{-1}\omega_c \omega_d \otimes X_c + p^{-1}q^{-1}\omega_a \omega_c \otimes X_c + p^{-1}q^{-1}\omega_b \omega_c \otimes X_d \quad . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\varpi^2 + d\varpi &= \omega_a\omega_b \otimes (X_aX_b - X_bX_a - (pq - 1)X_dX_b - X_b) \\
&+ \omega_a\omega_c \otimes (X_aX_c - X_cX_a - (p^{-1}q^{-1} - 1)X_dX_c + p^{-1}q^{-1}X_c) \\
&+ \omega_a\omega_d \otimes (X_aX_d - X_dX_a) \\
&+ \omega_b\omega_c \otimes (X_bX_c - X_cX_b - (pq - 1)X_dX_a - (p^{-1}q^{-1} - 1)X_d^2 - X_a + p^{-1}q^{-1}X_d) \\
&+ \omega_b\omega_d \otimes (X_bX_d - pqX_dX_b - X_b) \\
&+ \omega_c\omega_d \otimes (X_cX_d - p^{-1}q^{-1}X_dX_c + p^{-1}q^{-1}X_c) .
\end{aligned}$$

L'algèbre enveloppante du groupe quantique $GL_{p,q}(2)$ est donc isomorphe au quotient de l'algèbre des polynômes non commutatifs $K\langle X_a, X_b, X_c, X_d \rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les relations

$$\begin{aligned}
X_aX_b - X_bX_a &= (pq - 1)X_dX_b + X_b , \\
X_aX_c - X_cX_a &= (p^{-1}q^{-1} - 1)X_dX_c - p^{-1}q^{-1}X_c , \\
X_aX_d - X_dX_a &= 0 , \\
X_bX_c - X_cX_b &= (pq - 1)X_dX_a + (p^{-1}q^{-1} - 1)X_d^2 + X_a - p^{-1}q^{-1}X_d , \\
X_bX_d - pqX_dX_b &= X_b , \\
X_cX_d - p^{-1}q^{-1}X_dX_c &= -p^{-1}q^{-1}X_c .
\end{aligned}$$

On remarque que si $p = q = 1$, on retrouve les relations

$$\begin{aligned}
[X_a, X_b] &= X_b , \\
[X_a, X_c] &= -X_c , \\
[X_a, X_d] &= 0 , \\
[X_b, X_c] &= X_a - X_d , \\
[X_c, X_d] &= -X_c ,
\end{aligned}$$

définissant l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_2 .

RÉFÉRENCES

- [Ab] E. Abe, "Hopf algebras," Cambridge Tracts in Math. 74, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [Ao1] K. Aomoto, *q-analogue of the de Rham cohomology associated with Jackson integrals. I*, Proc. Japan Acad. **66** (A) (1990), 161-164.
- [Ao2] K. Aomoto, *q-analogue of the de Rham cohomology associated with Jackson integrals. II*, Proc. Japan Acad. **66** (A) (1990), 240-244.
- [Ao3] K. Aomoto, *Finiteness of a cohomology associated with certain Jackson integrals*, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 75-101.
- [AST] M. Artin, W. Schelter, J. Tate, *Quantum deformations of GL_n* , Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 879-895.
- [Be] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978), 178-218.
- [Bd] D. Bernard, *Quantum Lie algebras and differential calculus on quantum groups*, Preprint (1990).
- [Bo] N. Bourbaki, "Éléments de Mathématique," Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.
- [Br] T. Brzeziński, *Exterior bialgebras*, Preprint (1991).
- [BDR] T. Brzeziński, H. Dabrowsky, J. Rembieliński, *On the quantum differential calculus and the quantum holomorphicity*, J. Math. Phys. **33**, 1 (1992), 19-24.
- [CSWW] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, W. Weich, *Bicovariant differential calculus on quantum groups $SU_q(N)$ and $SO_q(N)$* , Commun. Math. Phys. **142** (1991), 605-641.
- [Ca] P. Cartier, *Calcul différentiel non commutatif*, Exposés à l'E.N.S. (1989).
- [Co] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **62** (1985), 41-144.
- [DM] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian categories*, in "Hodge cycles, motives, and Shimura varieties," Lecture Notes in Mathematics 900, Springer-Verlag, 1982, pp. 101-228.
- [Dr] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986, Berkeley," AMS, 1987, pp. 798-820.
- [DV1] M. Dubois-Violette, *Dérivations et calcul différentiel non commutatif*, C.R.A.S. **307** (1988), 403-408.
- [DV2] M. Dubois-Violette, *Noncommutative differential geometry, quantum mechanics and gauge theory*, Preprint, L.P.T.H.E.-Orsay 90/31 (1990).
- [DKM1] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry of matrix algebras*, J. Math. Phys. **31**, 2 (1990), 316-322.
- [DKM2] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry and new models of gauge theory*, J. Math. Phys. **31**, 2 (1990), 323-330.
- [FT] P. Feng, B. Tsygan, *Hochschild and cyclic homology of quantum groups*, Commun. Math. Phys. **140** (1991), 481-521.
- [EGA IV₄] A. Grothendieck, "Éléments de géométrie algébrique IV," Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **32**, 1967.
- [Gr] A. Grothendieck, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **29** (1966), 95-103.
- [GRR] D. Gurevich, A. Radul, V. Rubtsov, *Non-commutative differential geometry and Yang-Baxter equation*, Preprint (1990).
- [HW] T. Hibi, M. Wakayama, *A q-analogue of Capelli's identity for $GL(2)$* , Preprint, Hokkaido University (1991).
- [J1] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.
- [J2] M. Jimbo, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*, Commun. Math. Phys. **102** (1986), 537-547.
- [J3] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.
- [Ju] B. Jurčo, *Differential calculus on quantized simple Lie groups*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 177-186.
- [Ka] M. Karoubi, "Homologie cyclique et K-théorie," Asterisque 149, 1987.

- [Kas] C. Kassel, *Cyclic homology of differential operators, the Virasoro algebra and a q -analogue*, Preprint (1991).
- [Mal1] G. Maltsiniotis, *Groupes quantiques et structures différentielles*, C.R.A.S. **311**, Sér. I (1990), 831-834.
- [Mal2] G. Maltsiniotis, *Calcul différentiel sur le groupe linéaire quantique*, Preprint (1990).
- [Mal3] G. Maltsiniotis, *Groupoïdes quantiques*, C.R.A.S. **314**, Sér. I (1992), 249-252.
- [Mal4] G. Maltsiniotis, *Le langage des espaces et des groupes quantiques*, Preprint (1992).
- [Man1] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37**, 4 (1987), 191-205.
- [Man2] Yu. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry," Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal, 1988.
- [Man3] Yu. I. Manin, *Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 163-175.
- [Man4] Yu. I. Manin, *Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes*, Preprint, MPI/91-60 (1991).
- [MNW1] T. Masuda, Y. Nakagami, J. Watanabe, *Noncommutative differential geometry on the quantum $SU(2)$, I: An algebraic viewpoint*, K-Theory **4** (1990), 157-180.
- [MNW2] T. Masuda, Y. Nakagami, J. Watanabe, *Noncommutative differential geometry on the quantum two sphere of Podles, I: An algebraic viewpoint*, K-Theory **5** (1991), 151-175.
- [M-H] F. Müller-Hoissen, *Differential calculi on the quantum group $GL_{p,q}(2)$* , Preprint, GOET-TP 55/91 (1991).
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda, M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Preprint, University of Tokyo (1991).
- [Po] P. Podles, *Differential calculus on quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), 107-119.
- [Pr] S. B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39-60.
- [RTF] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Len. Math. J. **1**, 1 (1990), 193-225.
- [Ro] M. Rosso, *Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif*, Duke Math. J. **61**, 1 (1990), 11-40.
- [Sch] A. Schirmacher, *Remarks on the use of R -matrices*, Preprint (1991).
- [SWZ] A. Schirmacher, J. Wess, B. Zumino, *The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and Lie algebra*, Z. Phys. C - Particles and Fields **49** (1991), 317-324.
- [SVZ] W. B. Schmidke, S. P. Vokos, B. Zumino, *Differential geometry of the quantum supergroup $GL_q(1|1)$* , Z. Phys. C - Particles and Fields **48** (1990), 249-255.
- [Su] A. Sudbery, *Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$* , J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), L697-L704.
- [Ta] L. A. Takhtadzhyan, *Noncommutative homology of quantum tori*, Funct. Anal. and Appl. **23**, 2 (1989), 147-149.
- [Tsy] B. Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, Preprint (1991).
- [WZ] J. Wess, B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, Preprint (1990).
- [Wo1] S. L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS **23** (1987), 117-181.
- [Wo2] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125-170.
- [Za1] S. Zakrzewski, *A differential structure for quantum mechanics*, J. of Geom. and Phys. **2**, 3 (1985), 135-145.
- [Za2] S. Zakrzewski, *Quantum and classical pseudogroups. Part II. Differential and symplectic pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **134** (1990), 371-395.