YVETTE KOSMANN-SCHWARZBACH

Quasi-bigèbres jacobiennes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 43
« Conférences de A. Aspect, B. Carter, R. Coquereaux, G.W. Gibbons, Ch. Kassel, Y. Kosman-Schwarzbach, S. Majid, G. Maltsiniotis, P. Pansu, G.A. Vilkovisky, Z. Wojtkowiak », , exp. n° 6, p. 103-106

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__43__103_0>

Quasi-bigèbres jacobiennes

Yvette Kosmann-Schwarzbach

Résumé de la conférence faite à la 52ème rencontre entre Physiciens Théoriciens et Mathématiciens (RCP n° 25), Strasbourg, 11-13 avril 1991

L'exposé comportait une introduction sur les quasi-bigèbres et quasi-groupes quantiques puis l'étude détaillée de leur limite classique, les quasi-bigèbres jacobiennes que je nommais alors quasi-bigèbres de Lie. J'explique le changement de terminologie dans l'introduction de [YKS3]. J'introduisais les relations d'équivalence de *modification* (en anglais, *twisting*) au sens strict et au sens large et la notion de quasi-bigèbre jacobienne quasi-triangulaire. Le contenu de cette conférence ayant été publié par ailleurs, je ne donnerai ici qu'un résumé très succinct des idées essentielles et les références bibliographiques.

Pour énoncer brièvement la définition d'une quasi-bigèbre, on peut dire que c'est une algèbre associative U munie d'une co-multiplication Δ compatible avec la multiplication, vérifiant la propriété de *quasi-co-associativité* : le défaut de co-associativité est mesuré par un élément inversible Φ de $U \otimes U \otimes U$, tel que

$$(1 \otimes \Delta)(\Delta(x)) = \Phi.\big((\Delta \otimes 1)(\Delta(x))\big).\Phi^{-1} ,$$

pour tout x dans U. On exige que Φ définisse une *contrainte d'associativité*, ce qui s'exprime par l'*identité pentagonale*,

$$(1 \otimes 1 \otimes \Delta)(\Phi).(\Delta \otimes 1 \otimes 1)(\Phi) = (e \otimes \Phi).(1 \otimes \Delta \otimes 1)(\Phi).(\Phi \otimes e) .$$

On impose aussi l'axiome habituel concernant la co-unité, et un axiome liant Φ, l'unité et la co-unité. Si la co-multiplication opposée Δ' est liée à Δ par

$$\Delta'(x) = R.\Delta(x).R^{-1},$$

pour tout x dans U, où R est un élément inversible de $U \otimes U$ vérifiant les deux *identités hexagonales*,

$$R_{13}.\Phi^{-1}_{132}.R_{23} = \Phi^{-1}_{312}.(\Delta \otimes 1)(R).\Phi^{-1}_{123}$$

$$R_{13}.\Phi_{213}.R_{12} = \Phi_{231}.(1 \otimes \Delta)(R).\Phi_{123} ,$$

on dit que R est une *R-matrice quantique quasitriangulaire*. Les deux identités hexagonales expriment que la contrainte de commutativité définie par R est compatible avec la contrainte d'associativité définie par Φ. La catégorie des

U-modules est alors une *catégorie monoïdale tressée*, encore appelée *catégorie quasi-tensorielle*, d'où la terminologie. On montre alors que R satisfait l'*identité dodécagonale* ou *équation quasi-Yang-Baxter*,

$$R_{12}.\Phi_{312}.R_{13}.\Phi^{-1}_{132}.R_{23}.\Phi_{123} = \Phi_{321}.R_{23}.\Phi^{-1}_{231}.R_{13}.\Phi_{213}.R_{12}\ .$$

La démonstration est facile, car on décompose le dodécagone en deux hexagones qui commutent (d'après l'une des identités hexagonales) et un carré qui commute (parce que la contrainte de commutativité est fonctorielle).

On définit ensuite les quasi-algèbres de Hopf et les quasi-groupes quantiques $(U_\hbar(\mathfrak{g}),m,\Delta_\hbar,\Phi_\hbar)$, déformations de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$, munies de la multiplication usuelle, m. C'est par passage à la limite classique, lorsque $\hbar$ tend vers 0, que l'on obtient les *quasi-bigèbres jacobiennes*.

La définition des quasi-bigèbres jacobiennes s'obtient de manière très naturelle en cherchant les "structures" sur la somme directe $F \oplus F^*$ d'un espace vectoriel de dimension finie F et de son dual F^*, c'est-à-dire les éléments de degré 1 et de carré nul dans l'algèbre extérieure de $F^* \oplus F$ munie du "grand crochet", qui prolonge le crochet de Nijenhuis-Richardson des formes à valeurs vectorielles sur F d'une part, et sur F^* d'autre part, et qui donne à $\bigwedge(F^* \oplus F)$ une structure d'algèbre de Lie graduée. Les "structures" les plus générales, dites *proto-bigèbres de Lie* (notion auto-duale), ont pour cas particulier les *quasi-bigèbres jacobiennes* ainsi que les objets duaux, les *quasi-bigèbres co-jacobiennes*, un cas particulier commun étant la notion, désormais classique aux deux sens du terme, de *bigèbre de Lie*. Les opérateurs cobords d'algèbres de Lie s'expriment aisément en termes de grand crochet. Une quasi-bigèbre jacobienne est une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (F,\mu)$ munie d'un co-crochet γ qui est un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\bigwedge^2 \mathfrak{g}$ tel que le défaut d'identité de Jacobi pour γ soit mesuré par le cobord d'algèbre de Lie d'un élément φ de $\bigwedge^3\mathfrak{g}$, à cobord nul par rapport à γ (lorsqu'on le considère comme une 3-cochaîne à valeurs scalaires sur F^*). Je décris le bi-pré-complexe d'une quasi-bigèbre jacobienne (qui est, dans le cas d'une bigèbre de Lie, le bicomplexe étudié par P. Lecomte et C. Roger, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* **310** série I (1990) 405-410), puis je donne l'expression du crochet de Schouten algébrique $[\sigma,\sigma']^\mu$ de deux éléments σ et σ' de $\bigwedge F$ en termes de grand crochet,

$$[\sigma,\sigma']^\mu = \big[\sigma,[\mu,\sigma']\big]$$

où μ désigne la structure d'algèbre de Lie de F. J'examine enfin le cas des quasi-bigèbres jacobiennes *exactes*, où le co-crochet sur F est un 1-cocycle exact, cobord d'un élément r de $\bigwedge^2\mathfrak{g}$. Tout élément r de $\bigwedge^2\mathfrak{g}$ définit une quasi-bigèbre jacobienne exacte, en posant

$$\varphi = -\frac{1}{2}[r,r]^\mu\ .$$

La *modification* d'une quasi-bigèbre jacobienne par un élément f de $\bigwedge^2 F$ est la quasi-bigèbre jacobienne dont le co-crochet s'obtient en ajoutant à γ le cobord de f par rapport à μ, et à φ l'expression

$$\delta_\gamma f - \frac{1}{2} [f,f]^\mu ,$$

où $\delta_\gamma f$ désigne le cobord de f par rapport à γ. La modification est une relation d'équivalence. Dans la *modification au sens large* d'une quasi-bigèbre jacobienne, on peut ajouter de plus à φ un élément ad^μ-invariant φ_1 de $\bigwedge^3 F$, dont le cobord par rapport à γ est nul. Une quasi-bigèbre jacobienne dont le co-crochet est le cobord de la partie antisymétrique d'une solution de l'*équation de Yang-Baxter modifiée* est dite *quasitriangulaire*. Elle est alors équivalente par modification à une quasi-bigèbre jacobienne à co-crochet nul. (Ces remarques sont rédigées dans un article à paraître. Voir aussi M. Bangoura, Sur le cas quasi-triangulaire, *Publ. I.R.M.A. Lille*, à paraître.) Par exemple, on vérifie immédiatement que $sl(2,\mathbb{C})$ munie de sa structure usuelle de bigèbre de Lie quasitriangulaire est équivalente par modification à la quasi-bigèbre jacobienne à co-crochet nul, dont l'élément φ est proportionnel au vecteur de base de $\bigwedge^3(sl(2,\mathbb{C}))$ associé au choix d'une base de $sl(2,\mathbb{C})$.

Faute de temps, les questions concernant les groupes de Lie correspondants, ou *groupes de Lie quasi-Poisson*, n'ont pas été abordées. Elles sont traitées brièvement à la fin de [YKS1], puis dans les notes [YKS2] (b) et (c) et développées dans l'article [YKS3].

Références

La référence fondamentale est

[D] V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras, *Algebra i Analiz* 1 (6) (1989) 114-148, résumé en anglais, Quasi-Hopf algebras and Knizhnik-Zamolodchikov equations, Acad. Sci. Ukr. preprint, ITP-89-43E (1989), trad. anglaise dans *Leningrad Math. J.* 1 (6) (1990) 1419-1457.

Un exposé assez détaillé du point de vue des catégories et une première annonce des résultats concernant quasi-bigèbres jacobiennes et groupes de Lie quasi-Poisson ont été faits dès 1990 et publiés dans

[YKS1] Y. Kosmann-Schwarzbach, From "Quantum groups" to "quasi-quantum groups", *Symmetries in Science V, Algebraic systems, their representations, realizations and physical applications* (Schloss Hofen, Austria, August 1990) B. Gruber, L.C. Biedenharn and H.D. Doebner eds., Plenum Press, New York 1991, 369-393.

L'ensemble des résultats 'classiques' (par opposition à 'quantiques') présentés dans l'exposé ont été annoncés dans trois notes aux Comptes rendus en janvier et février 1991, et rédigés dans un article auquel on pourra se reporter :

[YKS2] Y. Kosmann-Schwarzbach, (a) Grand crochet, crochets de Schouten et cohomologies d'algèbres de Lie, *Comptes rendus Acad Sci. Paris* **312**, série I (1991) 123-126,
(b) Champs affines de multivecteurs sur les groupes de Lie, *ibid.* 233-236,
(c) Quasi-bigèbres de Lie et groupes de Lie quasi-Poisson, *ibid.* 391-394.

[YKS3] Y. Kosmann-Schwarzbach, Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups, *Mathematical Aspects of classical field theory* (Seattle, Washington, July 1991), M.J. Gotay, J.E. Marsden and V.E. Moncrief eds., Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, à paraître.

On trouvera aussi des exposés de la notion de quasi-algèbre de Hopf et des développements concernant les théories conformes des champs, la théorie des nœuds et le point de vue tanakien dans

[C] P. Cartier, Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre, *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 716, novembre 1979.

[S] J. D. Stasheff, Drinfeld's quasi-Hopf algebras and beyond, *Proc. of the Conference on deformation theory with applications to physics* (Amherst, MA, June 1990), M. Gerstenhaber and J. D. Stasheff eds., Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, à paraître.

[DPR] R. Dijkgraaf, V. Pasquier and P. Roche, Quasi-Hopf algebras, group cohomology and orbifold models, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **18B** (1990) 60-72.

[M] Sh. Majid, (a) Tannaka-Krein theorem for quasi Hopf algebras and other results, *Proc. of the Conference on deformation theory with applications to physics* (Amherst, MA, June 1990), M. Gerstenhaber and J. D. Stasheff eds., Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, à paraître.
(b) Quasi-quantum groups as internal symmetries of topological quantum field theories, *Lett. Math. Physics* **22** (2) (1991) 83-90.

URA au CNRS Géométrie, Analyse et Topologie
UFR de Mathématiques pures et appliquées
Université de Lille 1
F-59655 Villeneuve d'Ascq