Yves Benoist

Modules simples et lagrangiens des orbites coadjointes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 42
« Conférences de Y. Benoist, D. Kastler, J.-F. Le Gall, P.-A. Meyer, V. Rivasseau, R. Stora, W. Thirring, I.T. Todorov », , exp. n° 6, p. 63-66
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__42__63_0>

Modules simples et Lagrangiens des orbites coadjointes

par

Yves BENOIST

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente complexe, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie et f un caractère de $\mathfrak{k}$. Nous nous intéressons aux $\mathfrak{g}$-modules simples qui contiennent un vecteur propre sous $\mathfrak{k}$ de valeur propre f lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ est "suffisamment grosse". Lorsque cette hypothèse est satisfaite, nous relions ces $\mathfrak{g}$-modules à certaines variétés lagrangiennes des orbites coadjointes (théorème ci-dessous).

1. — Introduisons quelques notations : soit $U = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Un idéal I de U est dit primitif si il existe un module simple N tel que

$$I = \{u \in U \mid u.N = 0\}$$

de sorte que N est un U/I-module fidèle.

Il existe une bijection construite par DIXMIER [Di] entre l'ensemble $G\backslash\mathfrak{g}^*$ des orbites coadjointes de $\mathfrak{g}$ et l'ensemble $\mathrm{Prim}(U)$ des idéaux primitifs de U.

Soient I un idéal primitif et Ω l'orbite qui lui est ainsi associée : c'est une variété symplectique. Soit $Z = \{\ell \in \Omega / \ell|_{\mathfrak{k}} = f\}$: c'est une sous-variété algébrique et coïsotrope de Ω. Soit $\mathfrak{k}^f = \{X - f(X)/X \in \mathfrak{k}\}$: c'est une sous-algèbre de Lie de U.

Soit G le groupe nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K le sous-groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $S = \{N$, $\mathfrak{g}$-modules simples d'annulateur I tels que $N^{\mathfrak{k}^f} \neq 0\}$ où $N^{\mathfrak{k}^f} = \{n \in N / \mathfrak{k}^f.n = 0\}$.

Notre but est de décrire cet ensemble S.

Soit M le $\mathfrak{g}$-module universel pour ce probème :

$$M = U/_{(I+U.\mathfrak{k}^f)} \,.$$

Décrivons tout d'abord un cas particulier.

2. Cas sphérique. — On suppose qu'il existe un automorphisme σ de $\mathfrak{g}$ tel que $\sigma^2 = Id$ et tel que $\mathfrak{k}$ est l'ensemble des points fixes de σ. On suppose aussi que $f = 0$.

On appelle sphérique un $\mathfrak{g}$-module N tel que $N^{\mathfrak{k}} \neq 0$. Remarquons que $Z = \Omega \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ et que $M = U/(I + U.\mathfrak{k})$.

PROPOSITION ([Be 1])

1) *Si* $Z = \emptyset$ *alors* $M = 0$ *et* $S = \emptyset$.

2) *Si* $Z \neq \emptyset$ *alors* Z *est une* K*-orbite,* M *est un* $\mathfrak{g}$*-module simple et* $S = \{M\}$.

COROLLAIRE. — *Ceci construit une bijection entre l'ensemble des* $\mathfrak{g}$*-modules simples sphériques et l'ensemble des orbites de* K *dans* $\mathfrak{k}^{\perp}$.

3. Cas général. — Reprenons les notations du 1.

THÉORÈME ([Be 2])

(a) *On a l'équivalence :*

Z *est lagrangienne* $\Longleftrightarrow$ S *est fini* $\Longleftrightarrow$ M *est de longueur finie.*

(b) *Dans ce cas :*

α) Z *est une variété lisse.*

β) *On a une bijection canonique* $\omega \to M_\omega$ *entre l'ensemble des composantes connexes de* Z *et l'ensemble* S. *Notons* m_ω *la dimension de* $(M_\omega)^{\mathfrak{k}^f}$.

γ) *On a un isomorphisme de* $\mathfrak{g}$*-modules*

$$M \simeq \bigoplus_{\omega} (M_\omega)^{m_\omega} .$$

En particulier m_ω *est fini et* M *est un* $\mathfrak{g}$*-module semi-simple.*

COROLLAIRE

1) *On a l'équivalence*

$$Z = \emptyset \Longleftrightarrow S = \emptyset \Longleftrightarrow M = 0 .$$

2) *Si* Z *est une* K*-orbite, alors* $M = (M_Z)^{m_Z}$.

Exemple de multiplicité. — Même lorsque Z est une K-orbite, on peut avoir $m_Z \geq 2$: c'est là une différence essentielle avec le cas sphérique.

La démonstration utilise la théorie des D-modules équivariants à la Beilinson-Bernstein.

4. Applications. — Supposons que $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, G, K$ sont les complexifiés de $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, G_0, K_0$, que f appartient à $i\mathfrak{k}_0^*$ (où $i^2 = -1$) et qu'il existe ℓ dans $i\mathfrak{g}_0^*$ tel que $\Omega = G.\ell$. Soient $\Omega_0 = G_0.\ell$, $Z_0 = Z \cap \Omega_0$, π_0 la représentation unitaire irréductible de G_0 associée à Ω_0, $\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}$ l'ensemble des vecteurs distributions de cette représentation et $M_0 = (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{\mathfrak{k}^f}$.

On sait que, par une dualité de Frobenius, la dimension de M_0, pour presque tout π_0, joue un rôle dans la désintégration de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{K}_0}^{\mathrm{G}_0}(\mathrm{X}_\mathrm{f})$ où X_f est le caractère de K_0 dont la différentielle est f.

Notre théorème permet d'obtenir les informations suivantes sur cet ensemble M_0 :

COROLLAIRE. — *On a les implications*

1) Z *est lagrangienne* $\Longrightarrow \dim \mathrm{M}_0 < \infty$

2) $\dim \mathrm{M}_0 < \infty \Longrightarrow \mathrm{Z}_0$ *est lagrangienne*

3) $Z = \emptyset \Longrightarrow M_0 = 0$

4) $M_0 = 0 \Longrightarrow Z_0 = \emptyset$.

Remarques :

(*) Il existe des exemples où Z_0 est une K_0-orbite et où $\dim \mathrm{M}_0 \geq 2$, comme dans le cas "complexe" ci-dessus. Signalons que l'exemple 6.2 de [Be 2] ne s'adapte pas à cette situation "réelle" tel quel : il est nécessaire de le modifier en travaillant dans une algèbre de Weyl A_3 à 3 variables x, y, z et en prenant pour $\mathfrak{k}_0$ la sous-algèbre de Lie engendrée par

$$\partial_x + x\partial_y + y\partial_z, \quad \partial_y + x\partial_z, \quad \partial_z - 1/2\ \partial_x^3$$

et pour $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de dimension 26, engendrée par x, y, z et $\mathfrak{k}_0$.

(*) Il existe des exemples où Z_0 est lagrangienne et où M_0 est de dimension infinie.

(*) Mais nous conjecturons que

$$Z_0 = \emptyset \Longrightarrow M_0 = 0 .$$

[Be 1] *Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente*, Compositio Mathematica, **73** (1990) p. 295–327.

[Be 2] *Modules simples sur une algèbre de Lie nilpotente contenant un vecteur propre pour une sous-algèbre*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., **23** (1990) p. 495–517.

[Di] J. DIXMIER : *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, (1974).