Vincent Rivasseau

Résultats rigoureux sur la limite ultraviolette des théories de jauge non-abéliennes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 42
« Conférences de Y. Benoist, D. Kastler, J.-F. Le Gall, P.-A. Meyer, V. Rivasseau, R. Stora, W. Thirring, I.T. Todorov », , exp. n° 4, p. 35-49
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__42__35_0>

Résultats rigoureux sur la limite ultraviolette des théories de jauge non-Abéliennes

Vincent Rivasseau

Centre de physique théorique, CNRS, UPR14
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

RESUME

Le limite ultraviolette des théories de Yang-Mills pures avec cutoff infrarouge peut être construite dans une jauge axiale régularisée à partir d'un développement d'espace de phase. Elle satisfait des identités de Slavnov non-perturbatives.

A 151 01 92 Février 1992

I. Introduction

Au mois de décembre 89 j'ai fait une conférence de la RCP25, dont le sujet prévu initialement était la construction de la limite ultraviolette des théories de Yang-Mills, mais au cours de laquelle j'ai parlé au contraire d'un travail entamé sur des idées de C. Kopper concernant la fonction bêta de ϕ_4^4. Ce travail n'a pas abouti à ce que j' espérais à l'époque. Au contraire aujourd'hui, deux ans après, l' étude du premier problème a été menée à bien, et voici donc une version écrite de ce que j'aurais dû dire en 89... Il s'agit en gros d'une version en français d'une lettre à paraître dans Phys. Lett. B. [MRS2]. Notre article principal sur ce sujet est un preprint de l'Ecole Polytechnique (référence [MRS]), disponible pour le lecteur plus intéressé. Je remercie à nouveau les organisateurs de la session de décembre 89 pour leur invitation.

Les théories de Yang-Mills sont les seules théories des champs renormalisables et asymptotiquement libres en dimension 4, ce qui explique leur succès en physique des particules. Bien des physiciens pensent que la limite ultraviolette, qui est "purement perturbative" ne réserve aucune surprise. Pourtant une construction rigoureuse de cette limite se révèle, à cause de l'invariance de jauge, un problème technique très ardu, en fait beaucoup plus ardu que la construction d'un modèle juste renormalisable simple comme le modèle de Mitter-Weisz aussi appelé de Gross-Neveu massif à deux dimensions [FMRS1][GK].

Jusqu'à présent on ne disposait que du programme de Balaban [B] (ainsi que de celui, voisin, mais non-terminé de Federbush [F]). Dans ce programme qui s'étale sur des centaines de pages du journal CMP, on définit pour la théorie de Yang-Mills sur réseau des transformations de block spin, et l'on construit une action effective dont on montre qu'elle reste bornée après un grand nombre d'itérations. De cette façon on doit pouvoir construire au moins à l'aide de suites extraites des limites ultraviolettes pour les observables invariantes de jauge. La somme fournie par Balaban est évidemment très impressionnante. Toutefois son travail reste hélas peu accessible et peu reconnu à la fois des physiciens et des mathématiciens. En collaboration avec J. Feldman, J. Magnen et R. Sénéor nous avons commencé à réfléchir à ce problème il y a environ six ans. Nous voulions comprendre l'œuvre de Balaban, afin, comme je l'ai parfois entendu dire plaisamment, que le secret des théories de jauge ne meure pas avec lui. Plutôt que de plonger dans ses articles avec courage, nous nous sommes dit qu'il était au fond plus intéressant et plus significatif de refaire le travail complètement à notre façon. Après quelques résultats préliminaires sur la stabilité des cutoffs ultraviolets Joel Feldman a quitté le programme. Nous avons erré quelques années dans la jungle des ambiguïtés de Gribov. Je me suis découragé à mon tour. En définitive sans la ténacité de Jacques Magnen, je crois que notre équipe aurait abandonné. Nous sommes arrivés dans les deux dernières années à quelque chose de satisfaisant bien que loin de la solution simple et transparente que nous espérions au départ. Notre solution est exposée dans [MRS] en un seul article, qui suppose malgré tout une solide connaissance de nos méthodes de théorie constructive, exposées par exemple dans [R]. Nous sommes conscients qu'une version plus détaillée de plusieurs centaines de pages serait en fait bien utile, mais je crois que nous n'aurons pas le courage d'y consacrer les quelques années supplémentaires nécessaires. En définitive par des méthodes bien différentes nous arrivons en gros au même message que Balaban: construire la limite ultraviolette est possible en utilisant certains types de cutoffs stables et la positivité de la jauge axiale, mais au prix d'une assez lourde machinerie, peu transparente, dont malgré tous nos efforts nous ne voyons décidément pas bien comment on pourrait notablement la simplifier.

Dans notre approche nous obtenons, contrairement à Balaban, les fonctions de Schwinger de la théorie dans la jauge axiale, et comme nous ne pouvons vérifier d'axiomes (à cause du volume fini) nous justifions notre construction en montrant que les fonctions de Schwinger que nous construisons satisfont de façon non perturbative aux identités de Slavnov naturelles de la jauge axiale. Hélas, ces identités n'expriment pas vraiment une parfaite "covariance" de jauge, au sens où le volume fini, ou cutoff infrarouge de la théorie, que nous ne pouvons enlever, crée des termes de bord. Ces termes de bord sont tout de même calculables, ne dépendent pas du cutoff ultraviolet, et c'est en ce sens là que notre construction est justifiée.

Enlever le cutoff infrarouge conduirait à des problèmes de couplage fort (type confinement des quarks) que nous ne savons pas traiter pour le moment. Nous ne traitons pas non plus les aspects topologiques non-triviaux des théories de jauge tels que les instantons.

B) Le modèle. Cutoffs ultraviolet stables

Nous plaçons la théorie euclidienne de Yang-Mills dans un volume fini Λ avec des conditions au bord. Nous n'essayerons pas de traiter la brisure de la symétrie de jauge correspondante. Comme annoncé cette brisure ne dépend toutefois pas du choix de notre cutoff ultraviolet.

Nous nous sommes aussi limités au cas de la théorie SU(2) pure sans champs de matière. Dans des cas plus compliqués les opérateurs et les graphes à calculer sont plus nombreux, mais notre méthode devrait encore pouvoir s'appliquer.

Le champ principal est le potentiel vecteur $A^a_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3, /; a = 1, 2, 3$. Nos conventions sont celles de [IZ]. Nous omettons le plus souvent les traces et autres indices, en espérant que le lecteur les reconstituera. La dérivée covariante est $D_\mu = \partial_\mu - g[A_\mu, .]$. La courbure est:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g[A_\mu, A_\nu] = (\partial \wedge A - g[A, A]) \ , \qquad \text{(B.1)}$$

g étant la constante de couplage. L'action de Yang-Mills n'est autre que le carré de la courbure. Pour une métrique triviale sur un hypercube Λ ordinaire, cette action s'écrit

$$-\frac{1}{2}\int_\Lambda d^4x Tr F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\int_\Lambda d^4x \sum_a F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} \ . \tag{B.2}$$

Pour simplifier nous définissons un produit scalaire $< A, B >$ qui contient une trace sur les indices d'espace temps et moins une trace sur les indices de groupe (les matrices de base étant antihermitiennes dans [IZ]). De cette façon le produit scalaire est positif défini avec un facteur 1/2 par rapport aux douze composantes du champ. L'action s'écrit alors plus simplement $\frac{1}{2}\int_\Lambda F^2$. Il est utile pour la théorie des perturbations de distinguer les parties quadratiques, trilinéaires et quartiques de cette action à l'aide de la constante de couplage g:

$$F^2 = F_2 + gF_3 + g^2F_4 \tag{B.3}$$

L'action est invariante sous les transformations de jauge:

$$A \to A^{\mathbf{g}} : (A^{\mathbf{g}})_\mu = \mathbf{g}A_\mu\mathbf{g}^{-1} + g^{-1}\partial_\mu\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}^{-1} \tag{B.4}$$

Pour des transformations infinitésimales on a la version linéarisée de (B.4):

$$A \to A^\gamma : (A^\gamma)_\mu = A_\mu + D_\mu\gamma \tag{B.5}$$

où γ prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie de SU(2).

Nous voulons donner un sens à la mesure formelle de Feynman-Kac:

$$e^{-(1/2)\int_\Lambda F^2} \prod_{x\in\Lambda,a,\mu} dA^a_\mu(x) \tag{B.6}$$

où entre autres problèmes le produit infini de mesures de Lebesgue en chaque point est mal défini.

La stratégie de base de la théorie constructive consiste à intégrer à ce produit la partie quadratique de l'action de façon à disposer pour point de départ d'une mesure gaussienne bien définie par le théorème de Minlos. Ensuite on met un cutoff ultraviolet pour définir correctement les produits de distributions correspondant aux termes non quadratiques dans l'action, et on tente un développement perturbatif si la constante de couplage est petite. Ce développement dans le cas de théories renormalisables doit être multi-échelles, et inclut le calcul de flots pour les constantes effectives correspondant aux opérateurs à renormaliser. Ici dès le départ à cause de l'invariance de jauge on a un grand nombre de directions plates dans la mesure formelle (B.6), et déjà au niveau de la mesure gaussienne on n'a qu'une positivité indéfinie. Dans le cas de Balaban on cherche à définir seulement des quantités invariantes de jauge et on peut faire le pari que les grands volumes du groupe de jauge se quotienteront alors dans la théorie normalisée. Pour nous qui voulons par contre construire les fonctions de Schwinger il faut absolument combler ces trous de positivité et la méthode naturelle est d'introduire pour cela une condition de jauge.

Les jauges invariantes euclidiennes adaptées aux calculs perturbatifs sont du type Feynman ou Landau. On les obtient par la formule de Fadeev-Popov:

$$\epsilon^{-(1/2)\left(\int^{\Lambda} F^2 - \lambda(\partial_\mu A_\mu)^2\right) + \partial_\mu \bar{\eta}\partial_\mu \eta + g\partial_\mu \bar{\eta}[A_\mu, \eta]\right)} \prod_{x\in\Lambda, a} d\eta^a(x) d\bar{\eta}^a(x) \prod_{x\in\Lambda, a, \mu} dA^a_\mu(x) \tag{B.7}$$

où $\bar{\eta}$ et η sont les célèbres fantômes. Pour $\lambda = 1$ on a la jauge de Feynman, pour $\lambda = +\infty$ la jauge de Landau, etc... Dans le cas de $SU(2)$ un choix agréable correspond à λ proche de $3/13$, car vers cette valeur la renormalisation de fonction d'onde devient nulle. Nous appelons cette jauge la jauge d'homothétie, ou la jauge perturbative.

Notre première tâche semble être de bâtir un analogue bien défini avec cutoff ultraviolet pour la mesure (B.7). Nous avons poursuivi plusieurs années cette piste avant de renoncer. Faisons ici un bref résumé de notre pénible expérience.

Le premier problème lié à l'introduction d'un cutoff ultraviolet, c'est qu'il brise l'invariance de jauge. Même le cutoff sur réseau à la Wilson, dont on dit tant qu'il conserve l'invariance de jauge, ne laisse en fait subsister que l'invariance discrétisée correspondant aux transformations définies sur les sites du réseau. Un avantage évident du cutoff sur réseau par contre est sa stabilité à grand champ, en ce sens que les intégrations des variables de sites se font sur le groupe compact SU(2), donc pas de problèmes pour "intégrer les grands champs", puisqu'en un sens il n'y en a a pas. Nous traduisons cela du point de vue des variables de l'algèbre de Lie en considérant que le cutoff sur réseau impose un cutoff naturel sur la taille du champ de l'ordre de la taille naturelle d'enroulement de l'exponentielle sur le groupe, c'est à dire de l'ordre de g^{-1} avec la convention (B.1). Nous dirons que de tels cutoffs sont stabilisant à grand champs, ou plus simplement qu'ils sont stables. Cette propriété semble tout à fait nécessaire à la construction de la théorie, mais n'est pas suffisante. Tout d'abord il n'est pas clair que la propriété de stabilité se conserve pour la théorie effective à basse énergie lorsque l'on itère une analyse multiéchelle. Dans le cas de Balaban on introduit des moyennes de block spin qui réexponentient les variables effectives pour les ramener sur le groupe après chaque transformation. Cela introduit des complications techniques et la cohérence de cette procédure n'est finalement guère transparente.

Pour ces raisons, parce que l'utilisation du cutoff sur réseau est la source de complications techniques dans l'écriture des propagateurs, et aussi il faut bien le dire, afin de nous distinguer du travail de Balaban, nous avons cherché d'autres types de cutoffs stables, pour lesquels la conservation de la stabilité sous itération du groupe de renormalisation prendrait la forme plus transparente du simple flot d'un opérateur non invariant de jauge très simple, du type A^4.

Dans ce but on peut bien sûr imposer un cutoff de moment, du type Pauli-Villars, ou bien à support compact, etc... sur la mesure gaussienne (B.6). Mais comme ce cutoff brise l'invariance de jauge il n'est pas raisonnable d'espérer la retrouver dans la limite de cutoff infini si l'on n'inclut pas des contretermes appropriés. Heureusement il n'est nécessaire d'inclure que les contretermes correspondant aux opérateurs relevants ou marginaux au sens du groupe de renormalisation, les autres opérateurs n'ayant pas d'influence sur la théorie à échelles finies lorsque l'on fait tendre le cutoff vers l'infini. Pour un champ à douze composantes on pourrait à priori avoir des centaines d'opérateurs quartiques, mais heureusement grâce à l'invariance euclidienne et l'invariance de jauge globale des cutoffs que nous considérons, il suffit par exemple de considérer dans le cas de SU(2) les deux opérateurs A^2 et A^4 en sus des opérateurs déjà présents dans l'action comme F_2, F_3 ou F_4. De plus il suffit grâce à la liberté asymptotique, de calculer le contreterme en A^4, dont le rôle est essentiel, à l'ordre d'une boucle seulement. Nous avons fait ce calcul il y a longtemps en collaboration avec J. Feldman et nous avons trouvé que le résultat, pour un cutoff de moment, dépend de la forme de ce cutoff, mais que pour toute une catégorie de cutoffs (par exemple pour ceux de la forme de la Figure 1 avec la constante K suffisamment grande), le contreterme en A^4 a le bon signe de sorte qu'en l'incluant la théorie est automatiquement stabilisée à des valeurs de A de l'ordre de g^{-1}. On peut trouver cette analyse dans [S1], [R] ou [MRS].

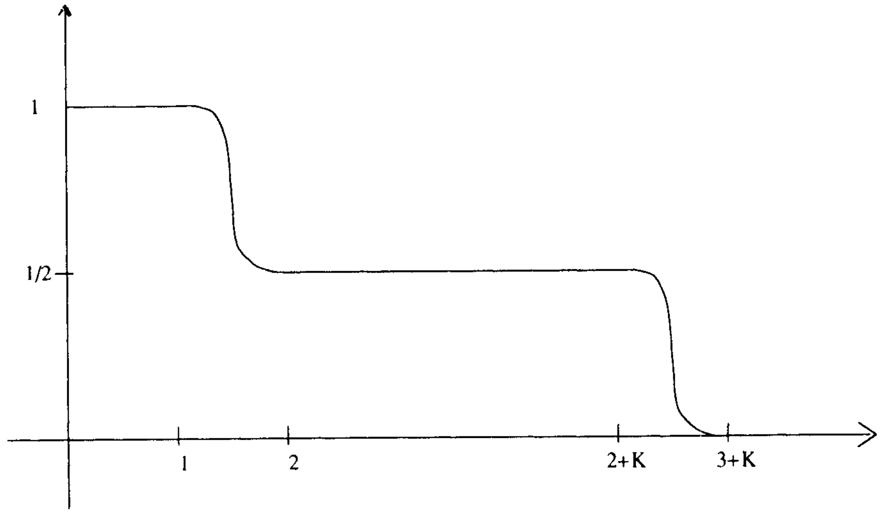

Fig.1: Le cutoff ultraviolet dans les moments

L' intégrale fonctionnelle avec cutoff présentera alors l'avantage d'être bien définie. En effet F_4 est positif, F_3 est seulement cubique, et les intégrales fonctionnelles de fermions avec cutoffs peuvent être définies simplement par sommation des séries perturbatives correspondantes [FMRS1][R]. La taille des champs typiques que le terme en A^4 stabilise est de l'ordre de g^{-1}, puisque le contreterme en A^4, donné par les graphes de la Figure 2, est à l'ordre d'une boucle de la forme $g^4 A^4$.

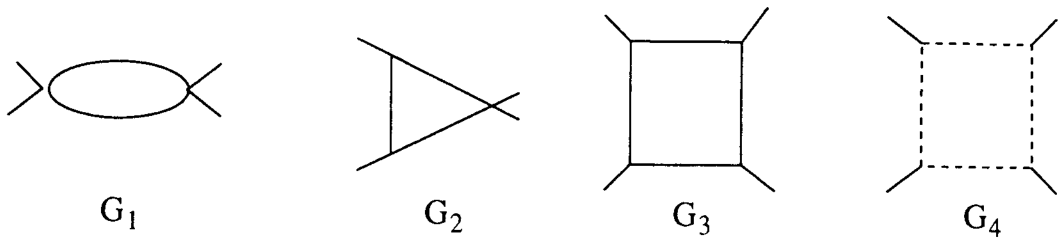

Fig.2: Les quatre graphes contribuant à l'ordre d'une boucle au terme en A^4

En introduisant le cutoff à une échelle M^ρ avec M un entier fixé quelconque, nous avons un point de départ raisonnable pour la théorie nue:

$$e^{-(1/2)\left(\int_\Lambda F_3+F_4+CT(A)+\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta+g\partial_\mu\bar{\eta}[A_\mu,\eta]\right)} d\mu_\rho(A,\bar{\eta},\eta) \tag{B.8}$$

où $d\mu$ est une certaine mesure gaussienne sur les champs A ayant pour covariance le propagateur de la théorie avec condition de jauge, c'est à dire

$$\delta_{ab}\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} + (1/\zeta - 1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^4}\right) .$$

plus une mesure gaussienne de Berezin sur les champs $\eta, \bar{\eta}$ correspondant au propagateur des fantômes δ_{ab}/p^2. CT désigne l'ensemble des contretermes nécessaires pour restorer l'invariance de jauge. Pour A grand, CT se comporte comme $+c.g^4 A^4$, où c est une constante positive. Dans (B.8) on choisit la constante de couplage nue

$$g_\rho = \frac{1}{\beta_2(LogM)\rho + \beta_3/\beta_2 \log\rho + C} \tag{B.9}$$

où C est une grande constante et β_2 et β_3 sont comme d'habitude les deux premiers coefficients non nuls de la fonction bêta du problème. Le choix de (B.9) est celui auquel on s'attend afin d'aboutir à une constante renormalisée g_{ren} (la dernière dans une suite croissante de constantes effectives) qui soit finie lorsque $\rho \to \infty$ (et petite si C dans (B.9) est grand). Cette partie de l'analyse, commune à toute les théories asymptotiquement libres, est aujourd'hui bien comprise [FRMS1],[GK],[R].

Bien que le point de départ (B.8) semble raisonnable, nous n'avons pu construire pour lui la limite ultraviolette. En effet il n'y a pas dans (B.8) de positivité exploitable pour réduire nettement, au moins en probablité, la taille du champ par rapport à g^{-1}. A cette taille là on n'échappe pas à l'apparition de phénomènes complexes connus sous le nom d'ambiguïtés de Gribov.

C) Le problème de Gribov

Pour faire l'analyse détaillée de l'intégrale fonctionnelle (B.8) à l'aide d'un développement d'espace de phase comme il est d'usage en théorie constructive, il nous faut savoir que cette intégrale fonctionnelle est dominée par la région perturbative, où le poids des termes d'interaction est faible par rapport à celui de la mesure gaussienne. Cette condition est bien du type $A << g^{-1}$ si l'on se réfère à (B.1-3). Or rien dans (B.8) ne nous permet d'affirmer que tel est bien le cas. En particulier le terme en A^4, qui fournit la stabilité à grands champs, à lui tout seul, nous dit seulement que $A \simeq g^{-1}$. Grâce à lui, le poids fonctionnel des régions $A > g^{-1}$ est borné, mais pas spécialement petit.

Il semble bien qu'il y ait de la positivité supplémentaire dans la mesure gaussienne, mais pour l'exploiter encore faudrait il disposer sur la combinaison $F_3 + F_4$ d'une borne qui ne recompense pas exactement la positivité de F_2 plus celle de la condition de jauge. Or les résultats de Gribov montrent qu'une telle borne, si elle existe, est certainement très subtile.

Gribov a découvert en effet [G] que dans la jauge de Landau il y avait des configurations régulières du champ qui sont cependant reliées par une transformation de jauge. En d'autres termes la condition de jauge de Landau n'est pas une vraie jauge, au sens où elle ne sélectionne pas un représentant unique sur chaque orbite du groupe de jauge.

Une configuration $A_2 \neq A_1$ telle que $\partial_\mu A_{\mu 1} = \partial_\mu A_{\mu 2} = 0$ et telle qu'il existe une transformation de jauge $\mathbf{g}$ avec $A_1 = A_2^{\mathbf{g}}$ ($A^{\mathbf{g}}$ étant défini par (B.4)) s'appelle une copie de Gribov de A_1. On peut montrer qu'il y a toujours des configurations qui possèdent des copies; ceci est vrai même sur un espace compact et à l'intérieur d'un secteur topologique donné. C'est aussi vrai pour toutes les jauges régulières du type (B.7) et non pas seulement pour la jauge de Landau. Par contre dans certain cas on peut exclure l'existence de copies de l'origine, c'est à dire de la configuration nulle $A(x) \equiv 0\ \forall x$. On peut avoir de telles copies (des jauges pures non-triviales qui satisfont la condition de jauge) sur $\mathbb{R}^4$ en autorisant une décroissance lente à l'infini (en $1/r$) [G], mais dans un secteur topologique donné d'un espace compact (par exemple pour les fonctions lisses sur le tore ou les fonctions lisses nulles en dehors d'un compact fixe) on peut montrer qu'il n'y a pas de copies de Gribov de la configuration nulle (voir [R]). De tels résultats explicites montrent bien (comme les jauges pures sont les seules configurations d'action nulle) que sous ces conditions l'origine est bien un minimum absolu de la combinaison action F^2 + condition de jauge $(\partial_\mu A_\mu)^2$, et qu'il y a donc dans (B.8) une certaine positivité stricte. Malheureusement cette positivité agit seulement de manière efficace pour des configurations dont les moments sont de l'ordre de la taille inverse de l'espace compact sur lequel on travaille. En termes intuitifs il s'agit là seulement d'une positivité liée à la condition au bord dûe à notre cutoff infrarouge. Elle n'est pas exploitable à notre avis pour l'analyse des fréquences élevées de la théorie.

D'autre part il est impossible même en tenant compte du cutoff infrarouge d'éviter l'existence de copies de Gribov de configurations non-triviales, autres que l'origine. De telles copies pullulent en particulier au voisinage de vecteurs dans le noyau de l'opérateur de Fadeev-Popov:

$$K = -\partial_\mu D_\mu = -\Delta + g\partial_\mu[A_\mu,.] \tag{C.1}$$

Pour $g = 0$ cet opérateur de Fadeev-Popov n'est autre que le Laplacien ordinaire, donc il est positif défini, si l'on retire de la théorie le mode constant. Mais pour g et A non nuls, il est possible de montrer par une homothétie $A \to k \cdot A$ que K a nécessairement des valeurs propres négatives pour k assez grand (on peut interpréter physiquement de telles valeurs propres négatives comme des états liés de fantômes).

Les configurations pour lesquelles $\det K = 0$ s'appellent les horizons de Gribov. Le passage par zéro de la première valeur propre non-triviale définit le premier horizon, etc... A l'intérieur de ce premier horizon, l'opérateur K est donc bien positif : on dit alors que l'on est dans la première région de Gribov. Dans [G] on montre qu'au voisinage d'un horizon les copies de Gribov apparaissent génériquement par deux, une de chaque côté de l'horizon. Ces copies peuvent parfaitement décroître rapidement à l'infini, ou être C_0^∞, donc ne sont pas éliminées par le cutoff infrarouge.

L'existence de ces copies est certainement troublante, d'une part parce qu'elle traduit au moins un manque de monotonicité dans la croissance de la combinaison action + condition de jauge (ceci pourrait déjà constituer une sérieuse complication technique), mais aussi parce qu'elle jette un doute sur la légitimité des formules (B.7-8), avec déterminant de Fadeev-Popov. Comme l'opérateur de Fadeev-Popov n'est pas défini positif à grands champs, on doit conclure que les formules ordinaires pour l'intégrale fonctionnelle correspondent à des mesures signées, une situation tout à fait inhabituelle et bien inquiétante du point de vue des axiomes ou de l'unitarité de la théorie.

Les optimistes peuvent rêver d'un scénario comme celui proposé par Hirschfeld [H], dans lequel cette mesure signée, bien que calculée heuristiquement, se ramène à la bonne mesure positive. L'argument de Hirschfeld s'appuie sur l'observation que lorsque l'on s'éloigne de l'origine (qui dans notre cas grâce à la condition de cutoff infrarouge, n'a pas de copies) les copies de Gribov doivent génériquement apparaître par paires avec des valeurs égales de l'action et des valeurs oppposées du déterminant de Fadeev-Popov. Ces copies se compensent donc exactement, et la prescription naïve pourrait en ce sens être équivalente à la prescription sophistiquée correspondant à une intégrale fonctionnelle positive sur l'espace des orbites du groupe de jauge. Même si l'argument de Hirshfeld se révèle correct, il ne nous semble pas possible d'en donner une version rigoureuse exploitable pour la théorie constructive.

Une autre approche envisageable consiste à renforcer la condition de jauge défaillante en lui adjoignant en certain nombre de restrictions non-pertubatives supplémentaires destinées à éliminer exactement toutes les copies tout en gardant le poids ordinaire dans le domaine ainsi défini. C'est par exemple le point de vue proposé par Zwanziger [Z] ou Dell Antonio. Là encore les conditions supplémentaires semblent très difficiles à définir exactement et dans cette voie la construction de la limite ultraviolette n'est probablement pas à la portée de nos méthodes.

Mentionnons enfin pour mémoire la méthode de la quantification stochastique à la Parisi-Wu dans lequel la mesure correcte est obtenue en quelque sorte comme dans les calculs Monte-Carlo par introduction d'un temps supplémentaire. Les mêmes remarques s'appliquent à ce programme en ce qui concerne le passage à la théorie constructive.

En fin de compte et malgré nos solides préjugés initiaux nous en sommes venus à la jauge axiale, qui a l'immense mérite de contenir une véritable positivité exploitable.

D) La jauge axiale régularisée

Pour cette section il est commode de considérer la première coordonnée x_0 comme un temps (bien qu'on soit dans l'euclidien) et de la distinguer des trois autres, consideérées comme spatiales. La jauge axiale est définie par la condition $A_0 = 0$. Cette condition ne fixe pas complètement l'invariance de jauge (il reste l'invariance par les transformations indépendantes du temps x_0). Remarquons que pour utiliser cette jauge on n'a pas besoin de payer le prix d'un déterminant de Fadeev-Popov (plus précisément ce déterminant est une constante qui disparaît dans la normalisation). Ce fait, à la lumière de la section précédente, est certainement à rapprocher de la meilleure positivité de cette jauge. Les défauts de la jauge axiale sont la perte de l'invariance euclidienne et l'aspect singulier du propagateur en $1/p_0^2$. Toutefois l'invariance euclidienne devrait être récupérée pour les quantités physiques invariantes de jauge, dont la définition correcte fait appel à des opérateurs composites tels que l'action. Nos méthodes devraient en fait permettre la construction de la limite ultraviolette pour de tels opérateurs convenablement renormalisés, mais nous ne l'avons pas fait et nous nous sommes limités pour l'instant à la construction des fonctions de Schwinger.

En jauge axiale l'action s'écrit:

$$e^{-(1/2)(<A,p_0^2A>+F_{sp}^2)} \tag{D.1}$$

où F_{sp} représente la partie spatiale de l'action (les valeurs 1,2 et 3 de l'indice μ dans (B.1)).

Il est au fond facile de s'apercevoir que cette fois dans la combinaison de l'action, de la condition de jauge et d'un terme stabilisant de type g^4A^4 réside une forte positivité. Celle-ci, au prix d'une analyse anisotropique, nous affirme maintenant qu'en probabilité le champ est de l'ordre de $g^{-1/2}$ et non pas g^{-1}, une amélioration immense qui nous place au cœur de la zone perturbative, loin des horizons et ambiguïtés de Gribov, là où changements de jauge rigoureux et explicites ainsi que développements perturbatifs deviennent enfin possibles. En effet si l'on remplace le terme en g^4A^4 par un terme quadratique $g^2 < A, p^2A >$ du même ordre (marginal) mais moins fort à grand champ, on peut joindre ce terme quadratique au terme en p_0^2 dans (D.1). On obtient une covariance $1/(p_0^2 + g^2p^2)$ qui se comporte donc dans l'espace direct comme $\int_{1\leq|p|\leq M^\rho} d^4p/(p_0^2 + g^2p^2)$ c'est à dire comme $M^{2\rho}g^{-1}$, ce qui indique bien en probabilité une taille du champ en $M^\rho g^{-1/2}$. Dans ce calcul trivial mais instructif nous avons mimé les cutoff ultraviolet et infrarouge par les conditions naïves $1 \leq |p| \leq M^\rho$; il faut bien sûr en réalité une analyse d'espace de phase plus complexe et *anisotrope*, avec des cellules de moment de type rectangulaires qui précisent à la fois l'ordre de grandeur de p^2 et de p_0^2. Les cellules duales, dans l'espace direct, sont donc aussi rectangulaires, et la présence de deux échelles (longueur et largeur) dans ces cellules constitue finalement une complication technique importante de notre méthode.

La jauge axiale, qui n'est pas totalement une jauge, ne convient pas aux calculs perturbatifs. Nous utiliserons donc aussi une jauge perturbative du type Feynman (avec $\lambda \simeq 3/13$) à laquelle nous allons nous ramener par des calculs explicites lorsque le champ sera suffisamment petit.

E) Le développement d'espace de phase. La normalisation des régions de grands champs

A partir du moment où, en probabilité au moins, on se trouve dans la région où la mesure gaussienne est beaucoup plus importante que les termes d'interaction, on peut tenter d'enclencher un développement d'espace de phase qui consiste en une série de développements de type "cluster" dans des tranches de moments. Le succès n'est pas absolument garanti d'avance, car il faut trouver des interpolations de découplage qui préservent la positivité dans le cas de théories bosoniques, ainsi que des règles techniques satisfaisantes pour ne pas trop produire ou pour "dominer" les champs mal-localisés produits par le couplage entre fréquences, pour séparer les grands champs (traités par une analyse grossière, car improbables) des petits champs (traités avec toute la finesse du groupe de renormalisation perturbatif), etc.... C'est encore tout un art dans lequel chaque équipe a ses secrets de menuiserie.

Dans le cas des théories de jauge il a fallu mobiliser le ban et l'arrière ban de nos astuces. Plus encore que dans le cas déjà bien compliqué du modèle non-renormalisable "Gross-Neveu$_3$" [CMSV] la panoplie technique est lourde et chaque pas nécessite un redécoupage sans qu'aucune simplification notable n'apparaisse jamais par chance entre les étapes. C'est en ce sens que nous avons renoncé à une tentative de formalisation complète (à la Balaban). Voici cependant un essai de liste ou de guide des difficultés rencontrées, sous forme résolument descriptive et qualitative.

L'un des principaux problèmes rencontrés dans l'analyse multiéchelle d'une théorie des champs, c'est le problème dit de domination. Les champs de bas moments qui testent le couplage des bas et hauts moments dans une cellule de haut moment donnée ont tendance à proliférer, simplement parce que à bas moments les cellules spatiales sont plus grandes et contiennent donc beacoup de cellules de haut moments. Si ces champs sont intégrés à l'aide de la mesure gaussienne, la divergence en n ! de la série des perturbations apparaît dans toute son horreur. Si donc on veut mieux borner ces champs trop nombreux on doit les réenrouler dans l'exponentielle de l'interaction, ou ce qui revient au même, les borner à l'aide de cette interaction (effective). C'est cette procédure que nous appelons domination. Dans le cas des théories de jauge on découvre tout d'abord qu'un certain nombre de termes de couplage entre hautes et basses fréquences résiste à ce traitement. Si A, η, η désignent le champ et les fantômes de haute fréquence et B le champ de basse fréquence ou de "background", il s'agit de tous les commutateurs de type $[A, B]$, et des termes $\partial\eta[\eta, B]$.

Nous remarquons que l'on peut réabsorber exactement ces termes dans le propagateur du champ de haute fréquence à condition de remplacer les dérivées ordinaires agissant sur les champs de haute fréquence par des dérivées covariantes par rapport au champ B. C'est là certainement une conséquence profonde de l'origine géométrique des théories de jauge, et la clé du problème de domination dans ce contexte. Néanmoins le remplacement de dérivées ordinaires par des dérivées covariantes ne va pas sans lourdes complications techniques. La jauge perturbative à laquelle nous nous ramenons pour les calculs perturbatifs devra elle aussi dépendre du champ de background B, ce qui réagit à son tour sur le calcul du déterminant de Fadeev-Popov, et sur la définition des tranches de moments elles-mêmes, dans la mesure où celles-ci doivent, dans certains cas, être translatées autour du zéro de l'opérateur D^2 et non pas du zéro ordinaire du Laplacien.

Un autre problème technique délicat intervient dans le calcul des contretermes restaurant l'invariance de jauge. Ce calcul doit être fait dans la jauge perturbative, et pour qu'il y soit simple, nous avons pris des cutoffs ultraviolets de forme simple dans la jauge perturbative. Cela signifie que pour notre théorie de départ dans la jauge axiale le cutoff est le transformé d'un cutoff simple par une formule compliquée.

Afin de définir les régions ou l'on va introduire la jauge perturbative et faire des calculs précis, il nous faut introduire cellule par cellule de l'espace de phase, une division entre grands champs $A >> g^{-1/2}$, et petits champs. Les cellules de grands champs semblent très supprimées en probabilité grâce à la positivité de la jauge axiale, mais nous allons voir que cet effet n'est convaincant qu'à posteriori après prise en compte de leur normalisation différente. Seule la partie de grand champ du champ de bas moment devra réellement être traitée comme un champ de background, la partie de petit champ pouvant être dominée grâce à la condition de petits champs elle-même.

Dans l'ensemble des cellules de petits champs nous pouvons introduire à la main une sorte de formule de Fadeev-Popov rigoureuse avec cutoffs qui en fait transforme le champ et le met dans la jauge perturbative (c'est si l'on veut, un changement de variable dans l'intégrale fonctionnelle qui met en évidence le volume du groupe de jauge afin de le factoriser). La théorie obtenue ainsi dans les zones de petits champs est donc formulée dans une jauge perturbative dépendant du champ de background local. Ce champ de background, bien que lentement variable, n'est pas constant, ce qui entraîne une nouvelle difficulté technique importante: le propagateur n'étant pas invariant par translation, les développements de cluster spatiales dans chaque tranche de moments doivent être précédés d'un important développement auxiliaire afin de se ramener au cas d'un champ de background constant.

Un dernier problème, le plus intéréssant peut-être, se pose lorsque comme ici, on a utilisé des mesures gaussiennes différentes donc en fait des normalisations différentes pour les régions de grands champs et de petits champs. Les facteurs petits attachés à chaque cellule de grands champs sont ils suffisants pour compenser aussi la différence de normalisation? La réponse n'est pas immédiate et n'est nullement acquise d'avance. Nous montrons que dans la normalisation d'une cellule de grands champs on doit prendre en compte un certain rapport de déterminants correspondant à la normalisation de toute la région de petits champs de fréquences supérieures pour laquelle cette cellule de grands champs apparaît comme "background". Ce déterminant s'ajoute à celui de Fadeev-Popov pour former en définitive le poids relatif d'une cellule de grands champs (avec les modifications entraînées par l'usage de dérivées covariantes pour les champs de fréquences plus élevées) par rapport au cas où cette cellule est de petits champs et le background correspondant est nul.

La vérification cruciale consiste donc à chercher si le facteur petit de probabilité dû à la positivité de la jauge axiale (qui est exponentiellement petit dans une puissance de la constante de couplage) est suffisant pour compenser ce poids relatif. La réponse est oui, mais elle dépend là aussi de la propriété de stabilité du cutoff ultraviolet général. En effet ce poids relatif des normalisations apparaît sous la forme de déterminants dont le comportement dominant, lorsque le cutoff ultraviolet est élevé, est donné par le terme en B^2 qui est le seul terme relevant au sens du groupe de renormalisation. Ce terme diverge quadratiquement et l'essentiel de sa contribution est donc concentrée au voisinage du cutoff ultraviolet de la théorie, ce qui explique là encore le rôle clé de la forme de ce cutoff. Le coefficient de ce terme peut être calculé explicitement, et nous montrons que son signe est le bon dans le cas d'un cutoff stable.

En définitive le développement complet converge si la constante de couplage renormalisée reste petite, c'est à dire si la constante C dans (B.9) est assez grande. Les fonctions de Schwinger obtenues ainsi vérifient en un sens non-perturbatif les identités de Slavnov correspondant à la jauge axiale, à des termes de correction près dûs au cutoff infrarouge, attachés au bord du volume Λ (comme indiqué plus haut). Il est à noter que l'essentiel de la construction étant faite dans la région de petits champs, où l'on utilise la jauge perturbative, on a aussi pour les fonctions correspondantes les identités de Slavnov de la jauge perturbative à tous ordres dans la constante de couplage, mais dans ce cas les zones de grands champs apparaissent comme des termes correctifs exponentiellement petit dans une puissance de la constante de couplage.

Remerciements Outre mes collaborateurs je remercie T. Balaban pour son travail étonnant, ainsi que F. Dyson et A. Wightman pour leurs encouragements à divers moments sur la longue route menant à ce travail.

REFERENCES

[B] T. Balaban, Comm. Math. Phys. 95, 17 (1984), 96, 223 (1984), 98, 17 (1985), 99, 75 (1985), 99, 389 (1985), 102, 277 (1985), 109, 249 (1987), 116, 1 (1988), 119, 243 (1988), 122, 175 (1989), 122, 355 (1989).

[CMSV] C. de Calan, J. Magnen, R. Sénéor et P. da Veiga, preprint Ecole Polytechnique, en préparation.

[F] P. Federbush, A phase cell approach to Yang-Mills theory I-VII, Comm. Math. Phys 107, 319 (1986), 110, 293 (1987), 114, 317 (1988); Ann Inst. Henri Poincaré, 47, 17 (1987).

[FMRS1] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau et R. Sénéor, A renormalizable field theory: the massive Gross-Neveu model in two dimensions, Comm. Math. Phys. 103, 67 (1986).

[G] V. Gribov, Quantization of non-abelian gauge theories, Nucl. Phys. B139, 1 (1978).

[GK] K. Gawedzki et A. Kupiainen, Gross-Neveu model through convergent perturbation expansions, Comm. Math. Phys. 102, 1 (1985).

[H] P. Hirschfeld, Strong evidence that Gribov copying does not affect the gauge theory functional integral, Nucl. Phys. B157, 37 (1979).

[IZ] C. Itzykson et J.B. Zuber, Quantum field theory, Mc Graw et Hill, New-York, 1980

[MRS1] J. Magnen, V. Rivasseau et R. Sénéor, Construction of YM_4 with an infrared cutoff, preprint Ecole Polytechnique, 1992 (soumis à Comm. Math. Phys.).

[MRS2] J. Magnen, V. Rivasseau et R. Sénéor, Rigorous results on the ultraviolet limit of non-Abelian gauge theories, preprint Ecole Polytechnique, 1992 (soumis à Phys. Lett. B).

[R] V. Rivasseau, From perturbative to constructive renormalization, Princeton University Press, 1991.

[S1] R. Sénéor, in Renormalization of Quantum Field Theories with Non-Linear Field Transformations, P. Breitenlohner, D. Maison et K. Sibold Eds, Lecture Notes in Physics n° 303, Springer Verlag, 1988.

[S2] I. Singer, Some remarks on the Gribov Ambiguity, Comm. Math. Phys. 60, 7 (1978).

[V] P. da Veiga, Thèse d'Etat, Université d'Orsay, 1991.

[Z] D. Zwanziger, Non-perturbative modification of the Faddeev-Popov formula and banishment of the naive vacuum, Nucl. Phys. B209, 336 (1982), Action from the Gribov horizon, Nucl. Phys. B321, 591 (1989), Local and renormalizable action from the Gribov horizon, Nucl. Phys. B323, 513 (1989).