

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

## **Puissances du champ d'occupation du mouvement brownien plan et applications**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1992, tome 42  
« Conférences de Y. Benoist, D. Kastler, J.-F. Le Gall, P.-A. Meyer, V. Rivasseau, R. Stora,  
W. Thirring, I.T. Todorov », , exp. n° 2, p. 15-24

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1992\\_\\_42\\_\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__42__15_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**Puissances du champ d'occupation**  
**du mouvement brownien plan et applications**

Jean-François Le Gall  
(*Université Paris VI*)

Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement brownien plan. Pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$ , la saucisse de Wiener de rayon  $\varepsilon$  sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  est le voisinage fermé d'ordre  $\varepsilon$  de la trajectoire sur l'intervalle  $[0, T]$ :

$$S_\varepsilon(0, T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} D(B_t, \varepsilon)$$

où  $D(y, \varepsilon)$  désigne le disque fermé de rayon  $\varepsilon$  centré en  $y$ . Il est bien connu (voir par exemple [L1]) que, si  $m$  désigne la mesure de Lebesgue sur le plan,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(S_\varepsilon(0, T)) = 0$ , p.s. et plus précisément

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\log \varepsilon| m(S_\varepsilon(0, T)) = \pi T, \text{ p.s.}$$

L'un des objectifs du présent travail est de donner un développement asymptotique pour  $m(S_\varepsilon(0, T))$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, dans l'échelle des fonctions  $|\log \varepsilon|^{-n}$ . Ce développement fait intervenir des variables aléatoires qu'on peut interpréter comme les puissances renormalisées du champ d'occupation de  $B$ . Plus précisément (voir le Théorème 5) le  $n^{\text{ième}}$  terme du développement fait apparaître la puissance  $n^{\text{ième}}$  du champ d'occupation de  $B$ . Ces puissances renormalisées ont été définies rigoureusement par Dynkin [D2,D3,D4] (voir aussi Rosen [R]; le cas  $n = 2$ , apparaît déjà dans Varadhan [V] sous une forme un peu différente) et sont souvent aussi appelées temps locaux d'auto-intersection renormalisés. Il existe une forte analogie entre la construction des puissances renormalisées du champ d'occupation de  $B$  et celle des puissances de Wick du champ libre en dimension deux. Cette analogie est expliquée par le théorème d'isomorphisme de Dynkin (voir [D2] et aussi [D1]). Dans le présent travail, nous ne développerons pas cette correspondance, bien qu'elle soit suggérée par des formules comme celle qui donne les moments des puissances renormalisées du champ d'occupation de  $B$  (Proposition 2).

Dans la première partie ci-dessous, nous donnons une construction des temps locaux d'intersection renormalisés qui est une forme simplifiée de celle de Dynkin [D3,D4]. Dans la deuxième partie nous appliquons cette construction au développement asymptotique de l'aire de la saucisse de Wiener. Un résultat intermédiaire important (Théorème 3) énonce un développement asymptotique du champ aléatoire qui est la restriction de la mesure de Lebesgue à  $S_\varepsilon(0, T)$ , en termes des puissances renormalisées du champ d'occupation. Les détails des démonstrations peuvent être trouvés dans [L4] (Chapitres X,XI), et sous une forme plus générale dans [L3]. Enfin, dans la dernière partie, nous donnons une application de ce développement à un problème d'analyse concernant le noyau de la chaleur dans le complémentaire d'un compact du plan, inspiré de Spitzer [S].

## 1. Puissances renormalisées du champ d'occupation de $B$ .

Nous conservons les notations introduites ci-dessus. Comme il est usuel, le mouvement brownien  $B$  part de  $y$  sous la probabilité  $P_y$ . Nous introduisons aussi un temps exponentiel  $\zeta$  de paramètre  $\lambda > 0$ , indépendant de  $B$ .

Pour toute fonction  $\phi$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}$ , on pose

$$T^1\phi = \int_0^\zeta \phi(B_t) dt .$$

L'application  $\phi \rightarrow T^1\phi$  est le champ d'occupation de  $B$ . On peut écrire formellement:

$$T^1\phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) \int_0^\zeta \delta_y(B_t) dt ,$$

où  $\delta_y$  désigne la mesure de Dirac au point  $y$  du plan. Pour tout entier  $n \geq 2$  la puissance  $n^{\text{ième}}$  du champ d'occupation de  $B$ , sur l'intervalle  $[0, \zeta[$ , est définie formellement par

$$T^n\phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) \frac{1}{n!} \left( \int_0^\zeta \delta_y(B_t) dt \right)^n .$$

Ceci n'est qu'une écriture formelle. L'intégrale

$$\int_0^\zeta \delta_y(B_t) dt ,$$

qui représenterait le temps local de  $B$  au point  $y$ , à l'instant  $\zeta$ , n'a pas de sens puisque les points sont polaires pour le mouvement brownien plan. On remarque néanmoins qu'un développement (à nouveau formel!) de la puissance  $n^{\text{ième}}$  intervenant dans l'intégrale précédente conduit à

$$T^n\phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \zeta} \delta_y(B_{t_1}) \dots \delta_y(B_{t_n}) dt_1 \dots dt_n$$

formule qui suggère que les variables  $T^n\phi$ , lorsque nous les aurons rigoureusement définies, seront étroitement liées aux points de multiplicité  $n$  de la trajectoire (l'existence de points de multiplicité  $n$  quelconque pour la trajectoire d'un mouvement brownien plan a été établie par Dvoretzky, Erdős et Kakutani [DEK]).

Les expressions intégrales qui précèdent sont formelles, à l'exception bien sûr de la première concernant  $T^1\phi$ . Pour leur donner un sens mathématique, on introduit un petit paramètre  $\varepsilon > 0$  et on remplace la mesure de Dirac  $\delta_y$  par la probabilité uniforme sur le cercle de centre  $y$  et de rayon  $\varepsilon$ . Cela revient à remplacer l'intégrale formelle

$$\int_0^\zeta \delta_y(B_t) dt$$

par  $l_\varepsilon^y(\zeta)$ , le temps local de  $B$  sur le cercle de centre  $y$  et de rayon  $\varepsilon$ , à l'instant  $\zeta$ . Rappelons qu'on définit plus généralement le processus  $(l_\varepsilon^y(t), t \geq 0)$  par exemple au moyen de l'approximation

$$l_\varepsilon^y(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon\delta} \int_0^t 1_{\{\varepsilon-\delta < |B_s - y| < \varepsilon+\delta\}} ds, \quad p.s.$$

On peut choisir une version continue en  $y, \varepsilon, t$  de la famille de variables aléatoires  $l_\varepsilon^y(t)$  (avec nos notations,  $l_\varepsilon^y(t)$  coïncide, à la constante multiplicative  $(2\pi\varepsilon)^{-1}$  près, avec le temps local au sens des semimartingales du processus  $|B_t - y|$ , au niveau  $\varepsilon$ ). A partir de maintenant nous considérons uniquement cette version. Pour  $\varepsilon$  et  $y$  fixés, la fonction  $t \rightarrow l_\varepsilon^y(t)$  croît seulement quand  $|B_t - y| = \varepsilon$ . En ce sens, elle mesure le temps passé par  $B$  sur ce cercle.

On vérifie aisément que, si

$$T_\varepsilon^1 \phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) l_\varepsilon^y(\zeta),$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^1 \phi = T^1 \phi,$$

dans  $L^2$ . Ceci suggère donc de considérer aussi pour tout entier  $n \geq 2$  les approximations

$$T_\varepsilon^n \phi = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) l_\varepsilon^y(\zeta)^n = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \zeta} l_\varepsilon^y(dt_1) \dots l_\varepsilon^y(dt_n),$$

Cela ne marche cependant pas directement. Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $T_\varepsilon^n 1$  converge presque sûrement vers  $+\infty$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Si tel n'était pas le cas, on obtiendrait une contradiction avec le fait que la mesure d'occupation de  $B$  est étrangère à la mesure de Lebesgue. Il est donc nécessaire d'introduire une renormalisation. La renormalisation que nous utilisons consiste à remplacer dans l'intégrale de définition de  $T_\varepsilon^n \phi$  chacune des mesures  $l_\varepsilon^y(dt_j)$ , pour  $2 \leq j \leq n$ , par

$$l_\varepsilon^y(dt_j) - h_\varepsilon \delta_{t_{j-1}}(dt_j),$$

où

$$h_\varepsilon = E[l_\varepsilon^y(\zeta) \mid |B_0 - y| = \varepsilon].$$

Notons que cette définition ne dépend pas du point  $y$  choisi à cause des propriétés d'invariance par translation de la loi du mouvement brownien. Au lieu de conditionner par  $\{|B_0 - y| = \varepsilon\}$  on peut prendre  $B_0 = y_\varepsilon$ , pour n'importe quel point  $y_\varepsilon$  du cercle de centre  $y$  de rayon  $\varepsilon$ . Un calcul simple donne:

$$h_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\log 2 - \log \lambda}{2} - \gamma \right) + O(\varepsilon),$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. On définit donc les champs renormalisés " $\varepsilon$ -approchés" par

$$R_\varepsilon^n \phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \zeta} l_\varepsilon^y(dt_1) \prod_{j=2}^n (l_\varepsilon^y(dt_j) - h_\varepsilon \delta_{t_{j-1}}(dt_j)) ,$$

On peut développer le produit et arriver ainsi à la formule suivante:

$$R_\varepsilon^n \phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) P_\varepsilon^n(l_\varepsilon^y(\zeta))$$

où le polynôme de renormalisation

$$P_\varepsilon^n(x) = \sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-h_\varepsilon)^{n-j} \frac{x^j}{j!}$$

a pour coefficient dominant  $x^n/n!$ . On a aussi:

$$R_\varepsilon^n \phi = \sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-h_\varepsilon)^{n-j} T_\varepsilon^j \phi.$$

**Théorème 1.** *Pour toute fonction borélienne bornée  $\phi$  sur  $\mathbb{R}^2$ , pour tout entier  $n \geq 1$ ,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon^n \phi$$

*existe dans  $L^p$  pour tout  $p < \infty$ . Cette limite est notée  $R^n \phi$  et l'application  $\phi \rightarrow R^n \phi$  est appelée puissance  $n^{\text{ième}}$  renormalisée du champ d'occupation de  $B$  sur l'intervalle  $[0, \zeta]$ .*

*Idée de la preuve.* Pour tous  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$ , soit

$$Y_\varepsilon^n(y) = P_\varepsilon^n(l_\varepsilon^y(\zeta)) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \zeta} l_\varepsilon^y(dt_1) \prod_{j=2}^n (l_\varepsilon^y(dt_j) - h_\varepsilon \delta_{t_{j-1}}(dt_j)) .$$

En utilisant cette dernière expression on montre que, pour  $y \neq z$ ,

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} E_x[Y_\varepsilon^n(y) Y_{\varepsilon'}^n(z)] = (G_\lambda(x, y) + G_\lambda(x, z)) G_\lambda(y, z)^{2n-1} ,$$

où  $G_\lambda(y, z)$  désigne la fonction de Green du mouvement brownien tué en  $\zeta$ :

$$G_\lambda(y, z) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} (2\pi t)^{-1} \exp\left(-\frac{|y-z|^2}{2t}\right).$$

On peut ensuite en déduire que

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} E_x [R_\varepsilon^n \phi R_{\varepsilon'}^n \phi] = \int \int dy dz (G_\lambda(x, y) + G_\lambda(x, z)) G_\lambda(y, z)^{2n-1},$$

ce qui entraîne la convergence  $L^2$  de  $R_\varepsilon^n \phi$ .

Dynkin [D3,D4] a donné beaucoup d'autres approximations des champs renormalisés  $R^n \phi$ . On peut par exemple utiliser d'autres approximations pour la mesure de Dirac  $\delta_y$ , à la place de la probabilité uniforme sur le cercle de centre  $y$  et de rayon  $\varepsilon$ . Les polynômes de renormalisation deviennent alors beaucoup plus compliqués en général. L'avantage de l'approximation utilisée ici est que les polynômes de renormalisation sont explicites et très simples.

La variable  $R^n 1$  s'interprète comme un temps local d'auto-intersection (renormalisé) d'ordre  $n$ , c'est-à-dire une variable aléatoire qui en un certain sens mesure la quantité de points de multiplicité  $n$  de la trajectoire. Voir pour cette interprétation Rosen [R], qui traite cependant une renormalisation un peu différente, et Werner [W].

On peut donner des formules explicites pour les moments des champs  $R^n \phi$ . Avant d'énoncer ces formules, nous introduisons la notation suivante. Soient  $p$  un entier positif,  $n_1, \dots, n_p$  des entiers positifs et  $n = n_1 + \dots + n_p$ . On note

$$\Lambda_{n_1, \dots, n_p}^p$$

l'ensemble des applications  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, p\}$  telles que  $\text{Card } \sigma^{-1}(j) = n_j$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ , et de plus  $\sigma(j) \neq \sigma(j-1)$  pour tout  $j \in \{2, \dots, p\}$ . L'interprétation est la suivante: on a  $p$  points  $y_1, \dots, y_p$  du plan et un chemin qui doit visiter chaque point  $y_j$  exactement  $n_j$  fois, étant donné qu'un même point ne doit pas être visité deux fois de suite; l'ensemble  $\Lambda_{n_1, \dots, n_p}^p$  donne tous les ordres de visite possibles des différents points.

**Proposition 2.** *Soient  $\phi_1, \dots, \phi_p$  des fonctions boréliennes bornées sur le plan. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$E_x [T^{n_1} \phi_1 \dots T^{n_p} \phi_p] = \sum_{\sigma \in \Lambda_{n_1, \dots, n_p}^p} \int_{(\mathbb{R}^2)^p} dy_1 \dots dy_p \phi_1(y_1) \dots \phi_p(y_p) G_\lambda(x, y_{\sigma(1)}) \prod_{j=2}^p G_\lambda(y_{\sigma(j-1)}, y_{\sigma(j)})$$

où  $G_\lambda(y, z)$  désigne la fonction de Green du mouvement brownien tué en  $\zeta$ .

Le fait de travailler avec le mouvement brownien tué à un temps exponentiel indépendant est très utile dans la preuve du théorème 1. Il n'est ensuite pas facile de revenir à des résultats "à temps constant", c'est-à-dire de définir les puissances renormalisées du champ d'occupation de  $B$  sur un intervalle déterministe  $[0, T]$ . Nous verrons plus loin comment, lorsque  $\phi \equiv 1$ , on peut résoudre ce problème à l'aide des propriétés d'invariance par changement d'échelle du mouvement brownien.

## 2. Développement asymptotique de l'aire de la saucisse de Wiener plane.

Nous commençons par donner une définition de la saucisse de Wiener plus générale que celle de l'introduction. Soit  $K$  un sous-ensemble compact non polaire (de capacité logarithmique positive) du plan. Nous notons  $C(K)$  la capacité logarithmique de  $K$ . La saucisse de Wiener  $S_\varepsilon^K(0, T)$  est définie par

$$S_\varepsilon^K(0, T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} (B_t + \varepsilon K)$$

de sorte que la définition de l'introduction correspond au cas particulier où  $K$  est le disque unité. Pour toute fonction  $\phi$  borélienne bornée sur le plan nous posons

$$S_\varepsilon^K \phi = \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) 1_{S_\varepsilon^K(0, \zeta)}(y).$$

Le champ aléatoire  $\phi \rightarrow S_\varepsilon^K \phi$  correspond donc simplement à la restriction de la mesure de Lebesgue à la saucisse de Wiener  $S_\varepsilon^K(0, \zeta)$ .

Le Théorème qui suit donne un développement asymptotique, quand  $\varepsilon$  tend vers 0 du champ  $S_\varepsilon^K \phi$  en termes des champs  $R^n \phi$  qui ont été introduits dans la partie 1. Ce résultat n'est pas très surprenant si l'on se souvient que le champ  $R^n \phi$  est lié aux points de multiplicité  $n$  de la trajectoire: la mesure de la saucisse de Wiener prend d'une certaine manière en compte l'existence (et la quantité) de ces points multiples.

**Théorème 3.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit*

$$h_\varepsilon^K = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\log 2 - \log \lambda}{2} - \gamma - \log C(K) \right)$$

*Alors, pour tout entier  $n \geq 1$ ,*

$$S_\varepsilon^K \phi = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (h_\varepsilon^K)^{-i} R^i \phi + r_n^{K, \phi}(\varepsilon),$$

*où*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\log \varepsilon|^{2n} E[(r_n^{K, \phi}(\varepsilon))^2] = 0.$$

Le  $k^{\text{ième}}$  terme du développement de  $S_\varepsilon^K \phi$  donné par le théorème est de l'ordre de  $|\log \varepsilon|^{-k}$ , et donc la dernière assertion montre que le reste est négligeable devant tous ces termes. Pour  $n = 1$ , le théorème donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\log \varepsilon| \int_{\mathbb{R}^2} dy \phi(y) 1_{S_\varepsilon^K(0, \zeta)}(y) = \pi \int_0^\zeta \phi(B_t) dt$$

dans  $L^2$ . Noter que ce résultat ne dépend donc pas du compact  $K$  (pourvu bien sûr qu'il soit de capacité positive. L'ensemble du développement ne dépend de  $K$  que par l'intermédiaire de la capacité  $C(K)$ . La constante  $h_\varepsilon^K$  coïncide, à un terme négligeable près, avec  $c_\lambda(\varepsilon K)^{-1}$ , où  $c_\lambda$  désigne la capacité relative au mouvement brownien tué en  $\zeta$ .

*Idée de la preuve.* On reprend les mêmes notations que dans l'esquisse de démonstration du Théorème 1. On pose de plus

$$X_\varepsilon(y) = 1_{S_\varepsilon^K(0,\zeta)}(y).$$

A l'aide de formules classiques de théorie du potentiel probabiliste, et en notant  $G = G_\lambda$  pour simplifier, on montre que, pour tout entier  $p \geq 1$ ,

$$E_x[X_\varepsilon(y)X_\varepsilon(z)] = ((G(x,y) + G(x,z)) \sum_{j=2}^p (-h_\varepsilon^K)^{-j} G(y,z)^{j-1} + O(|\log \varepsilon|^{-p-1})).$$

On montre de même que, si  $n \geq 2$ ,

$$E_x[X_\varepsilon(y)Y_\varepsilon^n(z)] = -(-h_\varepsilon^K)^{-n+1} G(x,z) G(y,z)^{2n-2}$$

$$- (-h_\varepsilon^K)^{-n} (G(x,y) + G(x,z)) G(y,z)^{2n-1} - (-h_\varepsilon^K)^{-n-1} G(x,y) G(y,z)^{2n} + O(\varepsilon^{1/2}).$$

et, pour  $n = 1$ ,

$$E_x[X_\varepsilon(y)Y_\varepsilon^1(z)] = (h_\varepsilon^K)^{-1} (G(x,y) + G(x,z)) G(y,z) - (h_\varepsilon^K)^{-2} G(x,y) G(y,z)^2 + O(\varepsilon^{1/2}).$$

En combinant ces résultats avec celui utilisé pour la preuve du Théorème 1, on arrive à

$$\begin{aligned} E_x \left[ \int dy dz \phi(y) \phi(z) \left( X_\varepsilon(y) + \sum_{j=1}^n (-h_\varepsilon^K)^{-j} Y_\varepsilon^j(y) \right) \left( X_\varepsilon(z) + \sum_{j=1}^n (-h_\varepsilon^K)^{-j} Y_\varepsilon^j(z) \right) \right] \\ = O(|\log \varepsilon|^{-2n-2}), \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat du Théorème 3.

En prenant  $\phi \equiv 1$ , on déduit du théorème un développement asymptotique de l'aire de la saucisse de Wiener  $S_\varepsilon^K(0,\zeta)$ . Il est naturel de chercher à écrire un développement analogue pour la saucisse de Wiener  $S_\varepsilon^K(0,T)$ ,  $T$  étant un temps constant. Avant cela il nous faut étendre la définition des puissances renormalisées du champ d'occupation au cas où l'on considère la trajectoire brownienne sur un intervalle déterministe. Il est commode de se placer sur l'espace canonique  $\Omega = \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+$  du mouvement brownien plan issu de 0 et tué à un temps exponentiel indépendant. Ici  $\mathcal{C}$  désigne l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Un élément de  $\Omega$  est noté  $(\omega, t)$  et la probabilité  $P_0(d\omega dt)$  sur  $\Omega$  est le produit de la mesure de Wiener sur  $\mathcal{C}$ , notée  $W_0(d\omega)$ , et de la mesure  $\lambda e^{-\lambda t} dt$ . On prend évidemment  $\zeta(\omega, t) = t$ .



**Proposition 4.** *Il existe pour tout entier  $n \geq 1$  un unique processus aléatoire dans  $L^2(\mathcal{C}, W_0)$ , noté  $(R^n(t), t \geq 0)$  tel que:*

(i)  $R^n(t)(\omega) = R^n 1(\omega, t)$ ,  $P_0(d\omega dt)$  p.s.;

(ii) *on a la propriété de changement d'échelle suivante: si pour tous  $r > 0$ ,  $\omega \in \mathcal{C}$  on note  $\omega_r$  le nouvel élément de  $\mathcal{C}$  défini par  $\omega_r(s) = r^{-1/2}\omega(rs)$ , alors*

$$R^n(rt)(\omega) = r \sum_{j=1}^n \left( \frac{\log r}{2\pi} \right)^{n-j} C_{n-1}^{j-1} R^j(t)(\omega_r), \quad W_0(d\omega) \text{ p.s.}$$

On a:  $R^1(t) = t$  p.s.

La propriété (i) de la proposition ne suffit pas à définir les processus  $R^n(t)$ . Le problème vient de ce que, pour  $t_0$  fixé, l'ensemble  $\{(\omega, t), t = t_0\}$  est de  $P_0$  mesure nulle. La propriété (i) seule ne donne donc aucune information sur  $R^n(t_0)$ . Pour "deviner" la relation de scaling (ii), il suffit de revenir à l'approximation de  $R^1$  et de faire un changement d'échelle en comparant  $h_\varepsilon$  et  $h_{r^{-1/2}\varepsilon}$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat analogue au Théorème 3 pour un intervalle déterministe.

**Théorème 5.** *Sous les hypothèses du théorème 3, pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $T > 0$ ,*

$$m(S_\varepsilon^K(0, T)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (h_\varepsilon^K)^{-i} R^i(T) + \rho_n^K(\varepsilon),$$

où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\log \varepsilon|^n \rho_n^K(\varepsilon) = 0,$$

dans  $L^2$  et presque sûrement.

Puisque  $R^1(T) = T$  le cas  $n = 1$  du théorème redonne l'équivalent de  $m(S_\varepsilon^K(0, T))$  déjà mentionné dans l'introduction dans le cas du disque. Les termes successifs fournissent un développement de  $m(S_\varepsilon^K(0, T))$  dans l'échelle des puissances négatives de  $|\log \varepsilon|$ . Il est intéressant de noter que le  $n^{\text{ième}}$  terme fait apparaître la variable  $R^n(T)$  qui est liée aux points de multiplicité  $n$  de la trajectoire. Ceci est à comparer aux résultats de [L1] pour la mesure de l'intersection de  $n$  saucisses de Wiener indépendantes.

### 3. Application à un problème de conduction de la chaleur.

Nous considérons à nouveau un sous-ensemble compact  $K$  non polaire du plan. On s'intéresse à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

sur  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^2 \setminus K)$ , avec conditions frontières

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(t, x) = 1,$$

pour tout  $t > 0$  et  $x_0$  point régulier de  $K$ .

La solution probabiliste de cette équation est

$$u(t, x) = P_x[T_K \leq t]$$

avec

$$T_K = \inf\{t \geq 0, B_t \in K\}.$$

On s'intéresse plus particulièrement à l'intégrale

$$E_K^*(t) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} u(t, x) dx$$

qui s'interprète comme le flux de chaleur ayant quitté  $K$  avant l'instant  $t$ , si l'on suppose que  $K$  est maintenu à la température 1 dans un milieu qui est lui à la température 0 à l'instant 0. On cherche à étudier le comportement de  $E_K(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini (ce problème a été traité en dimension quelconque: voir notamment [S],[L2]). Spitzer [S] a montré que:

$$E_K(t) = \frac{2\pi t}{\log t} + (1 + \gamma - \log 2 + 2 \log C(K)) \frac{2\pi t}{(\log t)^2} + o\left(\frac{t}{(\log t)^2}\right),$$

où  $\gamma$  désigne comme ci-dessus la constante d'Euler. On peut utiliser le Théorème 5 pour retrouver et préciser ce résultat. On a en effet:

$$E_K(t) = \int dy P_y[T_K \leq t] = \int dy P_0[T_{y-K} \leq t] = E_0\left[\int dy 1_{\{T_{y-K} \leq t\}}\right] = E_0[m(S_1^K(0, t))].$$

Un changement d'échelle donne

$$E_0[m(S_1^K(t))] = E_0[m(S_{t^{-1/2}}^K(0, 1))]$$

et donc on peut appliquer le Théorème 4 (avec  $T = 1$  et  $\varepsilon = t^{-1/2}$ ) pour obtenir le comportement de  $E_K(t)$ . On trouve, compte-tenu de la valeur de  $h_\varepsilon^K$ ,

$$E_K(t) = t \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left( \frac{2\pi}{\log t - 2 \log C(K) - 2\gamma - \log(\lambda/2)} \right)^j E[R^j(1)] + O\left(\frac{t}{(\log t)^{n+1}}\right).$$

On peut être surpris de ce que le développement précédent semble dépendre de  $\lambda$ , alors que  $E_K(t)$  n'en dépend évidemment pas. L'explication est que les quantités  $E[R^j(1)]$

dépendent du choix de  $\lambda$  (les constantes  $h_\varepsilon$ , et donc la renormalisation conduisant à  $R^n\phi$  dépendent de  $\lambda$ , il n'y a pas ici de choix canonique). On peut calculer par récurrence les valeurs de  $E[R^j(1)]$ , à l'aide de la Proposition 4 et du fait, facile à vérifier, que  $E[R^j1] = 0$  pour tout  $j \geq 2$  (évidemment pas pour  $j = 1$ ). En prenant  $\lambda = 1$  pour fixer les idées, on trouve par exemple

$$E[R^2(1)] = \frac{1}{2\pi}(\gamma - 1), \quad E[R^3(1)] = \frac{1}{4\pi^2}(\gamma^2 - 2\gamma + 2 - \frac{\pi^2}{6}),$$

ce qui, en revenant au développement précédent, donne déjà un terme supplémentaire par rapport à la formule de Spitzer.

## REFERENCES.

- [DEK] A. DVORETZKY, P. ERDÖS, S. KAKUTANI. Multiple points of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Israel Sect. F* **3**, 364-371 (1954).
- [D1] E.B. DYNKIN. Local times and quantum fields. In *Seminar on Stochastic Processes, 1983* (E. Çinlar, K.L. Chung and R.K. Gettoor eds) 69-84. Birkhäuser, Boston, 1984.
- [D2] E.B. DYNKIN. Polynomials of the occupation field and related random fields. *J. Funct. Anal.* **62** 397-434 (1984).
- [D3] E.B. DYNKIN. Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.* **16**, 1-57 (1988).
- [D4] E.B. DYNKIN. Regularized self-intersection local times of the planar Brownian motion. *Ann. Probab.* **16**, 58-74 (1988).
- [L1] J.F. LE GALL. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. *Ann. Probab.* **14**, 1219-1244 (1986).
- [L2] J.F. LE GALL. Sur une conjecture de M. Kac. *Probab. Th. Rel. Fields* **78**, 389-402 (1988).
- [L3] J.F. LE GALL. Wiener sausage and self-intersection local times. *J. Funct. Anal.* **88**, 299-441 (1990).
- [L4] J.F. LE GALL. Some properties of planar Brownian motion. Cours de l'Ecole de Probabilités de St-Flour 1990. *Lecture Notes in Math.* Springer, à paraître.
- [R] J. ROSEN. A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. Séminaire de Probabilités XX. *Lecture Notes in Math.* **1204**, pp. 515-531. Springer, Berlin 1986.
- [S] F. SPITZER. Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **3**, 110-121 (1964).
- [V] S.R.S. VARADHAN. Appendix to "Euclidean Quantum Field Theory", by K. Symanzik. In *Local Quantum Theory* (R.Jost ed.) Academic, New York, 1969.
- [W] W. WERNER. Sur les singularités des temps locaux d'intersection du mouvement brownien plan. *A paraître.*