

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

ALAIN CHENCINER

L'abondance des quasi-collisions dans le problème restreint et une question sur les distortions monotones de l'anneau

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1990, tome 41
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa, R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. n° 8, p. 199-205

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__199_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'abondance des quasi-collisions dans le problème restreint et une question sur les distortions monotones de l'anneau

Cher Thom,

Tu as certainement remarqué que le soleil parcourt à vitesse constamment égale à 1 une orbite circulaire autour de la terre, et que la lune, dont chacun sait que la masse est nulle, se meut dans le plan ainsi défini en restant très proche de la terre. Si proche même, que l'influence du soleil sur le couple terre-lune ne trouble qu'assez peu l'ellipse keplerienne que décrirait la lune en son absence.

Déjà, Jacobi avait noté que dans un repère lié au soleil et centré sur la terre, repère que certains appellent "tournant", les mouvements possibles de la lune correspondent aux courbes intégrales d'un système hamiltonien autonome à deux degrés de liberté. Lorsque, comme c'est le cas ici, le Hamiltonien H (la "constante de Jacobi") a une valeur h négative de module assez grand, les mouvements ne peuvent quitter un certain voisinage de la terre. Ce voisinage est l'une des "régions de Hill", images sur le plan des positions des composantes connexes de la sous-variété de l'espace des phases d'équation $H = h$, les autres étant un voisinage du soleil et un voisinage de l'infini. Je noterai Σ_h la composante connexe qui se projette sur un voisinage de la terre. Dans les coordonnées de Delaunay l, g, L, G que la figure 1 te remettras en mémoire, le Hamiltonien H prend la forme d'une perturbation du Hamiltonien $H_1(L, G) = -\frac{K}{2L^2} - G$ du "problème de Kepler dans un repère tournant" (K est une constante), dont les solutions qui nous intéressent ici sont des mouvements elliptiques agrémentés d'une précession due à la rotation du repère (figure 4).

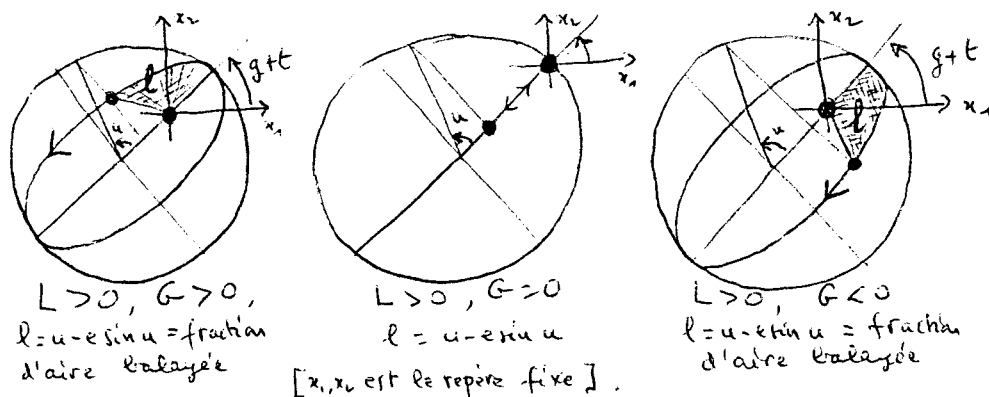


Figure 1 (t est le temps)

La topologie de la composante connexe Σ_h^1 proche de Σ_h de la sous-variété de l'espace des phases d'équation $H_1 = h$ se laisse facilement appréhender dans ces coordonnées : c'est simplement le quotient du produit $T^2 \times]a, b[$ d'un tore (paramétré par les "angles" l, g) et d'un intervalle (paramétré par exemple par l'"action" G), obtenu en identifiant à un point chaque cercle de Villarseau $g + l = \text{constante}$ sur le tore $T^2 \times \{b\}$ (correspondant à un même point d'une orbite circulaire directe D_h^1 du problème de Kepler tournant), et chaque cercle de Villarseau $g - l = \text{constante}$ sur le tore $T^2 \times \{a\}$ (correspondant à un même point d'une orbite circulaire rétrograde R_h^1). Sans doute verras-tu immédiatement que ce quotient est difféomorphe à $SO(3)$, c'est-à-dire à l'espace projectif réel de dimension trois; en voici cependant une démonstration que l'on peut lire entre les lignes du chapitre XXVII des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* de Poincaré : deux cercles de Villarseau $g + l = \text{constante}$ et $g - l = \text{constante}$ se coupent en deux points; on les transforme respectivement en un parallèle et un méridien par le revêtement à deux feuillet symplectique $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (l, g, L, G)$ défini par

$$x_1 = L - G, \quad x_2 = L + G, \quad y_1 = \frac{l - g}{2}, \quad y_2 = \frac{l + g}{2}.$$

Il est maintenant évident qu'après ce revêtement le quotient devient difféomorphe à S^3 et qu'un tel difféomorphisme transporte les deux orbites circulaires (ou plutôt leur revêtement à deux feuillet) sur deux cercles enlacés de S^3 (figure 2 où les tores $G = \text{constante}$ sont représentés par des cylindres dont on doit identifier les extrémités, et S^3 par R^3 agrémenté d'un "point à l'infini"). Poincaré donne d'ailleurs dans ce même chapitre XXVII de jolies formules explicitant tout ceci.

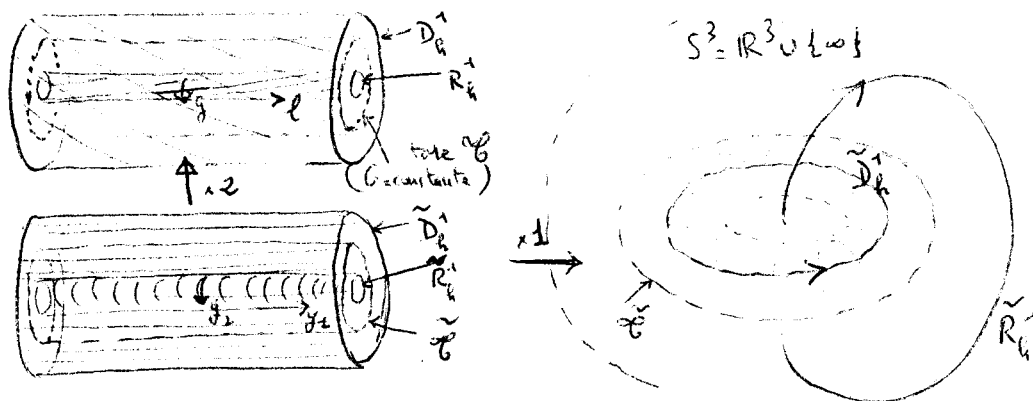


Figure 2

Tu auras sans doute noté que nous avons subrepticement régularisé les éventuelles collisions de la lune avec la terre en faisant rebondir cette dernière comme une balle en caoutchouc (dans un repère “fixe”, i.e. lié aux étoiles; dans le repère tournant il faut tenir compte de la précession). Plus techniquement, nous avons compactifié Σ_h^1 , difféomorphe en fait à un tore solide ouvert $S^1 \times R^2$, en lui rajoutant à l’infini un cercle paramétrant les directions de collision. Que cela se fasse tout seul dans les coordonnées de Delaunay vient de ce que l’anomalie excentrique u (et donc également l’anomalie moyenne $l = u - e \sin u$) garde un sens (et une vitesse finie) lorsque l’excentricité e est égale à 1 (figure 1).

Maintenant, tu vois que le Hamiltonien H_1 commute avec le Hamiltonien $H_0 = -\frac{K}{2L^2}$ obtenu en oubliant le terme de Coriolis $-G$, autrement dit avec le Hamiltonien du problème de Kepler “dans un repère fixe”. Les orbites de ce dernier situées dans Σ_h^1 sont des ellipses orientées du plan (éventuellement dégénérées dans le cas d’une orbite de collision) dont on a fixé la longueur du demi-grand axe en fonction de l’excentricité. L’espace de ces orbites est évidemment une sphère de dimension deux dont l’équateur correspond aux ellipses applaties (collisions) et les pôles d_h^1 et r_h^1 aux deux cercles direct et rétrograde (le résultat est difféomorphe à celui qu’on aurait obtenu en remplaçant Σ_h^1 par Σ_h^0 , c’est-à-dire H_1 par H_0 , ce qui revient à fixer la valeur du demi-grand axe des ellipses). Les coordonnées g et G paramètrent naturellement les parallèles et les demi-méridiens de cette sphère S^2 (figure 3). Quant à la projection de Σ_h^1 (ou Σ_h^0) sur l’espace des ellipses, elle s’identifie à la fibration en cercles tangente de S^2 , son revêtement à deux feuilletts étant la fibration de Hopf. On retrouve ainsi l’identité entre la régularisation du flot du problème de Kepler sur une variété d’énergie négative et le flot géodésique de la sphère ronde S^2 , qui n’est autre qu’un oscillateur harmonique. La commutation de H_1 avec H_0 fait que le système hamiltonien associé à H_1 passe au quotient par l’application ci-dessus et définit un champ de vecteurs sur la sphère S^2 , champ qui représente tout simplement la précession des ellipses keplériennes dans le repère tournant : c’est ce qu’on appelle la “moyennisation” ou encore le passage au “système séculaire”. Le fibré tangent de S^2 n’étant pas trivial, ne possède pas de section; on peut cependant en forcer une au prix d’un éclatement des deux pôles : on obtient par exemple l’anneau de section de Birkhoff $\mathcal{A}_1$, défini par l’équation $l = 0$, et représenté sur la figure 3. Son bord est formé des deux orbites circulaires directe D_h^1 et rétrograde R_h^1 et il coupe transversalement chacune des autres orbites situées dans Σ_h^1 du champ hamiltonien défini par H_1 . La définition donnée originellement de cet anneau par Poincaré (la première “surface de section” !) est légèrement différente – il définit d’abord un disque dont il éclate ensuite l’origine – mais le résultat est équivalent.

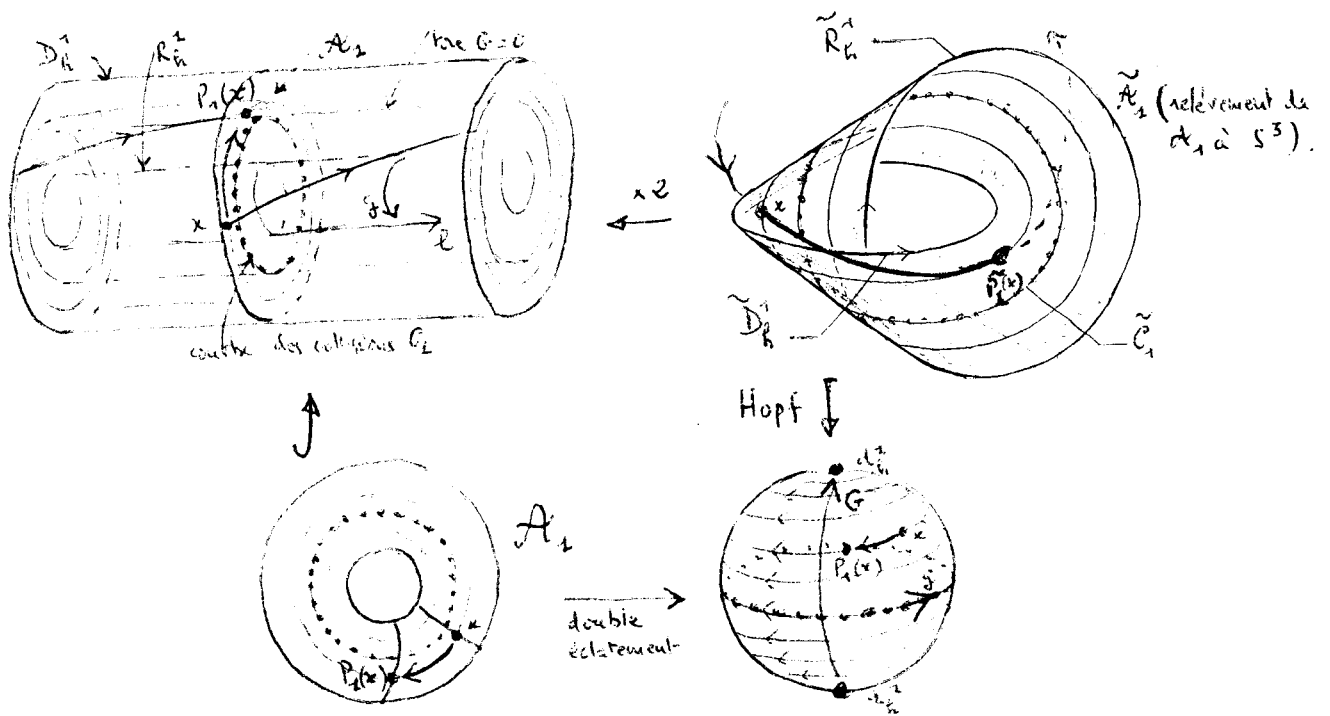


Figure 3

L'application de premier retour P_1 sur cet anneau n'est bien sûr qu'une version discrète du champ moyenné : c'est une "distorsion monotone intégrable", qui laisse invariants tous les cercles $G = \text{constante}$, et en particulier le "cercle des collisions" $G = 0$. La figure 4 en donne l'interprétation comme "retour de périhélie" sur les orbites circulaires directes ou rétrogrades correspondant à diverses valeurs de h , l'anneau apparaissant comme ramifié sur le plan des positions le long du cercle des collisions. Bien entendu, remplacer H_1 par H_0 transforme P_1 en P_0 égale à l'identité, puisqu'alors les périhélie restent fixes : c'est d'ailleurs bien la difficulté première de la mécanique céleste que de s'occuper de perturbations de l'identité. Heureusement, la genericité (distorsion) est donnée ici par le repère tournant (en fait, elle l'est également par l'action "moyennée" du soleil, mais c'est plus difficile à voir).

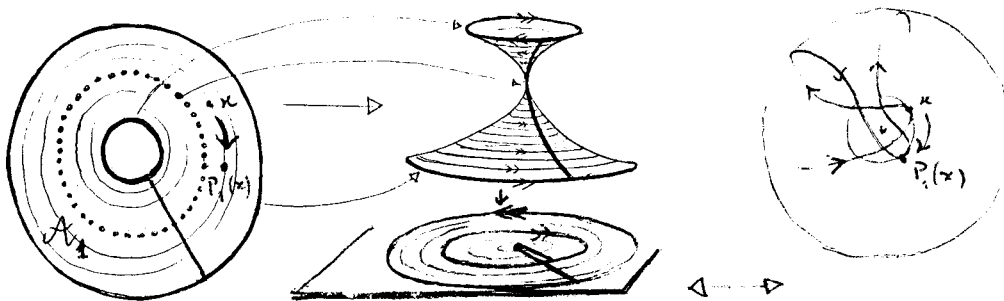


Figure 4

Et bien, ce dont je veux te parler aujourd'hui, c'est justement de ce que devient cette application de premier retour lorsque le duo terre-lune est légèrement troublé par la présence du soleil : Hill savait déjà que les orbites périodiques circulaires résistent à la perturbation qu'apporte l'attraction du soleil et l'orbite correspondant à D_h^1 sert d'orbite intermédiaire dans sa théorie de la lune. Ces solutions périodiques ont été depuis étudiées par de nombreux mathématiciens, de Poincaré et Birkhoff jusqu'à Conley. Je les noterai respectivement D_h et R_h . Il n'est pas difficile de voir qu'elles peuvent servir de bord à un anneau de section du champ de vecteurs défini par le Hamiltonien H dans une surface Σ_h lorsque h est négatif de module assez grand. On peut de plus choisir un tel anneau $\mathcal{A}$ de façon à ce qu'il contienne le cercle des collisions $\mathcal{C}$. Petite perturbation conservative d'une distorsion monotone intégrable, l'application de premier retour P sur cet anneau possède beaucoup de courbes invariantes : tu le sais bien pour avoir exposé le théorème des courbes invariantes, dû à Moser, lors d'un séminaire Bourbaki ! Savoir si ces courbes remplissent seulement un sous-ensemble de mesure positive transversalement totalement discontinu et non l'anneau $\mathcal{A}$ tout entier est la difficile question de la non-intégrabilité du problème (restreint) des trois corps. Résolue par Poincaré dans un sens faible, elle ne l'est pas, bien que la non-intégrabilité soit très vraisemblable, pour des valeurs fixées des masses de la terre et du soleil et de la constante de Jacobi. Heureusement, le résultat que j'ai en vue, démontré il y a quelque temps avec Jaume Llibre de Barcelone (*Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1988, 8*, pages 63-72), est indépendant de la réponse à cette question. Il affirme que dans tous les cas, il y aura la possibilité de mouvements lunaires complexes qui passent arbitrairement près d'une situation de collision, dans lesquels le "sens" de rotation (signe de G) varie sans cesse. Plus précisément, nous montrons que l'image par l'application de premier retour P du cercle des collisions $\mathcal{C}$ recoupe ce cercle en quatre points en chacun desquels l'intersection est transversale. En particulier, $\mathcal{C}$ n'est pas invariant par P , et rencontre en un nombre fini (éventuellement nul) de points toute courbe analytique invariante par P . De plus, pour tout h_0 suffisamment proche de $-\infty$, il existe $h < h_0$ tel que $\mathcal{C}$ rencontre effectivement des courbes invariantes données par le théorème du même nom. C'est aux mouvements appartenant aux "tores troués invariants" correspondant à de telles courbes que je viens de faire allusion.

Pour montrer ceci nous procédons en deux temps : afin de pouvoir calculer et en particulier contrôler les courbes invariantes, il est nécessaire de connaître une bonne approximation de l'application de premier retour P . On pourrait pour ce faire utiliser des coordonnées "à la Poincaré" simultanément au voisinage des deux orbites circulaires qui bordent

l'anneau $\mathcal{A}_1$ associé à H_1 :

$$U_1 = \sqrt{L+G}e^{i\frac{L+G}{2}}, U_2 = \sqrt{L-G}e^{i\frac{L-G}{2}}.$$

Tu noteras que l'exigence de traiter simultanément les deux orbites circulaires force le passage au revêtement à deux feuillets. Remplaçant alors H par $\frac{\text{constante}}{\sqrt{-H}}$, ce qui ne change que le paramétrage des courbes intégrales, on transforme la sphère S^3 qui revêt Σ_h en le bord d'un petit voisinage de l'origine dans $C^2 = R^4$ et le champ hamiltonien considéré en une perturbation de l'oscillateur harmonique de Hamiltonien $|U_1|^2 + |U_2|^2$. Dans l'article avec Llibre, nous utilisons en fait la régularisation de Levi-Civita, basée sur le revêtement ramifié sur lui-même du plan des positions (identifié à C) défini par $z \mapsto 2z^2$, mais cela ne change rien conceptuellement et j'ai choisi de t'embêter le moins possible avec des formules.

Malheureusement, après avoir effectué les nombreux changements de variable permettant de mettre P sous "forme normale approchée", on ne contrôle plus suffisamment bien la courbe $\mathcal{C}$ pour comprendre son intersection avec son image. L'idée est alors de faire éclater $\mathcal{C}$ en un tore T^2 en passant transversalement en coordonnées polaires : on passe ainsi d'une régularisation "à la Levi-Civita" (S^3 ou $SO(3)$) à une régularisation "à la Mc Gehee" (tore plein $S^1 \times D^2$ obtenu en ajoutant un bord T^2 à l'infini à la version non régularisée – difféomorphe à $S^1 \times R^2$ – de Σ_h). La figure 5 montre que le tore $G = 0$, invariant lorsqu'on considère le Hamiltonien H_1 , devient dans ces coordonnées un cylindre qui représente un connection hétérocline entre deux lignes de singularités normalement hyperboliques situées sur le tore T^2 des collisions. Le théorème revient alors à la transversalité des variétés respectivement stable et instable de ces lignes de singularités lorsqu'on remplace le Hamiltonien tronqué H_1 par le Hamiltonien complet H .

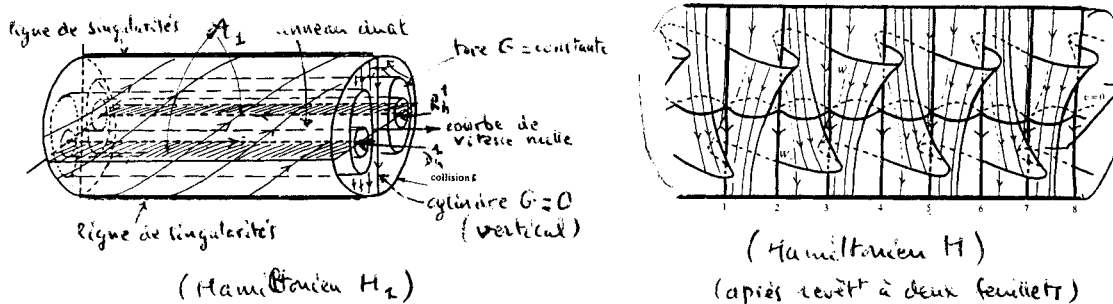


Figure 5

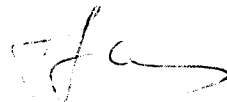
La force des nouvelles coordonnées tient précisément en ce que cette transversalité peut être montrée par une étude explicite des équations aux variations le long de cette connection hétérocline. Tu remarqueras sur la figure 5 que l'intersection des variétés stables et instables s'étudie très commodément dans l'anneau dual de celui de Birkhoff, défini dans le cas de H_1 par l'équation $l = \pi$, c'est-à-dire en remplaçant les périhélie par les aphélie, ou encore le cercle de collision par la courbe de vitesse nulle, bord de la région de Hill considérée.

Voici maintenant la question à laquelle je voulais en venir : soit P une petite perturbation (analytique ou C^∞) d'une distorsion monotone intégrable d'un anneau $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ une courbe simple plongée dans $\mathcal{A}$ et isotopée aux bords de $\mathcal{A}$. On suppose que P laisse invariante une mesure μ équivalente à la mesure de Lebesgue et que $\mathcal{C}$ n'est pas laissée invariante par P . La mesure $\mu(\mathcal{E})$ de l'adhérence $\mathcal{E}$ de l'union des itérés (positifs, négatifs, ou les deux) $P^n(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est-elle toujours positive? Une réponse affirmative impliquerait l'existence dans Σ_h pour tout h suffisamment proche de $-\infty$ d'un ensemble de mesure (de Liouville) positive d'orbites lunaires passant arbitrairement près d'une collision (je te rappelle que si H est remplacé par H_1 , l'ensemble $\mathcal{E}$ coïncide avec le tore $G = 0$ qui est de mesure de Liouville nulle dans Σ_h^1).

Pour les valeurs de h telles que $\mathcal{C}$ rencontre effectivement des courbes invariantes données par le théorème de Moser, $\mathcal{E}$ contient nécessairement toutes ces courbes car les orbites de la restriction de P à celles-ci sont denses. Il résulte alors de ce théorème que la mesure de $\mathcal{E}$ est positive dans ce cas.

Mais il n'est pas *a priori* exclu que $\mathcal{C}$ soit entièrement contenue dans un "domaine d'instabilité" de P ne contenant pas de courbe invariante; la situation est alors beaucoup moins claire : si $\mathcal{C}$ rencontre des courbes invariantes par un itéré de P , c'est-à-dire des courbes entourant un point périodique elliptique de P , le raisonnement précédent permet de conclure. Mais on ne connaît pas assez bien le "gruyère" obtenu en enlevant autour de chaque point périodique elliptique le voisinage de ce point contenant des courbes invariantes par l'itéré correspondant de P . Alors que les renseignements topologiques sont nombreux grâce en particulier aux travaux de Birkhoff, Mather, Le Calvez, rien n'est connu sur sa mesure.

Avec toute mon affection et mon admiration,



Alain Chenciner.