

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

R. THOM

## Une définition continue du Nombre

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1990, tome 41  
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa,  
R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. n° 6, p. 163-189

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1990\\_\\_41\\_\\_163\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__163_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Une définition continue du Nombre

### §1. Introduction.

Par ce titre à coup sûr ambitieux, je voudrais proposer une vision neuve des mathématiques, opposée dans son esprit à la démarche devenue traditionnelle depuis Dedekind et Cantor : à savoir celle qui fait sortir le continu du discret :  $\mathbb{R}$  défini à partir de  $\mathbb{N}$ . Soyons clair : Je ne pense pas qu'on puisse faire sur le plan de la technique mathématique une quelconque objection à l'approche de Dedekind ; mes réticences à son égard sont de caractère philosophique : la définition du continu par Dedekind est fondamentalement "lacunaire" ; (elle rappelle la plaisanterie connue, qui consiste à fabriquer un fromage de gruyère en prenant des trous, et mettant du fromage autour ...) ; elle est fort peu constructive ; et surtout, elle présuppose un mécanisme génératif infini (l'addition des entiers et des rationnels), alors que l'intuition psychologique du continu que nous retirons de la contemplation de l'espace amorphe ou de l'écoulement du temps dans notre flux de conscience ne nous livre aucune ossature algébrique sous-jacente. Il est bon de rappeler, à cet égard, qu'avant Dedekind, on a pratiqué une "théorie générale des grandeurs" (dont l'origine remonte à Eudoxe) qui a longtemps subsisté dans l'enseignement (en France, avec Méray, jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle).

Mais le point de vue préconisé ici est tout autre. Il s'agira de savoir dans quelle mesure on peut justifier les structures algébriques et analytiques classiques non à partir de  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , mais à partir d'entités continues dont on donnera au départ une liste de propriétés intuitives. On aura recours ensuite à des propriétés moins intuitives, plus élaborées, portant sur les constructions topologiques effectuées sur les êtres primitifs. On ne se préoccupera nullement, ici, de l'indépendance des ces "axiomes" ni de leur non-contradiction. Ce n'est pas d'une axiomatique qu'il s'agit, mais d'une voie d'approche aux mathématiques qui, pour certains esprits pourrait se révéler plus facile que la voie standard, parce que plus naturelle, moins arbitraire ...

### §2. Les êtres fondamentaux : le Plan et l'Arc.

Nos notions de base sont : le *plan* et l'*arc*. Le plan est réalisé intuitivement par le champ visuel, ou par une surface plane telle que le tableau noir (vertical) ou la surface d'une table (horizontale). Ce sera l'espace-fond dans lequel se dérouleront toutes les opérations portant sur les figures.

La figure de base est l'arc ; une réalisation intuitive de l'arc est un arc courbe décrit à la craie sur le tableau, ou par un crayon sur une feuille de papier ; ou encore, matériellement par un bout de ficelle gisant *sans se recouper* sur la table. C'est dire que pour nous, au départ, l'arc est une figure contenue dans le plan.

Axiome 1. (Raymond Devos )     *Un arc a deux bouts .*

Cet axiome exige évidemment un peu d'arithmétique discrète : les notions de un et deux. Par ailleurs la notion de "bout" conduit à la notion de "point". Un "point-bout" appartient à l'arc d'un côté, de l'"autre", c'est le vide.

Si l'on appelle  $a$  ,  $b$  les deux points-bouts de l'arc (nécessairement distincts), imposer un ordre entre ces deux points ( $a,b$ ) ou ( $b,a$  ), c'est *orienter* l'arc. Un arc a donc deux orientations.

Notion de point intérieur à un arc.

Une expérience familière est celle de couper une ficelle avec une paire de ciseaux (ou un fil avec une lame de rasoir). L'endroit le plus petit concevable où la lame attaque le fil - juste avant qu'il ne se rompe - s'appelle un point intérieur de l'arc.

Un tel point  $P$  divise l'arc  $ab$  en deux demi-arcs. Une fois la coupure réalisée, le point unique  $P$  donne naissance à deux points-bouts:  $P_1$  à gauche,  $P_2$  à droite, et on peut séparer les arcs  $aP_1$ ,  $P_2b$  par un mouvement très petit dans le plan, divisant ainsi un arc en deux. Inversement, étant donnés deux arcs  $ab$  ,  $cd$  dans le plan, supposons qu'on puisse amener par déplacement le fil  $cd$  en contact avec  $ab$  , le bout  $c$  venant à coïncider avec le bout  $b$  du premier, et que les arcs ne se rencontrent pas par ailleurs. Alors on peut imaginer faire disparaître le couple  $bc$  en un point  $P$  unique intérieur à l'arc réunion. En fait cette opération de jonction de deux arcs est beaucoup plus difficile que la séparation. Intuitivement, entre les deux fils, il faut faire un épissage. Plus bas, nous pratiquerons une opération semblable à la soudure (le "raccordement régulier" ). "Philosophiquement", la séparation, qui définit l'individu, vient avant la réunion, comme l' a écrit le Maître (Aristote) : *l'acte sépare* ( $\eta \epsilon \nu \tau \epsilon \lambda \epsilon \chi \epsilon \iota \alpha \chi \omega \rho \iota \zeta \epsilon \iota$ ), il n'a pas dit : *l'acte réunit* .

Axiome 2. Tout arc possède des points intérieurs.

Si  $P$  est un point intérieur à l'arc  $ab$ , nous pouvons trouver un point  $x$  intérieur à  $aP$ ,  $y$  intérieur à  $Pb$ . On appelle *intervalle* la figure obtenue en enlevant de l'arc  $ab$  ses deux bouts  $a$  et  $b$  :  $]a b[$ . On définit sur l'arc une topologie en prenant les intervalles comme base des ouverts. On appelle *homéomorphisme* entre deux arcs toute transformation biunivoque et bicontinue entre ces deux arcs.

Etant donné un sous-ensemble  $J$  de points dans un arc  $ab$ , on dit qu'un point  $x$  de  $J$  est isolé dans  $J$  s'il existe autour de  $J$  un intervalle ne contenant aucun point de  $J$  autre que  $J$  lui-même.

Définition :  $J$  est un ensemble fini si et seulement tous les points de  $J$  sont isolés (ainsi que les bouts de l'arc).

Définition topologique des entiers naturels  $N$ .

Soient  $A$ ,  $B$  deux arcs,  $J$  un sous-ensemble fini de  $A$ ,  $K$  un sous-ensemble fini de  $B$ . On dira que  $J$  et  $K$  ont même nombre de points s'il existe un homéomorphisme  $h$  du couple  $(A, J)$  sur  $(B, K)$ .  
Conséquence. Si  $J$  est un ensemble infini, il possède au moins un point non isolé (Bolzano-Weierstrass).

Si  $J$  et  $K$  sont vides, il existe un homéomorphisme de  $A$  sur  $B$ . Tous les arcs sont homéomorphes.

Remarque 1. Notre définition du nombre contient à la fois l'entier cardinal et l'entier ordinal : pour le second, orienter l'arc.

Remarque 2. Tout point d'un arc est un point intérieur, donc peut être un point de division de l'arc en deux arcs. Il n'y a pas de point "atomique" qu'il serait impossible de dédoubler dans une séparation (point "insécable"). C'est ce qu'Aristote a voulu exprimer dans son affirmation : le continu n'a pas d'indivisibles (Phy VI, 231 a 22).  
L'absence d'éléments atomiques ( $\alpha\tau\omicron\mu\omicron\sigma\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$ ) résulterait aussi d'un axiome de transitivité des homéomorphismes de l'arc sur ses points : Etant donnés deux points  $a, b$  de l'arc  $J$ , il existe un homéomorphisme  $h$  de  $J$  sur lui-même, conservant l'orientation, tel que  $b=h(a)$ . Bien plus, conséquence du théorème de Thalès continu énoncé plus loin, cet homéomorphisme est une isotopie. *L'arc est "qualitativement" homogène.*

Rappelons les définitions : si  $E$  est un espace topologique, un *chemin* dans  $E$ , d'origine  $A$ , d'extrémité  $B$  est l'image d'une application continue  $f$  d'un arc  $ab$  dans  $E$ , avec  $a=f(A)$ ,  $b=f(B)$  ; un espace  $U$  est connexe par arcs, si deux points quelconques  $x$ ,  $y$  peuvent être joints par un chemin d'origine  $x$ , d'extrémité  $y$ . Un chemin dont origine et extrémité coïncident est dit un *lacet*. La durée - psychologiquement vécue - entre deux instants  $t$  et  $\tau$  a pour image un arc  $t\tau$  : on peut ainsi regarder un chemin dans un espace comme la trajectoire d'un point dans un mouvement continu.

### §.3. Le Carré.

Dorénavant nous noterons en caractères "Geneva" les êtres géométriques usuels tels qu'ils apparaîtront dans notre approche. Le premier d'entre eux est le produit topologique de deux arcs  $AB$  et  $AC$

que nous noterons : Le Carré (C) de sommets ABDC. Ce carré sera évidemment doté de la topologie produit. En tant que produit, il est doté de projections sur les facteurs, soit  $P: C \rightarrow AB$  (projection verticale) et  $H: C \rightarrow AD$  (projection horizontale). Si  $c$  est un point de  $AB$ , la contre-image  $P^{-1}(c)$  est évidemment un arc parallèle à  $AD$ , puisque la projection  $H$  projette cet arc sur  $AD$  isomorphiquement. Les projections  $P$  et  $H$  définissent par suite sur  $C$  un bi-feuilletage, constitué du feuilletage vertical, et horizontal. Fig 1.

Nous allons maintenant définir la topologie du Plan à l'aide de celle de l'arc. Munissons l'arc  $AB$  d'un point intérieur  $M$ , arbitraire, considéré comme le milieu de  $AB$ ; de même  $N$  sera le milieu de  $AD$ . Alors  $(M, N)$  sera le centre  $O$  du carré  $C$ , les feuilles  $P^{-1}(M)$ ,  $H^{-1}(N)$  seront appelées les *médiatrices* du carré  $C$ . Cf Fig 2.

### Axiome : Topologie du Plan.

Etant donné un point  $x$  quelconque du plan, il existe un plongement  $F$  du carré  $C$  dans le plan, tel que  $F(O)$  soit égal à  $x$ . L'image par  $F$  du "carré ouvert" produit des intervalles  $]AB[ \times ]AD[$  constitue un "ouvert" du plan. Un ensemble  $J$  du plan est dit "borné" s'il peut être recouvert par l'union d'un nombre fini d'images de carrés plongés. Un fermé borné est dit compact.

L'idée centrale qu'on va poursuivre maintenant est de remplacer la définition différentielle de la transversalité par une définition purement topologique.

### Transversalité topologique.

Deux chemins  $G$ ,  $G'$  qui se coupent en un point  $A$  du plan sont dits transversaux en  $A$ , s'il existe un plongement  $F$  du Carré  $C$  dans le plan tel que  $F(O) = A$  et l'image par  $F$  des deux médiatrices du carré sont portées homéomorphiquement sur des sous-arcs de  $G$  resp  $G'$ . Fig 3. Deux feuilletages du plan en arcs sont dits transverses dans  $U$  si en chaque point de  $U$  les deux feuilles se coupent transversalement. On énoncera alors comme "axiomes" les "Théorèmes" suivants.

### Théorème de Thalès.

Soit dans le carré  $C$  un arc  $J = ab$  dont l'origine  $a$  est dans  $AD$  et l'extrémité  $b$  dans  $BC$ , et qui, en chacun de ses points intérieurs est transverse à la fibration verticale. Alors il existe un feuilletage  $(\Phi)$  de  $(C)$  transverse au feuilletage vertical qui contient l'arc  $(J)$  comme feuille. Cf Fig 4. Généralisation : Thalès "triangulaire" : Même énoncé si l'arc  $J$  part

du sommet A, transversalement à AB, mais alors le feuilletage  $(\Phi)$  a un point singulier en A (feuilletage localement homéomorphe aux droites issues du sommet d'un angle constitué de l'arc (J) et du côté AB. Fig 5.

Définition. Un arc J du plan est "régulier", s'il est une médiatrice d'un carré plongé.

Théorème : Thalès continu.

Soit F une application de la réunion des côtés verticaux  $AC \cup BD$  dans l'arc J, qui, sur chacun des cotés AC, BD est un homéomorphisme. Alors il existe une extension G de F au Carré ABDC telle que la restriction de G à toute fibre verticale  $P^{-1}(t)$ , t point arbitraire de AB, soit un homéomorphisme sur J.

En ce cas les courbes de niveau  $G^{-1}(s)$ ,  $s \in I$ , forment un feuilletage du Carré C transverse au feuilletage vertical. De là résulte que tout homéomorphisme de l'arc est "isotope" à l'identité.

Remarque. On pourrait espérer démontrer "Thalès continu" à partir de "Thalès simple", si l'on savait que l'arc J est porteur d'un ensemble de points dénombrable partout dense. Il faudrait alors appliquer "Thalès simple" transfiniment dans l'opération de dichotomie successive qui engendre l'ensemble dénombrable dense. Mais je n'ai pas voulu faire la théorie cantorienne des ensembles ...

#### § 4. La transversalité et l'analyse.

Axiome de généricité-transversalité.

Etant donné un arc régulier, J, et un autre arc K, il existe des arcs K' arbitrairement voisins de K qui n'ont avec J qu'un nombre fini de points d'intersection transverses.

Nota : "arbitrairement voisin" est défini par le filtre des voisinages compacts de l'arc K (par exemple des unions finies de carrés plongés).

Théorème "des accroissements finis" (alias Théorème de Rolle).

Soit, dans le carré standard ABDC le graphe (g) d'une application  $G: AB \rightarrow AC$ , supposé transversal en A à l'arête AB. Entre deux points  $x, x' \in AB$  tels que  $g(x) = g(x') = b \in AC$ , il existe certainement des points "critiques", où (g) n'est pas transversal au feuilletage horizontal du carré.

Preuve par l'absurde : si  $g$  était transversal au feuilletage horizontal sur l'intervalle  $]x, x'[, g$  serait un homéomorphisme de  $]x, x'[,$  sur son image, ce qui contredit l'égalité  $g(x) = g(x')$  si  $g$  est continue sur  $[x, x']$ .

Lemme : Tout point critique isolé d'une telle fonction  $g$  a nécessairement un modèle topologique local de la forme algébrique  $y = \pm x^2, y = \pm x^3$ .

Lemme : (Elimination des "points d'inflexion"). Soit  $J$  un arc dans le carré  $C$  ; si par rapport à la fibration horizontale l'arc  $J$  a en un point  $a$  un "contact" de type  $y = \pm x^3$ , il existe un arc  $J'$  (coincidunt avec  $J$  sauf sur un intervalle  $U$  contenant  $a$ , arbitrairement petit), qui est transversal sur  $U$  à la fibration horizontale.

Théorème. Tout arc est simplement connexe.

On suppose que cet arc est le côté  $AD$  du Carré  $C$  ; on considérera un lacet de l'arc  $AD$  comme le graphe d'une fonction  $f(x)$  ( $y$ ), où  $x$  paramétrise  $AB$  et  $y$   $AD$ .

Par l'axiome de transversalité, on peut déformer l'arc  $J$  en un arc  $J'$  comportant seulement  $k$  points critiques de type quadratique, les points "cubiques" étant éliminés. On supposera de plus que toutes les valeurs critiques sont distinctes (On peut "déplacer" une valeur critique par une déformation locale (utiliser Thalès triangulaire, Fig 5). Considérons alors le maximum absolu  $M$  de la fonction  $f$ , qui sera alors entouré de part et d'autre de deux minima  $m, m'$  (voir Fig 6). Supposons  $f(m) < f(m')$ . On joint  $m$  et  $m'$  par un arc  $(k)$  obtenu comme graphe d'un homéomorphisme du segment  $[P(m), P(m')]$  sur  $[H(m), H(m')]$  où  $P$  et  $H$  sont les projections verticale, resp horizontale du Carré sur  $AB$  et  $AD$ .

La verticale issue du maximum  $M$  perce l'arc  $(k)$  en un point unique  $S$  ; par application de Thalès triangulaire aux Triangles  $mSM$  et  $m'SM$ , on pourra définir un feuilletage transverse aux verticales et aux horizontales qui permettra de paramétrer une déformation locale de l'arc  $J$  en un arc  $J'$  (contenant de  $m$  à  $m'$  le chemin  $(k)$ ). Mais alors l'arc  $J'$  a en  $m$  un minimum, et il n'y a plus en  $m'$  disparition de la transversalité sur l'horizontale (Cf Fig 6). On a donc déformé un arc à  $k$  points "critiques", en un arc à  $(k-2)$  points critiques. On aboutit ainsi à un arc ayant un seul point critique, un maximum unique  $L$ . Soit  $T$  la projection  $P(L)$  ; l'application de la construction précédente au triangle  $ALB$  (Thalès triangulaire sur les triangles  $ATL$  et  $BTL$ ) permet de déformer la lacet initial en l'application constante  $y = 0$ . (Fig 7).

Une démonstration beaucoup plus courte résulte du fait suivant : L'arc est contractile, c'est-à-dire : il existe une déformation continue de l'application identique de l'arc  $J$  sur lui-même en l'application constante sur un de ses points, par exemple l'extrémité  $A$  de  $AB$ . Il

suffit ,pour le voir, d'appliquer Thalès triangulaire continu au triangle ABD, la diagonale AC étant le graphe de l'application identique. Finalement, "Thalès continu" évite la considération d'une élimination locale des singularités. Mais il n'est pas certain que c'est psychologiquement plus économique ...

### Concaténation de deux arcs du plan.

Si  $I = AB$  et  $J = BC$  sont deux arcs du plan ayant pour seule intersection un bout commun B, on peut - en effaçant le point B -, obtenir un arc AC, concaténation de I et J . Si I et J sont deux arcs réguliers, on admettra qu'il est possible de déformer l'un des arcs (soit J) de manière à ce que J devienne transverse au feuilletage parallèle à I, et qu'alors le feuilletage parallèle à J devienne lui-même transverse au feuilletage parallèle à I. Dans ces conditions on peut "lisser" le coin ainsi obtenu par le graphe d'un homéomorphisme entre les sections transverses, ce qui permet de définir l'arc concaténé  $I \cup J$  comme arc régulier. Cf Fig 8.

### §5. Le Cercle.

C'est la figure obtenue en concaténant l'origine d'un segment avec son extrémité. Deux cercles quelconques sont homéomorphes, deux homéomorphismes  $h, h'$  du cercle dans lui-même sont isotopes (ceci conséquence de la même propriété des homéomorphismes du segment associé au fait que le groupe des homéomorphismes du cercle amène un point donné sur tout autre point donné du cercle -il agit transitivement). Il existe des cercles plongés dans le Plan, obtenus par exemple en régularisant la self-intersection transversale d'un arc régulier.

### Revêtement universel du cercle.

Si E est un espace avec point-base  $a$ , on obtient le revêtement universel de E par la construction suivante ; à tout point  $x$  de E, on associe l'espace des chemins dans E d'origine  $a$ , d'extrémité  $x$ . On identifie ensuite deux chemins si et seulement si ils sont homotopes, à savoir s'ils peuvent être déformés continuellement l'un dans l'autre ; soit  $c(x)$  l'espace des classes ainsi obtenu. C'est un ensemble discret qui a la propriété que si  $x$  et  $y$  sont joints par un chemin  $(g)$  la concaténation des chemins définit un isomorphisme entre  $c(x)$  et  $c(y)$ . Si  $x$  et  $y$  sont voisins, et si on fait choix d'un petit chemin joignant  $x$  à  $y$ , l'isomorphisme entre  $c(x)$  et  $c(y)$  ne varie pas tant que  $y$  reste dans un voisinage (simplement connexe) de  $x$ . Ceci permet de définir le revêtement universel de  $E^\wedge$  de E, fibré sur E de fibre discrète  $c(x)$ . En particulier, si  $x = a$ , l'ensemble  $c(a)$  s'identifie aux classes de lacets sur E, issus du point base  $a$ . La concaténation des lacets définit sur cet ensemble une loi de groupe, c'est le groupe fondamental  $\pi_1(E)$ , indépendant du point-base choisi .

Dans le cas de notre Cercle (C), on appellera R son revêtement universel. La description de cet espace résulte immédiatement de sa définition : un lacet du cercle est une application du cercle dans lui-même. Or l'utilisation des postulats de transversalité permet de transposer à notre cas *la théorie du degré d'une application*. Toute classe d'homotopie d'un lacet (g) contient des représentants qui n'ont qu'un nombre fini de points critiques, et on peut toujours déformer l'application de telle manière que le point-base a ne soit pas une valeur critique. On compte alors le nombre des points de la source dont a est l'image, avec le signe  $\pm$  selon que l'application conserve ou renverse l'orientation locale. On obtient ainsi un entier qui ne dépend pas de la valeur (non-critique) choisie pour g et qui est invariant lorsqu'on déforme continuellement le lacet (g) : c'est ici que le raisonnement du § 4 plus haut intervient (l'élimination des points critiques). R est donc un revêtement de (C) à une infinité de feuillets, et quand on fait un tour sur la base C dans le sens positif, la Decktransformation correspondante est le décalage vertical d'une unité sur la fibre (le "shift"). Notre droite R est analogue à la droite réelle classique  $\mathbb{R}$  en ce qu'elle porte un point-base et une infinité dénombrable de points marqués de part et d'autre; mais elle n'a pas jusqu'à présent de "structure interne" permettant de diviser le segment unité. Quoi qu'il en soit ceci, nous permet de donner de  $\mathbb{Z}$  la définition "topologique" suivante :

*La structure additive de  $\mathbb{Z}$  s'identifie canoniquement à celle du groupe fondamental du cercle  $C$ ,  $\pi_1(C)$ . La structure multiplicative de  $\mathbb{Z}$  s'identifie à celle définie par la composition des applications du Cercle C dans lui-même, puisque degré de  $(g \circ f) = dg(f) \times dg(g)$ .*

Il nous reste maintenant à introduire les rationnels, c'est à dire, à diviser le cercle. On pourrait "étendre" la définition classique des rationnels comme classes des couples d'entiers (p,q) où l'on impose la relation d'équivalence  $(p,q) = (p',q')$  ssi  $(pq' = p'q)$  ; on reviendra plus tard à ce point de vue, lorsque nous définirons les "rationnels circulaires". Mais il est plus intéressant de revenir à la Topologie ...

## § 6. Le TORE.

On appelle Tore le produit topologique du Cercle par lui-même. Le revêtement universel du Tore est le produit  $R \times R$  de la droite R par elle-même (Plan). Ce Plan est muni d'un réseau ( $\rho$ ) de points "entiers", contre-images du point-base a. Le groupe fondamental du TORE est le groupe abélien  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  agissant par translation sur ce réseau ( $\rho$ ). Le TORE s'obtient à partir du Carré par identification de ses cotés opposés  $AB = CD$  et  $AC = BD$  ; par suite les projections verticale P et horizontale H du Carré s'étendent au TORE comme quotient du revêtement par les feuilletages contre images des feuilletages vertical

et horizontal du Carré ; soient  $P^\wedge$  ,  $H^\wedge$  ces projections dans les cercles horizontal (H) et vertical (V) respectivement.

Ces définitions étant posées, on va s'intéresser aux homéomorphismes du Cercle. Énonçons le

Lemme. Pour tout entier naturel  $k$ , il existe des homéomorphismes  $h$  du Cercle  $C$  d'ordre  $k$  ( $h^k =$  identité).

Preuve : marquons sur le segment  $ab$  de l'arc  $(k-1)$  points intérieurs ; on obtient la suite de points notés :  $[a, 1, 2, \dots, (k-1), b]$ . Définissons sur chaque segment partiel  $[i-1, i]$  un homéomorphisme  $h_i$  sur  $[i, i+1]$  (shift), avec pour terminer un homéomorphisme  $h_k$  de  $[k-1, b]$  sur  $[a, 1]$ . La composition de tous ces homéomorphismes définira un homéomorphisme d'ordre  $k$  du cercle  $C$  sans point fixe.

## §7. Construction du groupe des rotations.

Etant donné qu'on peut construire pour tout ordre  $k$  un homéomorphisme du cercle d'ordre  $k$ , sans point fixe, peut-on faire en sorte que ces homéomorphismes constituent entre eux un groupe abélien ?

Examinons le début de la procédure. Supposons qu'on ait construit un tel homéomorphisme  $f$  d'ordre 2, ainsi que  $g$  d'ordre trois. Supposons que  $f$  et  $g$  commutent ; formons alors l'homéomorphisme  $h = f g^{-1}$ . On vérifie que  $h$  est d'ordre six :  $f^2 = f^6 = e$  "identité" et  $g^6 = e$ , et par ailleurs  $f = h^3$  et  $g = h^2$  ; inversement si on a pu construire  $h$ , alors  $f$  et  $g$  sont définis, et commutent.

Observons d'abord que si un homéomorphisme du cercle admet un point fixe isolé, l'homéomorphisme germe autour du point fixe pris comme origine aura le type topologique local de  $x \rightarrow y$ , où  $y = -x$ , ou  $y = x^3$  point de réflexion ou point d'arrêt. Les points d'arrêts peuvent être éliminés par déformation arbitrairement petite ; et les points de réflexion n'apparaîtront pas dans les constructions qui suivent, car tous les homéomorphismes construits conservent l'orientation. Quant au caractère isolé du point fixe, il résulte de la transversalité du graphe sur la diagonale du Carré, à l'exception de l'identité ...

Supposons donc qu'on ait pu construire un tel groupe  $G(k-1)$  d'homéomorphismes d'ordre  $< k$ , et qu'on veuille construire une extension  $G(k)$  du groupe  $G(k-1)$  à l'aide d'un seul élément  $f(k)$ , homéomorphisme d'ordre  $k$  sans point fixe. Si l'entier  $k$  admet un diviseur (n'est pas un nombre premier)  $k=mp$  une puissance  $m^{\text{ème}}$  d'un élément  $h$  d'ordre  $p$  de  $G(k-1)$  nous donnerait l'extension  $f(k)$  cherchée. Il reste donc à considérer le seul cas où  $k$  est premier. Par

hypothèse, pour chaque dimension  $q$  comprise entre 1 et  $k$  ( $1 < q < k$ ), il existe un  $h(q)$  canonique. Formons alors l'élément d'ordre  $(k-1)!$  obtenu en composant tous les  $h(q)$ ,  $q$  variant de 2 à  $k-1$ , nous dénoterons  $H$  l'élément ainsi produit ; je dis qu'alors l'élément  $Ho f^{-1}$  est d'ordre  $k! = (k-1)! \cdot k$  et tous les points de l'orbite de  $O$  par  $f$  sont disjoints de l'orbite de  $O$  par  $H$  (sauf  $O$  lui-même, bien entendu). En effet, s'il existait un autre point commun que  $O$ , l'ordre de  $H$  serait un multiple de l'ordre de  $f$ , donc  $(k-1)!$  serait congru à  $0 \pmod k$ , alors que la formule de Wilson nous dit que cette factorielle est congrue à  $-1$  si  $k$  est premier. Pour définir  $f$ , on commencera par construire  $G(k)$ , puis on se servira de la relation  $G(k) = G \circ f^{-1}$  ; le groupe  $G(k)$  doit être d'ordre  $k!$ . On le construira en prenant un domaine fondamental du groupe  $H$ , par exemple le segment  $[O, H(O)]$  et en y marquant  $(k-1)$  points intérieurs, qu'on transportera par  $H$  sur tout le reste du cercle.  $G(k)$  admet comme générateur le shift de translation dans la cellule  $[O, H(O)]$  sur les  $k$  intervalles séparant les  $(k-1)$  points introduits plus haut. On a la structure d'extension entre groupes cycliques

$$0 \rightarrow Z_{(k-1)!} \rightarrow Z_{(k!)} \rightarrow Z_k \rightarrow 0 \text{ . alias } 0 \rightarrow G(k-1) \rightarrow G(k) \rightarrow Z_k \rightarrow 0$$

Remarque. L'opération ici réalisée peut être décrite comme suit ; soient deux ensembles finis ordonnés  $A(1,2,3 \dots m)$  et  $B(1,2,3 \dots j, \dots M)$  avec  $M$  beaucoup plus grand que  $m$ . L'ensemble produit  $A \times B$  des couples  $(i,j)$  peut être muni de deux ordres lexicographiques :

Ordre (a) :  $(i,j) < (i',j')$  si  $(i < i')$ , ou si  $i = i'$ ,  $j < j'$

Ordre (b)  $(i,j) < (i',j')$  si  $(j < j')$  ou si  $j = j'$ ,  $i < i'$ .

Alors l'opération qui définit l'extension décrite plus haut peut être vue comme un relèvement  $(r)$  de la projection  $A \times B \rightarrow B$ , relèvement  $(r)$  qui transforme l'ordre initial de  $(B)$  dans l'ordre (b) de  $A \times B$ , alors que la dernière flèche de la suite  $A \times B \rightarrow A$  transforme l'ordre (a) en l'ordre donné de  $A$ . Il existe plusieurs tels relèvements tous homologues  $\text{mod } Z_m$  dans le cas d'ensembles  $A$  et  $B$  refermés en un ordre circulaire. On trouve ici la structure des "rationnels circulaires" dont nous parlerons plus bas.

On conçoit qu'ainsi il soit possible de fabriquer une tour de groupes cycliques, tour aboutissant comme limite projective à un groupe "continu" qui serait le groupe de Lie  $SO(2)$ , groupe des rotations du cercle. Plutôt que d'aborder aux parages difficiles du cinquième problème de Hilbert, nous revenons à la géométrie du Tore.

Théorème. Tout homéomorphisme du cercle, sans point fixe, est isotope à l'identité.

Preuve. Supposons que l'homéomorphisme  $h$  agisse sur le cercle vertical  $BD$ . Désignons par  $p$  l'image par l'homéomorphisme  $h$  du point  $B$  pris comme origine du cercle "vertical"  $BD$  ; en considérant le tore comme provenant du Carré  $ABDC$  par identification des côtés opposés, marquons le point  $p=h(B)$  sur le côté  $BD$ , ainsi que le point  $q=h^{-1}(B)$  sur le côté  $AC$ . On construit un arc qui dans le carré  $C$  joint  $A$  à  $p$  en restant bitransverse aux feuilletages canoniques du carré ; de même pour un arc  $qD$ . On admet alors (Thalès "continu") qu'il est possible de trouver une transversale joignant tout point  $m$  sur  $Aq$  à son image  $h(m)$  sur  $pD$ , elle-même variant avec  $m$  de manière à constituer un feuilletage bitransverse du parallélogramme  $ApDq$ . On complète alors ce feuilletage avec des feuilletages des triangles  $ABp$  et  $qDC$  obtenus par "Thalès triangulaire" (parallèles aux bases  $Ap$  resp.  $qD$ ) Cf Fig 9. Il s'agit ici de la version "continue" de nos théorèmes de Thalès. Tout feuilletage bitransverse du Carré définit un feuilletage bitransverse sur le Tore, donc aussi sur le Plan revêtement universel du Tore.

On sait qu'un point  $x$  du cercle  $G$  est "wandering" (migrant) pour un homéomorphisme  $h$ , s'il existe un intervalle  $U$  contenant  $x$  et aucun autre point de l'orbite de  $x$ . Désignons par  $V$  l'adhérence du plus grand intervalle  $U$  ayant cette propriété.  $V$  est un segment de  $G$ , car si  $V$  était le cercle entier, ceci voudrait dire que  $U$  est le complémentaire d'un point fixe,  $U$  est alors un intervalle ouvert dans lequel  $h$  agit "par translation". En général le saturé de  $V$  par  $h$  est une réunion dénombrable de segments. Suivant l'argument classique du théorème de Denjoy, on peut "collapser" tous ces intervalles et obtenir ainsi (après avoir "transfiniment" itéré cette procédure) un nouveau cercle  $G'$  tel que la restriction de  $h$  au complémentaire de  $\text{Int } V$  ne contient plus aucun point "wandering". C'est ce que nous supposons dorénavant. On a alors le

Théorème. Si  $h$  n'a pas de points wandering, conserve l'orientation, et s'il existe un point périodique pour  $h$ ,  $h^k(x)=x$ , alors tous les points sont périodiques de même période  $k$  et  $h$  est d'ordre fini.

Il suffit de l'établir pour un point fixe  $F$  ( $k=1$ ) ; montrons que  $F$  ne peut être isolé dans l'ensemble des points fixes ; soit  $y$  un point dans le voisinage (à droite) de  $F$  un intervalle semi-ouvert  $J=[F, y[$  ; l'image par  $h$  de  $J$  est soit un intervalle semi-ouvert à droite  $[Fz[$  soit semi-ouvert à gauche  $]wF]$  ; comme  $h$  conserve l'orientation, on est nécessairement dans le premier cas, et si l'on a, par exemple,  $h(J) \subset J$  strictement, alors  $y$  est nécessairement "wandering" contrairement à l'hypothèse faite sur  $h$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  des points fixes, non-vide, étant à la fois ouvert et fermé, contient tout le Cercle.

## §8. Le rationnel comme nombre de rotation.

Soit maintenant un feuilletage (F) du Tore qui décrit une isotopie  $\mathcal{I}$  reliant un homéomorphisme  $h$  du cercle à l'identité ; on suppose, comme plus haut, que  $h$  n'a pas de point "wandering", alors s'il a un point périodique, tous ses points sont périodiques de même période. Si donc une feuille de (F) joint  $O$  à  $h(O)$ , point périodique de période  $k$ , cette feuille, relevée dans le revêtement universel  $P$  (plan) va passer par des points à coordonnées entières de la forme  $x = mq$ ,  $y = mp$ , où  $x, y$  désignent les coordonnées portées par les côtés  $AB$ ,  $AC$  du carré primitif infiniment prolongés. On sait qu'alors le rationnel  $p/q$  désigne le "nombre de rotation" de l'homéomorphisme  $h$ . On observera que le nombre de rotation ( $r$ ) de  $h$  dépend de la classe de l'isotopie ( $\mathcal{I}$ ) : en faisant sur ( $\mathcal{I}$ ) un "vissage à  $k$  tours" autour du cercle  $Ox$ , on passerait de  $p/q$  à  $(p+kq)/q$ . Par ailleurs, la situation de Denjoy où l'homéomorphisme  $h$  n'a pas de points "wandering" entraîne que, dès qu'on a une feuille compacte, toutes les feuilles sont compactes. Disons qu'un feuilletage (F') du Tore est "supérieur" à un feuilletage (F), tous deux bitransverses aux feuilletages (canoniques horizontal et vertical), si, pour  $x$  croissant, toute feuille de (F') finit par traverser toute feuille de (F) dans le sens des  $y$  positifs. Si ce croisement entre feuilles a lieu transversalement, on dira que F' est strictement supérieur à (F). Tout feuilletage du tore (bitransverse) donne naissance à un nombre de rotation,  $r(F)$ , défini comme limite de  $y/x$  lorsqu'on suit pour  $x$  tendant vers l'infini une feuille arbitraire du feuilletage. (Toutes les feuilles sont alors des Droites). Si (F') est strictement supérieur à (F), on a :  $r(F') > r(F)$ .

Comme on peut toujours, pour tout feuilletage (F) trouver un feuilletage compact qui lui est strictement supérieur, et que la différence en nombre de rotation entre deux feuilletages rationnels encadrant (F) positivement et négativement peut être rendue aussi petite qu'on veut, on retrouve la définition Dedekindienne des nombres réels par les coupures. Mais dans notre vision des choses, on se trouve devant un "embarrassment of riches" ; je ne sais pas par exemple, si l'hypothèse de transversalité (supériorité stricte de F' sur F) est nécessaire pour s'assurer que  $r(F')$  est plus grand que  $r(F)$ . Enfin l'hypothèse de transversalité de (F) sur le feuilletage "horizontal" est probablement non nécessaire. Nos nombres réels apparaissent ainsi comme sensiblement plus "épais" que les classiques (ce qui nous rappellera les constructions de Veronese ...).

Si l'homéomorphisme  $h$  du cercle est relié à l'identité par une isotopie  $a$ , et  $h'$  par une isotopie  $a'$ , on peut définir une isotopie composée  $a'oa$  qui relie le composé  $f' \circ f$  à l'identité. On a alors, pour ces isotopies,  $r(f'of) = r(f') + r(f)$ . Supposons réalisé le groupe  $G(k)$  défini au § ; pour chaque  $f^k$  d'ordre  $k$ , on va définir une isotopie "linéaire". Il existe un homéomorphisme canonique ( $J$ ) du côté  $AB$  sur le côté  $BC$  du

Carré : tous deux sont en effet des images de l'arc standard initial  $J$  ; la diagonale AC du Carré est le graphe de  $(J)$ . L'homéomorphisme  $f$  d'ordre  $k$  est une racine  $k^{\text{e}}\text{me}$  de  $(J)$  pour la composition  $\circ$  ; le graphe de  $f$  sera par définition une "droite" joignant  $O$  au point d'ordonnée  $y=1/k$  sur  $BC$  : ainsi seront définies nos isotopies linéaires. Par action du groupe  $G(1/\infty)$  sur cette isotopie, ( le groupe  $G(1/\infty)$  agissant sur le côté  $BC$ ), on créera un feuilletage du Tore ayant pour nombre de rotation  $1/k$ . Si l'on peut faire de même pour toute rotation de nombre  $r = \alpha$ , on définira la famille des feuilletages linéaires du Tore. Noter qu'une rotation  $f^\alpha$  ayant pour nombre de rotation un rationnel  $p/q$  où  $p$  est  $> q$  oblige à définir une isotopie  $\mathbf{1}$  qui "sort" du Carré pour emprunter les carrés supérieurs qui se déduisent du Carré ABCD par Decktransformation verticale.

### §9. Du Cercle Carré au Cercle rond.

On définira d'abord sur l'arc  $J$  une involution  $I$  qui renverse l'orientation (en échangeant les sommets) ; une telle involution a un point fixe et un seul, que nous appellerons  $O$ , "milieu" de l'arc  $J$ . (pour les sceptiques, considérer le graphe de l'involution dans le carré  $J \times J$  : il est bitransverse aux feuilletages canoniques du carré, et il traverse diagonalement ce carré, transversalement à la diagonale principale qu'il coupe en un seul point). L'action de  $I$  sur les cotés  $AB, BC$  du Carré permet d'y définir, comme points fixes, deux médiatrices se coupant en un point  $c$  (centre du Carré ) ainsi que des axes "orthogonaux"  $cx, cy$ . On a défini plus haut des coordonnées affines réelles  $x, y$  sur  $AB, BC$  qu'on peut projeter sur  $cx, cy$ , l'origine  $O$  satisfaisant à  $x=y=0$ . On considère dès lors la transformation de  $C$  dans lui-même définie par  $K(X, Y) = (-Y, X)$ , "rotation" de  $\pi/2$ .

On déterminera alors les courbes satisfaisant à l'équation différentielle vectorielle  $dZ/dt = K(Z)$ . Le long de ces courbes, on a  $X^2 + Y^2 = \text{cste}$ , ce sont les "cercles ronds" ; ceci bien entendu nous ramène à Pythagore...

Les solutions de l'équation différentielle  $dZ/dt = K(Z)$  définissent les fonctions trigonométriques  $\cos$  et  $\sin$ , et la fonction  $Z(t)$  l'exponentielle complexe  $Z = \exp it$ , pour la structure complexe définie par  $x+iy$ .

Considérons un angle  $\theta$  ; il correspond à une rotation  $h$  ; cette rotation a une "racine  $n^{\text{e}}\text{me}$ "  $g$ , telle que  $h = g^n$  pour la composition des homéomorphismes. Le nombre de rotation de  $g$ , qui correspond à la pente du vecteur unité "roté" de l'angle  $\theta/n$  vaut  $\theta/n$  ; ainsi  $g(cX)$ , ( $cX$  vecteur unité) se déduit de  $cx$ , pour  $n$  grand, par la similitude définie comme multiplication par le nombre complexe  $1 + i q/n$ . Donc l'angle du

vecteur  $f(cX)$  avec l'axe  $cX$  sera égal à  $(1+iq/n)^n$ . On retrouve ainsi la formule fameuse  $\exp(ia) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+ia/n)^n$ . Apparemment, cette formule est plus facile à justifier pour les complexes que pour les réels.

#### §10. Les Rationnels circulaires.

Les rationnels circulaires apparaissent très naturellement, dans l'enseignement élémentaire ; lorsqu'on introduit les fractions aux enfants, on a le choix entre : diviser un segment en  $n$  segments égaux, ou diviser un gâteau (en forme de disque) en  $n$  portions égales. Il ne fait guère de doute que la seconde image est beaucoup plus parlante que la première. Mais une fois la division réalisée, il reste à choisir sa part ! L'azimuth de la portion choisie est une donnée supplémentaire par laquelle on définira le rationnel circulaire.

Mais il y a, à l'introduction des rationnels circulaires, une motivation plus "philosophique". C'est le rôle qu'ils jouent dans tout processus de mesure (au sens de l'anglais *measurement*). Aristote disait qu'on mesure le temps par le mouvement (spatial) ; mais si l'on accepte le postulat kantien : *le temps est la condition "a priori" de toute expérience*, on sera amené à renverser le point de vue aristotélicien : *Toute mesure revient à mesurer une durée*, donc à compter un certain nombre de "tops" au cours d'une certaine période de temps. Comme le dispositif d'écoute est lui-même fini, il ne peut consister lui-même que d'une horloge ne comportant qu'un nombre fini (bien que grand)  $N$  de tops virtuels, tous organisés selon des intervalles isochrones sur un cercle à partir d'un Top d'origine bien défini. Compter des tops d'origine expérimentale revient alors, à partir de l'instant d'origine, à marquer le dernier top perçu de la série sur le grand cercle de l'horloge ; ce qui revient à spécifier, sur ce cercle, l'azimuth de ce dernier Top.

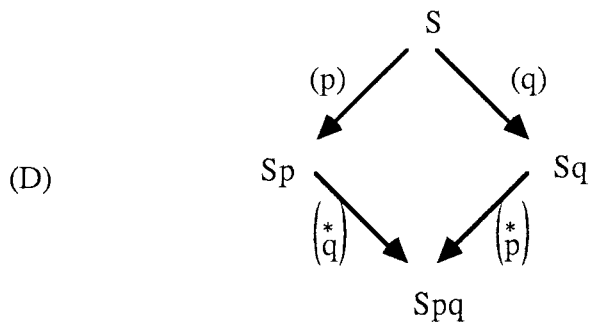
En termes mathématiques : un rationnel circulaire consiste : a) d'un rationnel scalaire  $p/q$ , avec  $p < q$  ; b) de deux cercles munis de points-bases  $(S, s)$  et  $(\Sigma, \sigma)$ , c) d'un revêtement à  $q$  feuillets  $(q) : (S, s) \rightarrow (\Sigma, \sigma)$  ; d) d'un relèvement  $w : \Sigma \rightarrow S$ , qui ne présente qu'une seule discontinuité au point-base  $\sigma$  de  $\Sigma$ , et défini par la condition que l'image par  $w$  de  $(\Sigma)$  dans  $S$  contient l'instant catastrophique  $t$  considéré, à savoir le dernier Top perçu ; la distance angulaire entre  $s$  et  $t$  sur  $S$  est la "partie entière" - en termes de périodes de l'horloge  $(S)$  - du dernier instant catastrophique perçu. Le numérateur  $p$  du rationnel intervient en considérant un troisième cercle  $(N)$  qui s'envoie sur  $(\Sigma)$  comme revêtement de degré  $p$  ; on construira alors le revêtement induit (pull-back) sur  $(N)$  par cette application de degré  $p$  :  $N \rightarrow (\Sigma)$ , ainsi que le relèvement  $w^\circ$  induit sur  $N$  du relèvement  $(w)$ . Le dénominateur  $q$  apparaît comme le degré d'un revêtement, le numérateur  $p$  comme une "monodromie" sur la base de ce revêtement.

L'image par  $w^\circ$  du cycle fondamental de  $N$  dans l'espace induit, projetée dans  $S$  par l'application canonique, a pour mesure  $p/q$ , si la mesure de  $(S)$  est prise égale à un.

La discontinuité du relèvement  $w$ , qui est l'élément important du rationnel circulaire, n'est donc pas sensiblement affectée par la présence d'un numérateur.

On vérifiera qu'un rationnel circulaire  $w^\circ = 1/N$  a de bonnes propriétés comme inverse de la multiplication :  $N$  fois le relèvement  $w^\circ$ , pris comme concaténation de  $N$  segments égaux à l'image du relèvement  $w^\circ$  reconstitue le cercle  $(S,s)$ . Inversement si l'on fait suivre le relèvement  $w^\circ$  de la projection  $(q)$  de degré  $q$ , on retrouve l'identité du cercle-base  $(\Sigma)$ .

Du fait que la structure du rationnel circulaire comporte un "azimuth", une phase, l'algèbre des rationnels circulaires est beaucoup plus compliquée que celle des scalaires. La notion importante, ici, est celle de rationnels circulaires cohérents. Négligeant les numérateurs, considérons deux rationnels circulaires (en abrégé RC) :  $z = (1/p, w)$  et  $z' = (1/q, w')$ ,  $w, w'$  étant les relèvements :  $w : S_p \rightarrow S, w' : S_q \rightarrow S$ . On considère alors le diagramme (D) formé de revêtements réguliers entre cercles :



On dira que les R.C.  $(1/p, w)$  et  $(1/q, w')$  sont *cohérents*, si on peut trouver deux relèvements de  $(p^*)$ , resp.  $(q^*)$  :

$W : Spq \rightarrow Sq$        $W' : Spq \rightarrow Sp$  discontinus au point de base de  $Spq$ , dont l'image dans  $Sp$  resp  $Sq$  contient les projections par  $(p)$ , resp  $(q)$  du point catastrophique sur  $S$ , tels que le diagramme (D) plus haut commute au sens que les relèvements induits de  $W, W'$  par les applications revêtements  $Sp \rightarrow Spq, Sq \rightarrow Spq$  coïncident avec  $w, w'$

$(p^*)$                        $(q^*)$                       resp  $w'$

Les rationnels scalaires peuvent être considérés comme des r.C. dont la "phase" est identiquement nulle, i.e., leur "point catastrophique" est toujours dans la première période suivant le point-base. On

supposera dès lors que les relèvements  $W, W'$  envoient point-base sur point-base.

En particulier, les entiers ont une phase indéterminée, le relèvement de l'application identique n'ayant pas de discontinuité ...  
On a dès lors la propriété suivante : si deux r.C. sont cohérents, on peut définir leur somme et leur produit, et ces opérations ont toutes les propriétés standards de l'Algèbre scalaire.

Mais 0 a un statut spécial, car 0 a "un dénominateur infini" . Là la phase est en principe indéterminée. Dans le cas où on a un ensemble infini de r.C. évanouissants, tous cohérents entre eux, de la forme  $1/N$ , alors la "phase" tend vers une valeur unique du cercle-unité  $\exp i\alpha$  . On dira qu'une fonction  $f(x)$  d'une variable réelle  $x$  qui envoie  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Q}$  est "circulairement dérivable" en point  $x^0$ , si les quotients différentiels  $Df/Dx$  en  $x^0$  sont, numérateurs comme dénominateurs, circulairement dérivables lorsque ces quotients s'évanouissent (condition non satisfaite en général pour les dénominateurs  $Dx$ , pour lesquels la phase est indéterminée). Ainsi, ni la fonction  $x$ , ni la fonction constante  $f=1$  ne sont automatiquement circulairement dérivables ; en général, il existera une "phase"  $\phi(x)$  fonction continue, ou lisse de  $x$ , usuellement écrite  $\exp i g(x)$ , où  $g$  est réelle.

Il existe entre les r.C. et les nombres complexes une relation, pour moi encore obscure ; si l'on se donne un entier complexe  $p+iq$ , son inverse (le rationnel complexe) s'écrit  $(p-iq)/(p^2+q^2)$ . Le cercle  $|z|=|x+iy|$  de module  $R$  a pour équation  $p^2+q^2=R^2$  ; il joue le rôle du "cercle de phase" de notre théorie ; la phase serait la pente de la droite définie par  $p-iq=0$ , si on multipliait  $p$  et  $q$  par un entier  $N$  qu'on ferait tendre à l'infini.

La condition de cohérence entre  $1/(p+iq)$  et  $1/(p'+iq')$  s'écrit :

$$|pq'-p'q| < K \cdot (p^2+q^2)(p'^2+q'^2)^{1/2}$$

Elle n'est en ce cas nullement nécessaire à la commutativité du produit ni à l'additivité... De ce point de vue, on me reprochera sans doute de n'être pas parvenu à une définition "topologique" des nombres complexes. Mais "a priori", comment établir que la seule dimension ( $>0$ ) d'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  telle que tout produit symétrique de  $\mathbb{R}^n$  par lui-même soit lisse est nécessairement  $n=2$  ? Ne pourrait-on établir directement que le produit symétrique infini de la Sphère est l'espace projectif complexe de dimension infinie  $K(\mathbb{Z}, 2)$  ? (Périodicité de Bott ?)

§11. Application à la Mécanique Quantique ....

Je me place ici au point de vue du formalisme de Feynmann, qui, est, à mes yeux, la seule manière de conférer à la Mécanique Quantique un peu d'intelligibilité... Sans doute l'intégrale de Feynmann, intégrale sur *tous les chemins* d'un domaine  $U$  de l'espace, est-elle un monstre mathématique. Je lui préfère la vision "classique" suivante : supposons  $U$  doté d'un bord  $V = \partial U$  lisse, et totalement réfléchissant pour le rayonnement dans  $U$  ; munissons  $U$  d'une métrique riemannienne  $(g)$ , qui, pourra être au départ, une métrique euclidienne plate. Supposons qu'une particule soit localisée en un point  $x^0$  de  $U$  ; alors, immédiatement, et à vitesse infinie, cette particule explose de manière homogène sur tous les rayons géodésiques issus de  $x^0$  ; alors en un point  $y$  de  $U$  on peut évaluer la "charge moyenne" qu'on va récolter ; d'abord d'un point de vue scalaire, en supposant qu'initialement on répartit équitablement la charge unité sur la sphère-unité des vecteurs tangents. On aimerait pouvoir dire que cette charge "explosée" est homogène (satisfait à l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$ ). L'existence générale d'une caustique de réflexion à l'intérieur de  $U$  semble interdire une telle homogénéité. Mais alors on fera varier la métrique riemannienne  $(g)$  en lui conférant de nombreuses "plages" à courbure négative pour lui donner des propriétés "diffractantes" sur la propagation des rayons. Il y a de bonnes raisons de penser que pour presque tout choix d'un compact de telles métriques  $(g)$ , sur lequel on intégrera, on récoltera "asymptotiquement" une densité  $u$  qui présentera la propriété d'harmonicité demandée, sauf peut-être au voisinage du bord  $V$  où la densité tend vers zéro sur  $V$ , donnant naissance à une "couche limite" d'épaisseur arbitrairement petite. Cette propriété, en tout cas, ne semble guère plus exigeante que le "théorème" dit de Sinai (en général non établi) qui affirme "l'ergodicité du billard". Venons-en maintenant aux structures quantiques proprement dites. Le phénomène fondamental est celui de la "cohérence" : un domaine de cohérence est un ouvert  $W$  de  $U$  doté d'une surjection  $w : W$  sur le cercle unité  $\Sigma$  ; on supposera  $\Sigma$  doté d'un point base  $\sigma$  ; l'idée de base est que les contre-images  $w^{-1}(\sigma)$  sont des hypersurfaces de  $U$  "totalement et instantanément conductrices" pour les "ébranlements quantiques", alors que les autres contre-images  $w^{-1}(s)$  pour  $s \neq \sigma$  sont imperméables à ces ébranlements. (Ceci permet de sauver la localité de l'espace en permettant la non-localité des effets quantiques). En un tel domaine de cohérence l'espace a une structure feuilletée en hypersurfaces transverses aux trajectoires des ébranlements ; les feuilletés contre-images du point catastrophique  $(\sigma)$  de  $\Sigma$  donnent à l'espace une structure de type "smectique" ; l'espacement entre feuilletés est donné par l'intégrale d'action  $\int p dq / \hbar$ ,  $p$  étant défini comme covecteur dual du vecteur tangent par rapport à la métrique  $(g)$ . Autrement dit les trajectoires des ébranlements quantiques élémentaires s'enroulent à la "Bohr" sur un cercle  $\Sigma$  de longueur  $(\hbar)$  égale à la constante de Planck. Mais la réunion des domaines de cohérence constitue une variété de la forme  $U \times G$ , elle-même plongée dans  $U \times T^*(U) \times G$ , où  $G$  est l'espace

compact, de grande dimension, des paramètres dans lequel varie la métrique ( $g$ ). La projection  $k$  de cette variété sur  $U$ , restreinte aux feuilletés "catastrophiques", définit la "mesure" qui nous intéresse, laquelle devient, lorsqu'on plonge le cercle ( $\Sigma$ ) dans  $\mathbb{C}$  la fonction d'onde au-dessus du point  $x$  de  $U$ . (Cette intégration sur la fibre exprime le *classique principe de superposition de la Mécanique Quantique* )...

Mais il nous reste à interpréter "physiquement" ce qu'est cette opération de mesure, lorsqu'il s'agit d'une localisation dans l'espace  $U$ . Pour cela, il est bon de revenir à notre interprétation initiale du point sur  $\mathbb{R}$  comme un "bipoint" évanouissant ; soit  $(ab)$  un tel couple de points, ayant  $O$  pour milieu ; on supposera qu'il existe en  $a, b$  des parois réfléchissantes pour les ébranlements quantiques intérieurs au segment  $[ab]$  ; mais que ces parois-semi-perméables (glaces sans tain) peuvent laisser passer les ébranlements extérieurs (qu'on pense à la théorie du laser). Comme pour un vulgaire tuyau sonore (ou une corde vibrante), la fréquence propre ( $f$ ) de l'oscillateur interne du segment  $[ab]$  va tendre vers l'infini, sa période propre ( $T$ ) tend vers zéro quand la distance  $ab$  s'annule, et que le point  $O$  se reconstitue... Il est raisonnable d'admettre que l'oscillateur interne va, par effet Huyghens (synchronisme des pendules accrochés au même mur) s'accrocher sur la période du champ extérieur, ce qui va s'exprimer par le fait que le cycle du petit oscillateur local  $[ab]$ , que nous désignerons par  $S$  va être un revêtement à  $N$  feuilletés du cercle  $\Sigma$ , horloge du champ extérieur,  $N$  étant (approximativement) égal à  $1/f$ . Faisons choix d'un ébranlement élémentaire privilégié du champ, (noté  $J$ ) et munissons  $(S)$  d'un point-base  $s$  contre-image de  $(\sigma)$ , choisi arbitrairement dans les  $N$  points de la contre-image ; si l'on déplace  $O$  sur l'axe  $Ox$ , ce point va se déplacer selon une monodromie définie par l'Ansatz fondamental  $\exp i p dq$ , monodromie propre à l'ébranlement élémentaire ( $J$ ). Mais on pourra faire choix, quand on considère tous les points de  $U = \mathbb{R}$  d'une origine commune à tous les cercles  $(S)$  obtenus par une connexion liée à la structure euclidienne de  $U$ . (translation locale) ; quand  $N$  tend vers l'infini, la distinction entre ces deux origines va, en tout point  $x$  de  $U$  créer un rationnel circulaire, et dans l'évanouissement de  $[ab]$ , ces rationnels circulaires sont cohérents, en tant que contre-images du point "catastrophique"  $\sigma$  du champ externe. De là la possibilité de définir une phase pour chaque ébranlement élémentaire, et pour le champ total, la somme de ces ébranlements qui va donner la fonction d'onde  $\varphi(x)$ .

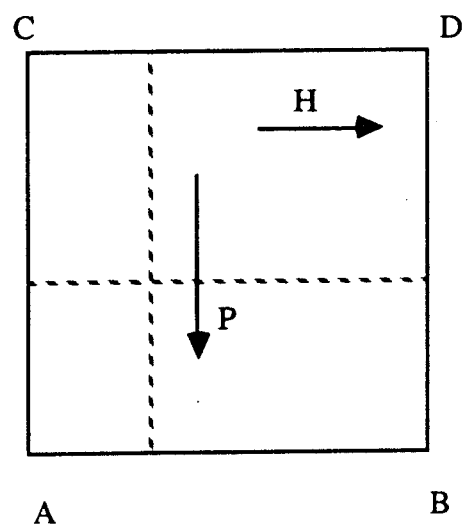
Venons-en maintenant à la théorie du "measurement" proprement dite. Je crois que toutes les difficultés viennent du fait qu'on n'a pas voulu regarder les "choses même", en restant à l'intérieur du formalisme hilbertien. Qu'est-ce qu'un détecteur de particule ? C'est macroscopiquement un milieu qui comporte toujours des parois solides, donc qui comporte toujours un repère euclidien intrinsèquement défini ; par ailleurs le procédé local de détection à l'intérieur de cette enceinte

repose toujours sur un processus en cascade, qui parti d'un événement élémentaire de nature quantique finit par provoquer un phénomène visible à l'oeil nu, ou détectable par des appareils "macroscopiques" (photographie, ampèremètres ...etc). La cascade, considérée spatialement, est un processus ramifiant qui diverge si l'on regarde sa morphologie fine dans l'espace (fig 10) ; mais, considérée d'un point de vue causal, la cascade est finalement un processus *convergent* aboutissant à un processus spatio-temporel comportant un changement de forme perceptible (noircissement d'un grain de sel d'argent, émission d'un top de compteur...etc). Si l'on regarde les choses du point de vue final, macroscopique, on sera amené à considérer le processus de cascade comme ramifiant en sens inverse (Fig 11), c'est à dire que l'effet global du processus (le "Top" du compteur détecteur) peut être déclenché par une multitude de processus spatialement différents, et si l'on continue à remonter ce diagramme ramifiant vers l'origine, on aboutira à la limite à des processus de bifurcations d'oscillateurs locaux dont la nature est quantique, mais qui doivent être - du fait de l'irréversibilité naissante -, traités classiquement. Or il existe un moyen d'y parvenir. C'est d'admettre qu'au départ une telle bifurcation est du type de la bifurcation de Hopf, mais qu'après bifurcation le point représentatif est capturé par un attracteur local qui lui-même va être macroscopiquement entraîné dans la cascade. (Observer qu'à cet égard les systèmes métastables intervenant dans la détection ou nécessitent l'introduction d'une source extérieure d'énergie (compteurs à étincelle), ou reposent sur la métastabilité d'un changement de phase (Chambres de Wilson), ou d'une cinétique chimique (photographie) ; dans tous ces cas, il serait déraisonnable de traiter "quantiquement, "hilbertiennement" ces phénomènes ... : aucune dynamique unitaire n'est irréversible... Le modèle local d'un tel système est donné par un diagramme *classique* du type de la fig 12, où on a figuré par la branche inférieure stable (celle du copli) un attracteur transitoire lui-même entraîné ultérieurement par la cascade. Or il est bien connu que avant la bifurcation de Hopf, où le cycle stable s'évanouit à l'origine pour devenir un cycle répulseur, on provoque *une avance à la bifurcation* lorsqu'on soumet le système à une perturbation périodique dont la période est égale à celle du cycle de Hopf. Cela provient du fait que dans le plan de phase considéré, les perturbations (toutes égales à un vecteur  $W$  constant) retombent à peu près toutes au même point du cycle, et par suite elles s'ajoutent et finissent par entraîner le point représentatif en-dehors du bassin d'attraction (Cf Fig 13 ). L'oscillateur évanouissant local que nous avons considéré plus haut et qui n'a qu'une existence idéale, virtuelle, se trouve physiquement réalisé par un système quantique local comme un électron arraché d'un atome sous l'impact d'un photon. La paroi idéale de l'oscillateur virtuel est alors représentée temporairement par le puits de potentiel coulombien qui lie l'électron à son noyau. Il est vraisemblable que dans un milieu fluide désordonné les périodes d'arrachement possibles sont relativement non fixées, et constituent un spectre continu, ce qui

explique la relative indépendance de la fonction d'onde par rapport à la nature spécifique du détecteur... Ainsi peut-on rendre compte du fait que le module de  $\phi$  est égal à la probabilité de détecter la particule. Mais évidemment ceci n'explique pas pourquoi les seules transitions permises à un champ ont lieu entre états stationnaires, ce qui est l'énigme par excellence de la Mécanique Quantique.

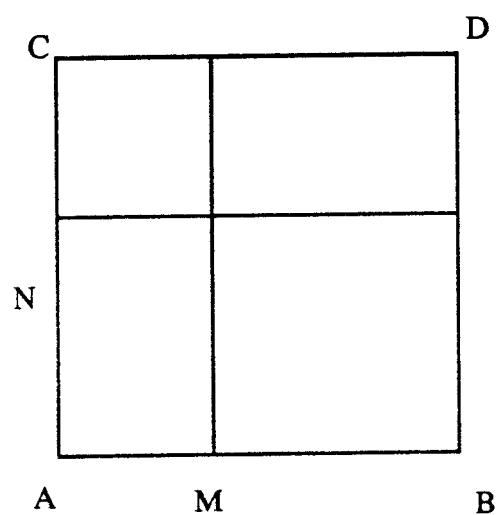
On pourra reformuler tout ce qui précède en revenant à l'action  $S$  en Dynamique hamiltonienne. En ce cas l'action  $S(q,t)$  permet de définir la propagation d'un front d'onde en fonction du temps  $t$  par la formule  $S(q,t) = 0$  ; et l'on a, classiquement  $dS/dt = p \cdot dq/dt = E dt$ . L'action apparaît comme un temps propre  $S$  au système, la positivité de l'énergie  $E$  exprime que ce temps propre ne rebrousse pas sur le temps universel  $t$ .

Le caractère quantique d'un système mécanique se manifeste par le fait que l'action  $S(p,q)$ , lorsqu'elle est localisée sur un mouvement effectif du système, y est *circulairement dérivable* ; de ce fait, *l'espace des co-vecteurs  $(p,q)$  est la base d'un fibré en cercles -unité, doté sur les trajectoires d'une connexion définie par l'Ansatz  $\exp i p dq / \hbar$* . De ce point de vue, on peut penser que l'impossibilité quantique de mesurer position et vitesse d'une particule revient à exprimer le fait que *la loi du calcul de la dérivée d'une fonction composée n'est plus valable* lorsqu'il s'agit d'utiliser physiquement le résultat d'une mesure. Dans l'expression  $dS/dt = dS/dq \cdot dq/dt$ , les quotients différentiels intervenant au second membre donnent naissance à des rationnels circulaires non-cohérents, en sorte que leur produit n'est, en général, pas défini.



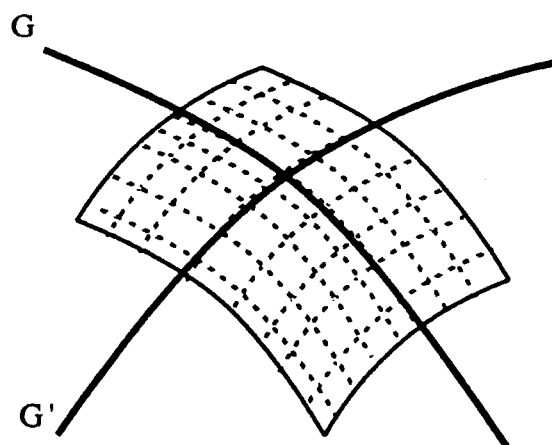
Le "Carré"

Figure 1



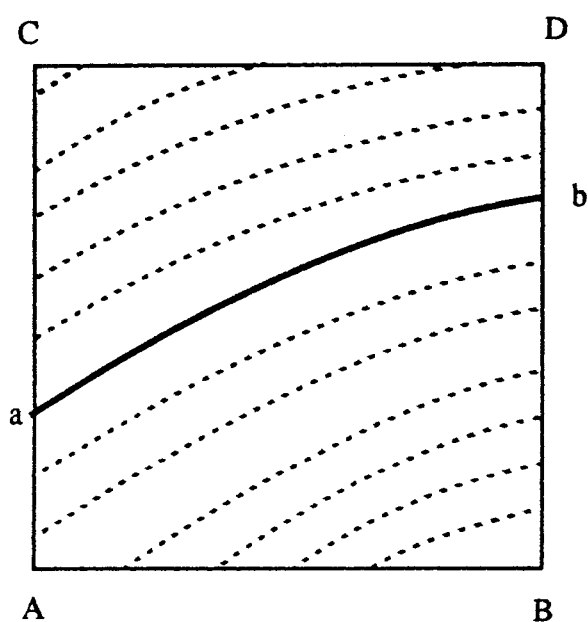
Médiations du "Carré"

Figure 2



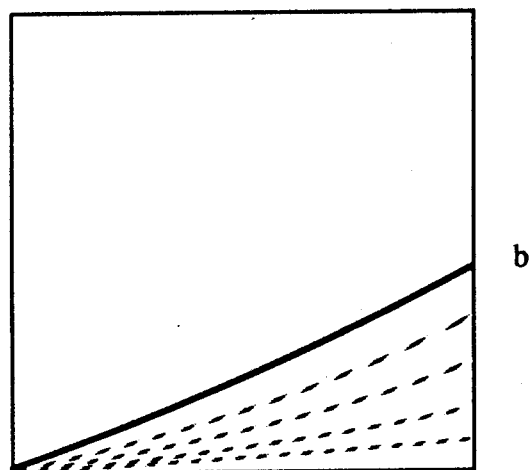
**Figure 3**

Intersection transversale  
de deux arcs réguliers



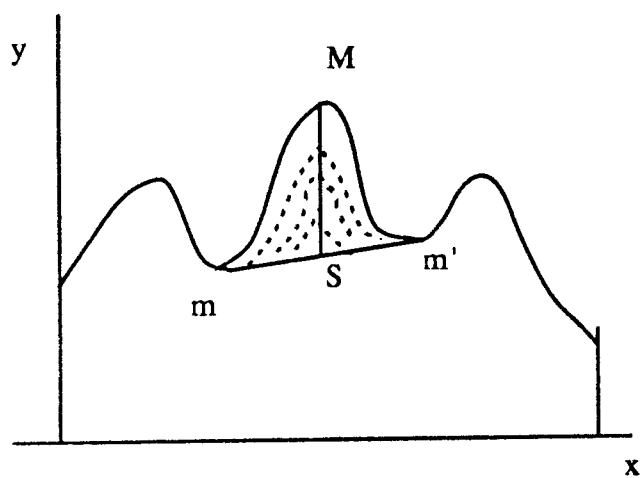
**Figure 4**

Théorème de Thalès :  
Extension d'un arc transverse  
dans un feuilletage.

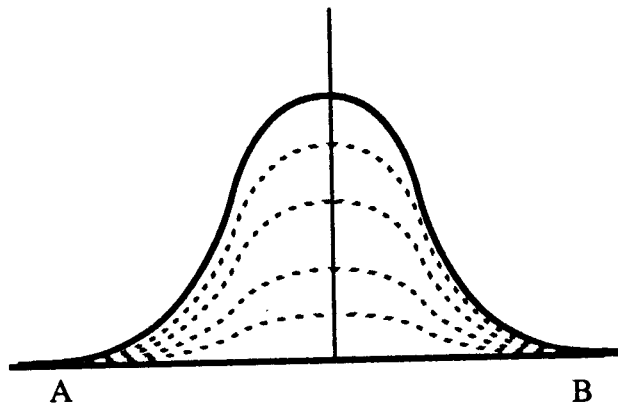


**Figure 5**

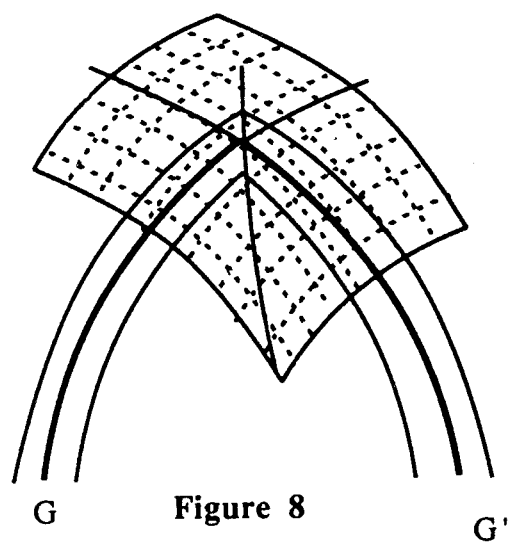
"Thalès triangulaire"



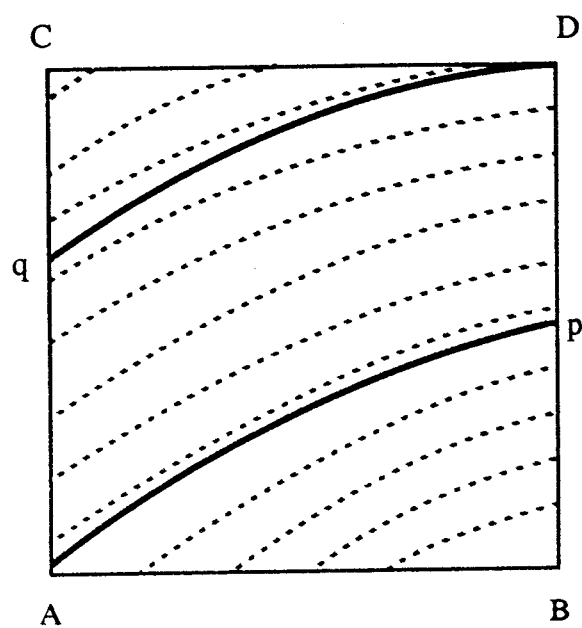
**Figure 6**



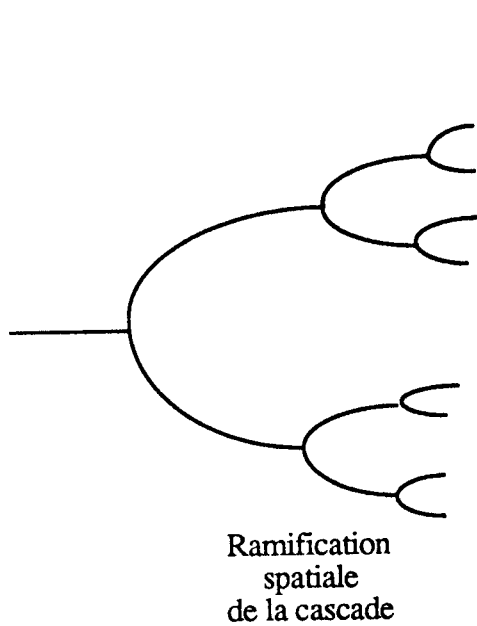
**Figure 7**



**Figure 8**  
Raccordement régulier  
de deux arcs transverses



**Figure 9**  
Isotopie d'une rotation à l'identité



Ramification  
spatiale  
de la cascade

**Figure 10**

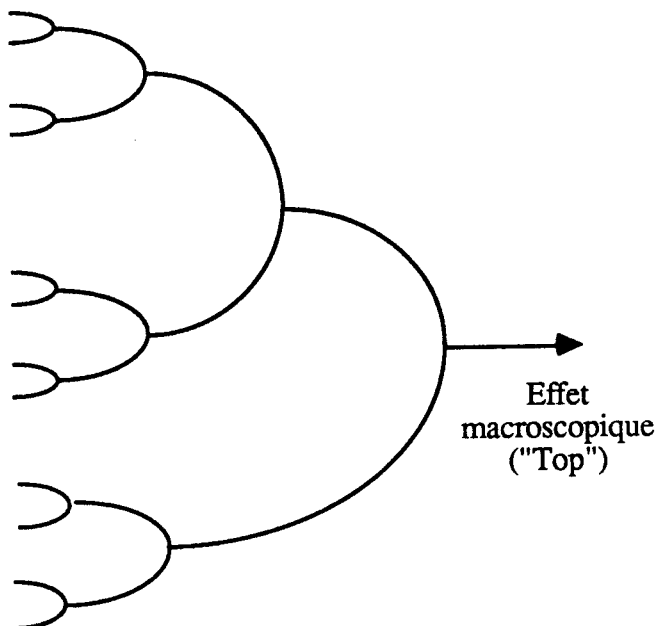
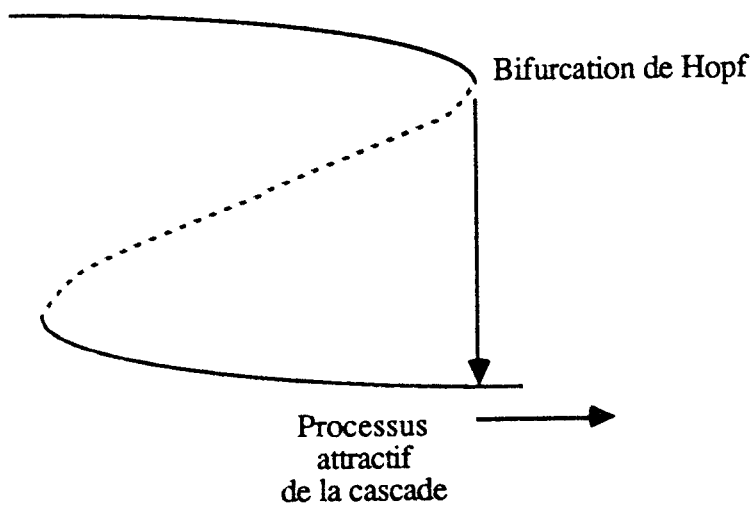
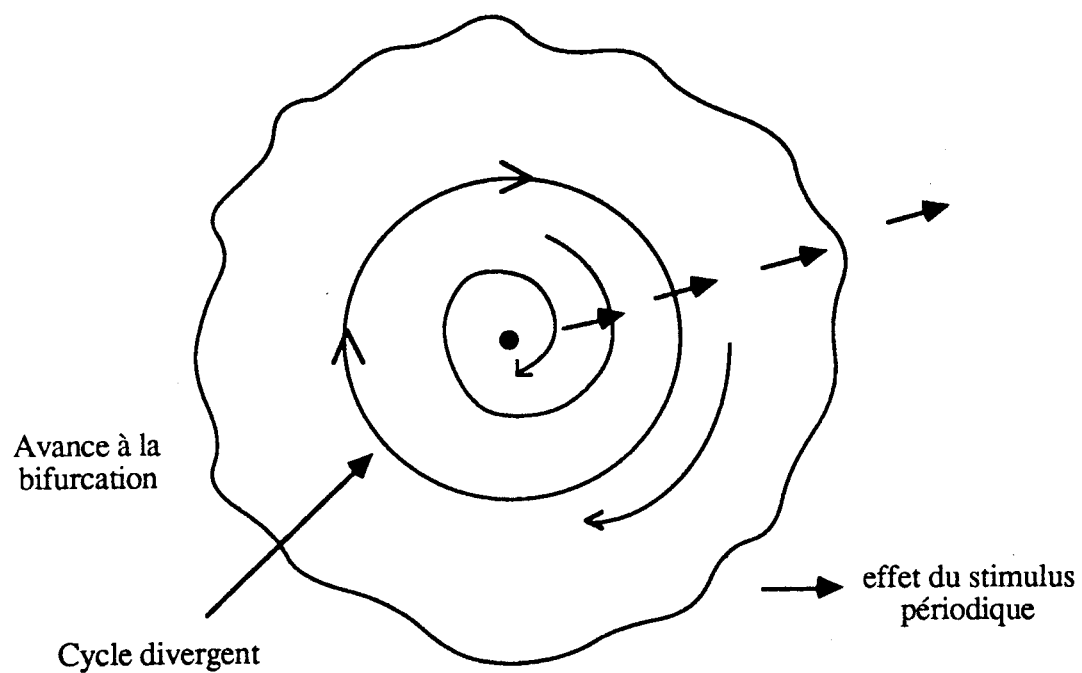


Schéma causal de l'effet détection  
(origines virtuelles du "Top")

**Figure 11**



**Figure 12**



**Figure 13**