

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

P. MOUSSA

## Grandes déviations et analyse des objets fractals

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1990, tome 41  
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa,  
R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. n° 3, p. 131-142

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1990\\_\\_41\\_\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__131_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Grandes Déviations et Analyse des Objets Fractals \*

P. Moussa  
Service de Physique Théorique,  
C. E. N. Saclay,  
F-91191 Gif sur Yvette, France

## Resumé

Les données expérimentales décrivant la dynamique des systèmes chaotiques font apparaître des objets étranges, terminologie décrivant essentiellement des attracteurs dont le support est un objet fractal de dimension non entière. La description de la mesure engendrée par la dynamique sur cet objet conduit à l'introduction de corrélations dont les lois d'échelle font apparaître un spectre de dimension. On va montrer que ce spectre de dimension résulte naturellement d'un argument utilisant le théorème des grandes déviations en théorie des probabilités. En fait la justification n'est actuellement possible que pour les mesures ergodiques invariantes par une transformation expansive. Cependant les succès de la méthode dans les applications expérimentales laisse penser que son champ d'application est beaucoup plus général.

## 1. Introduction

Dans la dynamique chaotique, les expériences aussi bien que les simulations numériques montrent que les trajectoires instables peuvent s'accumuler sur des attracteurs étranges. Sur ces attracteurs le mouvement est sensible aux conditions initiales. Il n'est alors pas possible de prévoir avec certitude ce mouvement, et on peut seulement en prévoir des moyennes statistiques adéquates. Il est certes aisé de produire des représentations graphiques de ces mouvements chaotiques, mais le physicien a besoin d'une méthode spécifique pour extraire de ces données des quantités que l'on peut ensuite comparer avec des résultats théoriques. Déterminer, et bien sur critiquer, cette méthode est aussi l'objet de l'approche scientifique, et j'espère rejoindre sur ce point les réflexions du Professeur Thom. Avant d'aller plus loin, je remercie les organisateurs de l'occasion qu'ils m'ont donnée de participer avec cet exposé aux manifestations en l'honneur de René Thom, et de témoigner, au delà des différences de langage entre les approches mathématiques et physiques, de mon intérêt pour ses travaux.

Il se trouve que la méthode d'analyse qui a été élaborée notamment par Jensen et al.<sup>1</sup> fait appel à une analogie nouvelle avec la thermodynamique classique. Leur

SPhT/90-035

---

\* exposé donné à la 48<sup>ième</sup> Rencontre entre Physiciens Théoriciens et Mathématiciens de la R.C.P. 25 du C.N.R.S. en l'honneur de René Thom, 11-13 mai 1989, Université Louis Pasteur, Strasbourg

travail initial concernait l'étude des flots convectifs (rouleaux) dans une cellule contenant du mercure liquide, chauffée par le bas de façon à établir des régimes stationnaires, et la comparaison des divers exposants des lois d'échelle satisfaites par les quantités observables (champs de vitesses ou champs de température) avec les lois universelles déduites de l'étude des applications du cercle sur lui même. Cette approche thermodynamique a été en fait entreprise ou poursuivie par de nombreux autres auteurs<sup>2-15</sup>. Plusieurs articles de revue sont disponibles<sup>16,17</sup>. Cette approche a pris le nom d'analyse multifractale des mesures, et par extension les objets qui supportent ces mesures sont maintenant dénommés "multifractals". La relation entre la thermodynamique et l'étude des grandes déviations en théorie des probabilités est bien connue depuis les travaux de Lanford<sup>18,19</sup>. La même analogie a été mise en évidence pour les objets multifractals par Collet et al.<sup>20</sup>. L'objet de cette conférence est de donner une description aussi élémentaire que possible de cette méthode d'analyse multifractale des mesures et d'indiquer dans quelles conditions on est actuellement capable d'en justifier l'application aux mesures engendrées par les systèmes dynamiques, c'est à dire à des mesures invariantes par des transformations qui représentent le mouvement. L'une des caractéristiques les plus intéressantes de cette analyse est qu'elle fournit une interprétation des exposants des lois d'échelles satisfaites par diverses moyennes statistiques en terme de dimensions de Hausdorff d'ensembles de "singularités" associés à la mesure.

## 2. L'algorithme de "comptage de boîtes" (box-counting)

Il n'existe pas de bonne traduction française pour nommer l'algorithme de "box-counting" que nous allons décrire. On considère dans l'espace euclidien à  $d$  dimensions, une mesure de probabilité  $\mu$  à support borné  $\mathcal{S}$ . La normalisation est donnée par:

$$\int_{\mathcal{S}} d\mu = 1 . \quad (1)$$

On recouvre le support  $\mathcal{S}$  par un réseau d'hypercubes, chaque hypercube ayant un côté égal à  $2^{-n}$ . Soit  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble de ces hypercubes, nommés habituellement boîtes. On définit alors la fonction de partition associée à ce recouvrement de la façon suivante:

$$Z_U^{(n)}(\beta) = \sum_b (\mu(b))^\beta . \quad (2)$$

La somme porte sur l'ensemble des boîtes  $b \in \mathcal{P}_n$  nécessaires pour recouvrir  $\mathcal{S}$ , et telles que  $\mu(b) \neq 0$ , ainsi les valeurs négatives de  $\beta$  sont permises. L'indice  $U$  rappelle le fait que les pièces de la partition, c'est à dire les hypercubes, sont de taille uniforme. Le nombre des boîtes dans la somme est borné par  $A2^{dn}$  où  $A$  est un volume (fini) assez grand incluant  $\mathcal{S}$ . Dans le langage de la théorie des probabilités, la fonction de partition est une fonction caractéristique associée à une mesure de probabilité déduite de  $\mu$  par moyenne locale sur chaque boîte. On sélectionne alors

les boîtes  $b$  telles que, pour un  $t > 0$ , on ait:

$$t < \frac{(-1)}{n} \log_2(\mu(b)) < t + dt, \quad (3)$$

et on dénote leur nombre par  $N_n(t) dt$ . L'algorithme de "box-counting" consiste donc à dénombrer les boîtes  $b$  dont la mesure est de l'ordre de  $2^{-nt}$ . L'hypothèse de "box counting" nécessaire à une bonne utilisation de l'algorithme est que la limite suivante existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2(N_n(t)) = f(t). \quad (4)$$

Sous cette hypothèse il est alors aisé d'évaluer le comportement pour  $n$  grand de la fonction de partition définie en (2). En effet on peut alors écrire:

$$Z_U^{(n)}(\beta) \simeq \int_0^\infty N_n(t) 2^{-n\beta t} dt. \quad (5)$$

Comme  $N_n(t) \sim 2^{nf(t)}$ , on peut alors estimer la fonction de partition par la méthode de Laplace:

$$Z_U^{(n)}(\beta) \simeq \int_0^\infty 2^{n(f(t)-\beta t)} dt. \quad (6)$$

Par conséquent,  $Z_U^{(n)} \sim 2^{-nF_U(\beta)}$ , et on dit alors que la "limite thermodynamique" est satisfaite, c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)}{n} \log_2(Z_U^{(n)}(\beta)) = F_U(\beta), \quad (7)$$

Par définition, l'énergie libre (uniforme)  $F_U(\beta)$ , associée à la mesure  $\mu$ , est définie par:

$$F_U(\beta) = \inf_{t \geq 0} (\beta t - f(t)). \quad (8)$$

La relation entre  $f(t)$  and  $F_U(\beta)$  n'est autre que la transformation de Legendre, similaire à la relation entre entropie et énergie libre en thermodynamique classique. En fait, l'hypothèse de "box counting" est faite pour assurer l'existence de la limite thermodynamique (7). Nous verrons plus loin que les arguments de grandes déviations fournissent la bonne interprétation de cette hypothèse.

### 3. Spectre de dimension et dimension de Hausdorff

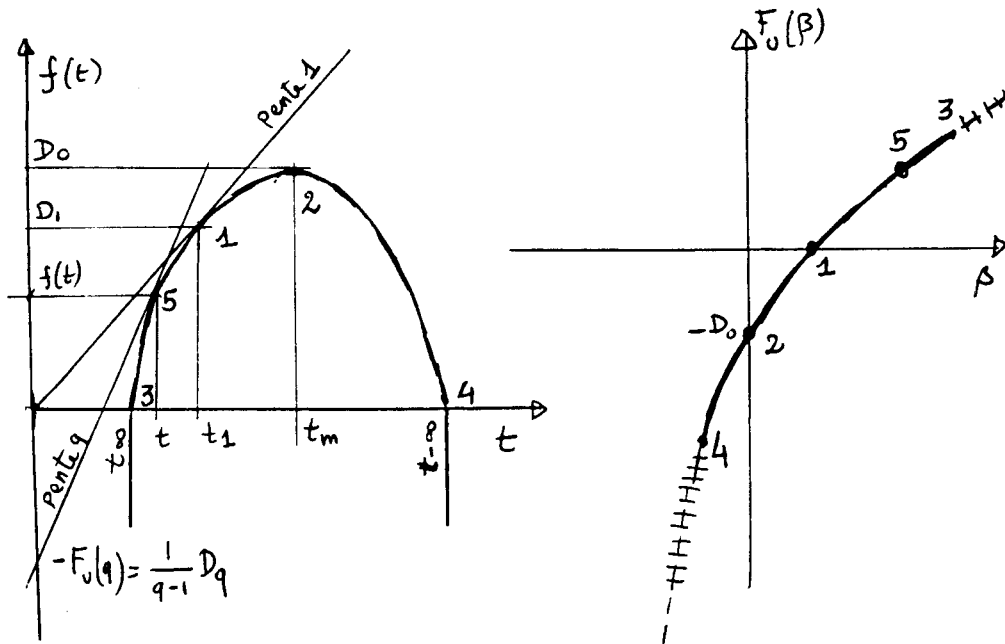
Nous allons indiquer les relations entre l'énergie libre  $F_U(\beta)$  et les diverses dimensions que l'on peut associer à la mesure  $\mu$ . Tout d'abord rappelons quelques propriétés de la transformation de Legendre (8). Pour simplifier, on va supposer dans (8) que la fonction  $f(t)$  est dérivable et convexe dans l'intervalle où elle est positive. Il est

utile de donner à  $f(t)$  la valeur  $-\infty$  en dehors de cet intervalle, et de compléter le graphe par deux demi-droites verticales négatives aux points où  $f(t)$  s'annule. Dans l'intervalle où  $f(t)$  est positive, on déduit alors aisément de (8):

$$F_U(\beta) = \beta t - f(t), \text{ où } t \text{ est donné par : } \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \beta. \quad (9)$$

$$f(t) = t\beta - F_U(\beta), \text{ où } \beta \text{ est donné par : } \frac{\partial F_U(\beta)}{\partial \beta} = t. \quad (10)$$

On complète également le graphe de  $F_U(\beta)$  par les deux demi-droites tangentes aux extrémités de l'intervalle de définition tracées vers l'extérieur de cet intervalle. L'interprétation géométrique est bien connue: la tangente au point  $t$  au graphe de la fonction  $f(t)$  intersecte l'axe vertical au point d'ordonnée  $-F_U(\beta)$ . Si  $f(t)$  décrit la courbe en coordonnées cartésiennes,  $F_U(\beta)$  la décrit en coordonnées tangentielles. Une situation typique est donnée dans la figure.



Les fonctions  $f$  et  $F$

Dans la figure, les points correspondant des courbes portent les numéros décrits dans les rubriques suivantes.

- 1)  $\beta = 1$ . De la condition de normalisation (1), et des définitions données en (2) et (7), on déduit  $F_U(1) = 0$ . La tangente à la courbe  $f(t)$  de pente 1 passe par l'origine. La dérivée en  $\beta = 1$  de la fonction  $F_U(\beta)$  n'est autre que la dimension

d'information<sup>5-6</sup>  $\sigma$  de la mesure avec:  $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1/n) \sum_b \mu(b) \log(\mu(b))$   
 En effet, on a:

$$\left. \frac{\partial Z_U^{(n)}}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} = \sum_b \mu(b) \log(\mu(b)) , \quad (11)$$

dont on déduit aisément grâce à (7) le résultat. En fait on a aussi  $\sigma = D_1$ , où  $D_1$  est défini dans l'équation (12) ci dessous.

- 2)  $\beta = 0$ . Dans la relation (2), on compte en fait le nombre de boîtes nécessaires pour recouvrir le support  $\mathcal{S}$  de  $\mu$ . Il y a donc une relation entre  $F_U(0)$  et la dimension de Hausdorff<sup>31</sup>  $\dim(\mathcal{S})$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Plus précisément, on a:  $(-F_U(0)) \geq \dim(\mathcal{S})$ . L'égalité s'obtient au prix d'hypothèses supplémentaires comme celles que nous décrirons dans les sections 5 et 6 pour les systèmes dynamiques expansifs.
- 3)  $\beta = +\infty$  correspond aux boîtes exceptionnellement fournies ( $\mu(b)$  grand). La valeur correspondante  $t_{+\infty}$  est positive et se confond avec l'extrémité gauche de l'intervalle de définition de  $f(t)$ .
- 4)  $\beta = -\infty$  correspond aux boîtes exceptionnellement pauvres ( $\mu(b)$  petit). La valeur correspondante  $t_{-\infty}$  est inférieure ou égale à la dimension de plongement  $d$  et se confond avec l'extrémité droite de l'intervalle de définition de  $f(t)$ .
- 5)  $\beta = q$  entier et positif. La valeur de  $F_U(\beta)$  pour  $\beta = q$  entier plus grand que 1 correspond aux évaluations d'auto-corrélation de la mesure, ce qui s'exprimerait, dans le cas d'une mesure discrète constituée de masses égales, à la probabilité d'avoir  $q - 1$  masses dans la même boîte.  $F_U(q)$  est égal à l'exposant des lois d'échelle satisfaites par les fonctions de corrélation<sup>5</sup>, exposant relié à la dimension de corrélation (encore appelée dimension de Renyi)  $D_q$  par:

$$D_q = \frac{1}{(q-1)} F_U(q) . \quad (12)$$

Cette relation s'étend au cas  $q = 0$  et  $D_0$  est la dimension de Hausdorff du support de  $\mu$  et au cas  $q = 1$ , où on retrouve la dimension d'information  $D_1$ . Par ailleurs, cette formule définit les dimensions de corrélation pour un ordre  $q$  non entier.

Il est intéressant d'évaluer la mesure totale de la réunion des boîtes  $b$  satisfaisant (3) pour un  $t$  fixé. Utilisant (4), le résultat est que la mesure totale s'annule pour toutes les valeurs de  $t$  sauf une,  $t_1$ , pour laquelle  $t - f(t)$  est minimum, ce qui correspond à  $\beta = 1$  dans l'équation (8). Cette valeur particulière  $t_1$  est en général différente de la valeur  $t_m$  pour laquelle  $f(t)$  atteint sa valeur maximale égale à la dimension de Hausdorff du support  $\mathcal{S}$ . Dans certains cas particuliers (fort intéressants),  $f(t)$  ne prend qu'une seule valeur non nulle, auquel cas  $F_U(\beta)$  se réduit à la fonction identique  $\beta$  et  $t_m = t_1$ . C'est le cas de la mesure de Lebesgue sur un intervalle, et de la mesure naturelle sur l'ensemble de Cantor classique. Dans tous les autres cas, la mesure est contenue dans un ensemble de dimension de Hausdorff  $t_1$  strictement

inférieure à la dimension du support. Comme nous l'avons vu plus haut,  $t_1$  est alors égal à la dimension d'information  $\sigma = D_1$ . On doit donc être prudent quand on discute des dimensions de Hausdorff à l'aide d'arguments fondés sur les mesures, des ensembles de mesure nulle pouvant être essentiels pour apprécier les dimensions. La quantité  $t_1 = D_1$  est en fait la dimension de Hausdorff de la mesure, c'est à dire la plus petite dimension possible pour un ensemble de mesure pleine. En retirant du support  $\mathcal{S}$ , lui même de dimension  $t_m$ , des ensembles de mesure zéro, on peut obtenir un ensemble de dimension  $t_1$ .

A ce stade de la discussion, il est important de noter que les dimensions  $D_q$  dépendent de la mesure étudiée. Seule la dimension  $D_0$  ne dépend que du support. Dans ce sens les dimensions  $D_q$  ne sont pas des dimensions géométriques et la terminologie "dimension" actuellement entrée dans l'usage est quelque peu abusive. Par contre, nous verrons dans la section 6 que les valeurs de la fonction  $f(t)$  peuvent être interprétées en terme de dimensions géométriques.

#### 4. Grandes déviations et limite thermodynamique

L'expression rigoureuse de propriété de "box counting" nécessite d'inverser hypothèse et conclusion, c'est à dire de déduire en quelque sorte (4) de (7). Il nous faut tout d'abord préciser un peu la définition de  $N_n(t)$ . On définit  $N_n^{<}(t)$ , (respectivement  $N_n^{>}(t)$ ) comme le nombre de boîtes  $b$  de taille  $2^{-n}$ , telles que  $\mu(b) > 2^{-nt}$ , (respectivement  $\mu(b) < 2^{-nt}$ ). Les choix inversés du sens des inégalités a pour objet d'obtenir les équations (14) and (15). On a alors la proposition suivante:

**Proposition 1.** *On suppose que la fonction de partition (uniforme) associée à la mesure  $\mu$  (équation 2), admet une limite thermodynamique (équation (7))  $F_U(\beta)$  dérivable par rapport à  $\beta$ , et on définit alors la fonction  $f(t)$ :*

$$f(t) = \inf_{\beta} (t\beta - F_U(\beta)) . \quad (13)$$

La fonction  $f(t)$  est alors convexe et admet un unique maximum  $t_m$ . On a alors:

$$\text{pour: } t < t_m , f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2(N_n^{<}(t)) , \quad (14)$$

et:

$$\text{pour: } t > t_m , f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2(N_n^{>}(t)) . \quad (15)$$

Cette proposition est une des nombreuses versions du théorème des grandes déviations, qui remonte à Cramér et Chernoff<sup>19,21</sup>. Une preuve adaptée à notre situation est donnée par Plachky et al.<sup>22,23</sup>. La signification de ce résultat est la suivante: à la limite où  $n$  tend vers l'infini, le nombre des boîtes correspondant à une valeur de  $t \neq t_m$  est négligeable par rapport à celles correspondant à  $t_m$ . La proposition permet cependant d'en évaluer les probabilités: la théorie des grandes déviations mesure

des probabilités asymptotiquement négligeables. Ces probabilités négligeables sont cependant essentielles pour les évaluations dimensionnelles de la section précédente. Il existe des versions plus raffinées du théorème des grandes déviations où les conditions de dérivabilité que nous avons énoncées sont moins restrictives<sup>23</sup>. De tels résultats pourraient être utiles dans le cas où la fonction  $F_U(\beta)$  admet des points singuliers. De telles singularités pourraient recevoir une interprétation analogue à celle des transitions de phases en mécanique statistiques<sup>24,25</sup>.

### 5. La limite thermodynamique pour les systèmes dynamiques expansifs

Nous allons indiquer à partir de quelles hypothèses on peut prouver l'existence de la limite thermodynamique (7). Le cadre dans lequel nous travaillons est celui des systèmes dynamiques expansifs<sup>26-28</sup>. Les exemples particuliers déjà traités recouvrent les cas des applications de Markov expansives<sup>20,10,29</sup>, et des ensembles de Julia proches du cercle unité<sup>30,31</sup>.

On va supposer que la mesure est invariante par une transformation  $T$  dérivable, telle que l'opérateur dérivé ait une norme strictement plus grande que 1 sur le support  $\mathcal{S}$  de la mesure  $\mu$ . On notera  $|I|$  le diamètre de l'ensemble  $I$  et on va de plus faire les hypothèses suivantes:

- 1) Ergodicité: quelque soit l'ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathcal{O} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ , il existe un entier  $n$  tel que pour le  $n$ -ième itéré  $T^{(n)}$  on ait:  $T^{(n)}(\mathcal{O}) \supset \mathcal{S}$
- 2) Equirépartition de la mesure: pour tous les boréliens  $I$  et  $J$ , on a:

$$\frac{\mu(T(I))}{\mu(T(J))} = \frac{\mu(I)}{\mu(J)}. \quad (16)$$

Cette relation est évidente si  $T$  est inversible. Elle précise les propriétés de répartition sur les branches inverses dans le cas contraire.

- 3) Lemme de distortion: Pour tout ensembles  $I$  and  $J$  tels que  $I_n$  et  $J_n$  ne soit pas trop grands (plus précisément ne recouvrent pas  $\mathcal{S}$  totalement), où  $I_n = T^{(n)}(I)$  et  $J_n = T^{(n)}(J)$ , on a:

$$(1/\gamma) < \left( \frac{\text{diam}(I)}{\text{diam}(J)} \right) \Bigg/ \left( \frac{\text{diam}(T^{(j)}(I))}{\text{diam}(T^{(j)}(J))} \right) < \gamma, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

La limitation de  $n$  provient du fait que en général  $T$  n'est pas inversible et que  $T(\mathcal{S})$  peut recouvrir  $\mathcal{S}$  plusieurs fois. Il faut éviter que  $T^{(n)}(I)$  (ou  $T^{(n)}(J)$ ) ne recouvrent un grand nombre de fois le support. On peut justifier ce lemme de distortion dans le cas des systèmes dynamiques dans le plan complexe et plus généralement dans le cas de certains systèmes dynamiques expansifs<sup>20,29-31</sup>

**Proposition 2.** *Sous les hypothèses ci-dessus, la limite thermodynamique (7) existe.*

On obtient la même énergie libre limite si on restreint dans (2) les boîtes  $b$  à la condition d'avoir une intersection non vide avec un petit ouvert rencontrant lui



même  $\mathcal{S}$ . La même limite s'obtient si on remplace dans (7) les pièces  $b$  de la partition par les ouverts d'un recouvrement quelconque, à la condition qu'au niveau  $n$  et pour un entier  $h$  fixé indépendant de  $n$ , chaque ouvert soit contenu dans un hypercube de taille  $2^{n-h}$  et contienne un hypercube de taille  $2^{n-h}$ , et inversement en permutant le rôle des hypercubes et des ouverts du recouvrement au niveau  $n$ . La preuve de la proposition consiste à vérifier l'existence de constantes  $C$  et  $C'$  telles que:

$$C' Z_U^n Z_U^m < Z_U^{n+m} < C Z_U^n Z_U^m, \quad (18)$$

dont on déduit l'existence de la limite thermodynamique par un argument classique<sup>27</sup>. Pour prouver (18), nous allons utiliser l'abréviation  $Z_n$  pour  $Z_U^{(n)}(\beta)$ , et la notation  $\mathcal{P}_n$  pour la partition faite d'hypercubes de côté  $2^{-n}$ . On a:

$$Z_{n+m} = \sum_{b \in \mathcal{P}_{n+m}} (\mu(b))^\beta \leq \sum_{d \in \mathcal{P}_n} (\mu(d))^\beta \sum_{b \in \mathcal{P}_{n+m}, b \cap d \neq \emptyset} C \left( \frac{\mu(b)}{\mu(d)} \right)^\beta. \quad (19)$$

La somme sur les boîtes  $d$  est restreinte par la condition  $\mu(d) \neq 0$ . En sommant sur  $d$  et ensuite sur tous les  $b$  qui rencontrent  $d$ , on peut compter certaines boîtes  $b$  plusieurs fois. Dans (18) on pourrait en fait poser  $C = 1$ . Mais le nombre de comptages répétés reste borné par un nombre  $K$  indépendant de  $n$  (ainsi que le montre un raisonnement géométrique aisé). Donc (18) reste valable si on renverse le sens des inégalités avec  $C = (1/K)$ . Dans (18), et grâce à (16), on peut remplacer dans la dernière somme  $b$  et  $d$  par  $T^N(b)$  et  $T^N(d)$ . Choissant  $N$  de façon que  $\mu(T^N(d))$  et  $|T^N(d)|$  soit d'ordre 1, on remplace alors la somme sur  $b$  par la somme sur  $T^N(b)$ , et à une constante près, on obtient:

$$Z_{n+m} \leq \sum_{d \in \mathcal{P}_n} (\mu(d))^\beta \sum_{T^N(b)} C \mu(T^N(b))^\beta, \quad (20)$$

où maintenant la somme sur  $T^N(b)$  est prise sur tous les  $b$  tels que  $T^N(b)$  intersecte  $T^N(d)$  qui est un ensemble dont le diamètre est d'ordre 1. Si l'on savait que sous ces conditions  $T^N(b)$  intersecte un nombre fini de boîtes de  $\mathcal{P}_m$ , on pourrait à une constante multiplicative près, remplacer la dernière somme par une somme sur les boîtes de  $\mathcal{P}_m$ , et on obtiendrait l'inégalité voulue:  $Z_{n+m} \leq C Z_n Z_m$ , toujours au prix d'une modification de la constante. Mais le lemme de distortion (17) nous dit que:

$$\frac{|T^N(b)|}{|T^N(d)|} \sim \frac{|b|}{|d|} = 2^{-m}. \quad (21)$$

Donc  $|T^N(b)| \sim 2^{-m}$ , d'où l'on déduit que  $|T^N(b)|$  intersecte un nombre fini de pièces de  $\mathcal{P}_m$ , c'est à dire l'assertion qui manquait dans la preuve. Un procédé semblable donne l'inégalité dans l'autre sens.

## 5. Dimensions des ensembles de singularités de la mesure

On définit l'exposant local  $\theta(x)$  au point  $x$  du support de la mesure  $\mu$  par la relation:

$$\theta(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\log_2(\mu(\mathcal{B}_r(x)))}{\log_2(r)} \right] , \quad (22)$$

où  $\mathcal{B}_r(x)$  est une boule de rayon  $r$  centrée au point  $x$  et on définit l'ensemble  $B(t)$  comme l'ensemble des points du support ayant même exposant local  $t$ . Sous les hypothèses de la section précédente, on a la proposition:

**Proposition 3.** *La dimension de Hausdorff de  $B(t)$  est égale à  $f(t)$ , où  $f(t)$  s'obtient à partir de la transformation de Legendre appliquée à  $F_U(\beta)$  défini en (7). De plus, dans (22) on peut remplacer la limite supérieure par une limite inférieure et on obtient le même résultat  $f(t)$ .*

La propriété (4) de "box-counting" permet de construire facilement un recouvrement de  $B(t)$  et d'obtenir l'inégalité:

$$f(t) \geq \dim(B(t)) , \quad (23)$$

et la difficulté est de montrer que cette inégalité est saturée. Pour y parvenir, on a besoin de bornes inférieures pour les dimensions de Hausdorff, ce qu'on réalise en construisant une mesure auxiliaire  $\nu$  dont le support contient  $B(t)$ , telle que  $\nu(B(t)) = 1$  et dont le comportement local satisfait, pour  $r$  petit:

$$\nu(\mathcal{B}_r(x)) \leq cr^{f(t)} , \quad (24)$$

où  $c$  est une constante. Le lemme de Frostman<sup>32,33</sup> permet alors d'obtenir l'inégalité opposée à (23). La construction de la mesure auxiliaire<sup>20,29-31</sup> utilise de façon explicite les résultats de grandes déviations (14) et (15). L'idée essentielle est que (4) nous dit que  $N_n(t)$  est asymptotiquement nul mais différent de zéro pour tout  $n$  fini, dès que  $f(t)$  n'est pas nul. Le lemme de distortion est utilisé pour comparer des échelles de longueur différentes et l'ergodicité pour montrer que deux points quelconques du support sont en ce sens comparables.

## 6. Fonctions de partitions dynamiques

Une situation particulièrement intéressante est celle où la transformation  $T$  n'est pas inversible et admet  $q$  inverses d'images essentiellement disjointes sur le support de la mesure. Dans ce cas, on définit la fonction de partition dynamique comme suit:

$$Z_D^{(n)}(\beta) = \sum_{b \in \mathcal{D}_n} (|b|)^\beta = \sum_i^{q^n} (|T_i^{-n}(\mathcal{S})|)^{-\beta} , \quad (25)$$

où la deuxième somme porte sur l'ensemble  $\mathcal{D}_n$  des images de  $\mathcal{S}$  par les  $q^n$  branches inverses de la fonction  $T^{(n)}$ . Sous les mêmes hypothèses que dans la section 5, on a alors la proposition suivante:

**Proposition 4.** *La limite thermodynamique est assurée pour la fonction de partition dynamique  $Z_D^{(n)}(\beta)$ , c'est à dire on a:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log_q (Z_D^{(n)}(\beta)) = F_D(\beta) , \quad (26)$$

et de plus on a:

$$F_D(F_U(\beta)) = \beta . \quad (27)$$

Les fonctions  $F_U$  et  $F_D$  sont inverses l'une de l'autre.

La preuve<sup>20,29–31</sup> fait intervenir un processus de comparaison, analogue à celui utilisé dans la section 5, entre la partition uniforme par des hypercubes et la partition dynamique (partition de Markov) engendrée par applications successives des inverses de  $T$ . La relation (27) est due à Collet et al.<sup>20</sup>. Elle permet de calculer les dimensions de corrélation  $D_q$  et les dimensions des ensembles de singularités de la mesure à partir des partitions dynamiques, pour lesquelles le formalisme habituel de la mécanique statistique permet d'établir des propriétés de régularité et d'analyticité<sup>27</sup>, et de calculer des développements en perturbation<sup>34,35,31</sup>

## 7. Conclusion

L'étude des mesures invariantes par l'analyse multifractale des mesures est une méthode qui permet d'extraire des informations que l'on peut alors comparer aux modèles construits par la théorie. On peut ainsi traiter des problèmes de dynamique chaotiques qu'aucune méthode antérieure ne permettait d'aborder. Il est important de souligner le caractère très particulier des mesures susceptibles d'être abordées par cette méthode. Le lien nouveau entre les aspects dynamiques et géométriques est très frappant: la dynamique peut le justifier et permettre de comprendre les approches descriptives antérieures des systèmes turbulents<sup>15</sup>, ainsi que des résultats déjà anciens dans l'étude des dimensions<sup>36</sup>. Le sujet mélange de façon intime développements mathématiques délicats (théorie des systèmes dynamiques, de la mesure et des dimensions) et l'approche physique (thermodynamique et mécanique statistique). La théorie des probabilités semble être le pont nécessaire pour rejoindre les points de vues.

Cet exposé reprend plusieurs travaux cités en référence, mais je tiens à remercier particulièrement pour leur aide P. Collet et A. Porzio dont l'article<sup>20</sup> contient l'essentiel des idées exposées dans cette conférence.

## 8. References

- [1] M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia and J. Stavans *Phys. Rev. Lett.* **55** 2798–2801 (1985).
- [2] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman *Phys. Rev.* **A33** 1141–1151 (1986).
- [3] M. J. Feigenbaum *J. Stat. Phys.* **46** 919–924 (1987).
- [4] M. J. Feigenbaum, M. H. Jensen and I. Procaccia *Phys. Rev. Lett.* **57** 1503–1506 (1986).
- [5] H. G. E. Hentschel and I. Procaccia *Physica* **8D** 435–444 (1983).
- [6] P. Grassberger and I. Procaccia *Physica* **13D** 34–54 (1984).  
P. Grassberger *Physics Letters* **97A** 227–229 (1983)
- [7] R. Badii and A. Politi *J. Stat. Phys.* **40** 725–750 (1985).
- [8] G. Paladin and A. Vulpiani *Lett. Nuovo Cim.* **41** 82–86 (1984).
- [9] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 3521–3531 (1984).
- [10] T. Bohr and D. Rand *Physica* **25D** 387–398 (1987).
- [11] T. Bohr and T. Tel *The Thermodynamic of Fractals*, in : “Directions in Chaos”, Hao Bai Lin ed., (World Scientific, Singapore, 1988), Vol. **2**, p. 194–237.
- [12] G. Servizi, G. Turchetti and S. Vaienti *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** L639–L643 (1988).
- [13] S. Vaienti *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** 2023–2043 (1988).
- [14] J. P. Eckmann and I. Procaccia *Phys. Rev.* **A34** 659–661 (1986).
- [15] B. B. Mandelbrot, *J. Fluid Mech.* **62** 331–358
- [16] G. Paladin and A. Vulpiani *Physics Reports* **156** 147–225 (1987).
- [17] T. Tél *Z. Naturforschung* **43a** 1154–1174 (1988)
- [18] O. E. Lanford *Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics*, in : “Statistical Mechanics and Mathematical Problems”, A. Lenard ed., *Lecture Notes in Physics*, vol. **20** 1–113, Springer (1973).
- [19] R. S. Ellis *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Springer, New York (1985).
- [20] P. Collet, J. L. Lebowitz and A. Porzio *J. Stat. Phys.* **47** 609–644 (1987).
- [21] S. R. S. Varadhan *Large Deviations and Applications*, SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics **46** (1984).
- [22] D. Plachky *Ann. Math. Stat.* **42** 1442–1443 (1971).
- [23] D. Plachky and J. Steinebach *Period. Math.* **6** 338–340 (1974).
- [24] D. Katzen and I. Procaccia *Phys. Rev. Lett.* **58** 1169–1172 (1987).
- [25] R. Badii and A. Politi *Phase Transitions in Hyperbolic Dynamical Systems in “Chaos and Complexity”*, R. Livi, S. Ruffo, S. Ciliberto, M. Buiatti eds., (World Scientific, Singapore, 1988) 42–48.
- [26] R. Bowen *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, **470** (1975).
- [27] D. Ruelle *Thermodynamic formalism*, Addison Wesley, Reading (1978).

- [28] E. Vul, K. Khanin, Y. Sinai *Russ. Math. Surv.* **39** (1984) 1–40.
- [29] P. Collet *lecture given at the “Segunda Escuela Internacional de Sistemas Dinámicos”, Valparaiso, Chile* (1986).
- [30] P. Moussa *Hausdorff Dimension and Dimension Spectrum for Julia Sets Close to Unit Circle*, in “Non Linear Dynamics”, G. Turchetti ed., (World Scientific, Singapore), p.88–108 (1989).
- [31] P. Collet, R. Dobbertin, P. Moussa *Multifractal Analysis of Nearly Circular Julia Sets and Thermodynamical Formalism* Preprint, Service de Physique Théorique de Saclay, 1990.
- [32] O. Frostman *Ann. Univ. Lund* (1935).
- [33] J. P. Kahane *Ensembles Aléatoires et Dimensions* in “Recent Progress in Fourier Analysis”, I. Peral and J. L. Rubio de Francia eds., Elsevier North Holland (1985).
- [34] D. Ruelle *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **2** 99–107 (1982).
- [35] M. Widom, D. Bensimon, L. P. Kadanoff and S. J. Shenker *J. Stat. Phys.* **32** 443–454 (1983).
- [36] P. Billingsley *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons, New York (1965), pp. 136–145.