Marc Henneaux

Aspects hamiltoniens de la symétrie BRST

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1987, tome 38
« Conférences de H. Grosse, M. Henneaux, J.M. Maillard, M. Rosso et W. Zimmermann »,
, exp. n° 4, p. 55-65

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1987__38__55_0>

ASPECTS HAMILTONIENS DE LA SYMETRIE BRST (1)

Marc Henneaux (2)

Faculté des Sciences, Université Libre de
Bruxelles, Campus Plaine C.P. 231,
B-1050 Bruxelles, Belgique (3)

(1) Exposé présenté à la "44e rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens", Strasbourg (avril 1987)

(2) Chercheur qualifié du F.N.R.S. (Belgique)

(3) Aussi au "Centro de Estudios Cientificos de Santiago", Casilla 16443, Santiago 9, Chili

1. Introduction

On a cru pendant longtemps que l'existence de la symétrie BRST, découverte dans le cadre des théories de Yang-Mills [1,2] , était intimement liée à la structure de groupe des transformations de jauge.

En effet, dans le cas d'un groupe de jauge, la nilpotence de la symétrie BRST est équivalente à l'identité de Jacobi pour les constantes de structure.

Le but de ces notes est d'indiquer comment la construction BRST repose en fait sur une structure plus primitive, et ne nécessite pas une action de groupe des transformations de jauge. Cette structure plus primitive est celle des surfaces de "première classe" [3] ("coisotropes") en géométrie symplectique.

2. Symétrie BRST dans l'espace des phases

Afin de décrire la structure intrinsèque de la symétrie BRST, il est nécessaire de travailler dans l'espace des phases. Dans l'espace des configurations, il s'avère en général impossible de construire une transformation BRST qui soit nilpotente indépendamment des équations du mouvement [4]. En outre, la symétrie BRST est complètement débarrassée des conditions de jauge en formalisme hamiltonien [5].

2.1 Invariance de jauge et contraintes

Les transformations de jauge sont des transformations canoniques dont les générateurs sont notés $G_a(q,p)$.

Dirac a montré que les états classiques permis du systèmes de jauge appartiennent à la surface des contraintes, où les générateurs G_a sont nuls [3],

$$G_a(q,p) = 0 \qquad a = 1,2,\ldots,m. \tag{1}$$

Les fonctions G_a jouent donc un rôle double: d'une part elles engendrent les transformations de jauge, d'autre part, elles limitent les états possibles du système par (1).

Si l'on part d'un point de la surface des contraintes (1) et qu'on applique une transformation de jauge, on doit rester sur (1) (la jauge n'est pas fixée et toute transformation de jauge est donc permise). Il en résulte que les fonctions G_a sont de "première classe" [3], c.-à-d.,que l'on a

$$[G_a, G_b] = C^c{}_{ab}(q,p)\, G_c \tag{2}$$

Les fonctions $C^c{}_{ab}(q,p)$ sont appelées "fonctions de structure".

Les champs de vecteurs X_a associés aux fonctions G_a,

$$X_a f = [f, G_a] \tag{3}$$

possèdent pour crochet de Lie

$$\left[X_a, X_b\right] = - C^c{}_{ab} X_c - G_c X_{C^c{}_{ab}} \qquad (4)$$

où (*)

$$X_{C^c{}_{ab}} f = \left[f, C^c{}_{ab}\right] \qquad (5)$$

Par conséquent, sur la surface des contraintes, les champs de vecteurs X_a engendrent des sous-surfaces à m dimensions, que nous appellerons orbites de jauge. La surface des contraintes est donc partitionnée en sous-variétés disjointes, une sous-variété passant par chaque point de la surface des contraintes.

Hors de la surface $G_a = 0$, par contre, les champs de vecteurs X_a n'engendrent en général pas de sous-variétés à m dimensions. Une exception notable est fournie par le cas d'une action de groupe, $C^a{}_{bc}$ = constantes ($\Rightarrow X_{C^c{}_{ab}} = 0$). On dit alors, en jargon des physiciens, que l'algèbre est "fermée". Dans le cas contraire, on dit que l'algèbre est "ouverte" ("off-shell").

(*) Pour la simplicité, nous prenons toutes les contraintes "bosoniques". Le cas général est traité en [5].

2.2 Fantômes

On élargit l'espace des phases de départ en introduisant m paires $(\eta^a, \mathcal{P}_a)$ de "fantômes", appartenant à la partie impaire d'une algèbre de Grassmann. Ces nouvelles variables possèdent les propriétés:

$$[\mathcal{P}_a, \eta^b] = - \delta_a^{\ b} \tag{6}$$

$$\varepsilon(\eta^a) = \varepsilon(\mathcal{P}_a) = 1 \tag{7}$$

$$gh(\eta^a) = - gh(\mathcal{P}_a) = 1 \tag{8}$$

En (6), $[\ ,\ ]$ est le crochet de Poisson gradué. $\varepsilon(\eta^a)$ est la parité grassmanienne de η^a, qui est telle que

$$\begin{aligned} \eta^a \eta^b &= (-)^{\varepsilon(\eta^a)\,\varepsilon(\eta^b)}\, \eta^b \eta^a \\ &= - \eta^b \eta^a \end{aligned} \tag{9}$$

Le symbole gh(F) denote le "nombre de fantômes" de F et satisfait à

$$gh(FG) = ghF + ghG \tag{10}$$

2.3 Existence de la symétrie BRST

Dans l'espace des phases étendu, l'invariance de jauge est décrite de la manière suivante:

Théorème: à tout système de première classe, on peut associer un générateur impair "BRST", noté Ω et possédant les propriétés suivantes:

$$\text{(i)} \quad gh\,\Omega = 1 \quad , \quad \varepsilon(\Omega) = 1 \tag{11}$$

$$\text{(ii)} \quad \Omega = G_a\,\eta^a + \text{termes contenant au moins un moment } \mathcal{P}_a \tag{12}$$

$$\text{(iii)} \quad [\Omega\,,\,\Omega] = 0 \quad (\text{"nilpotence"}) \tag{13}$$

$$\text{(iv)} \quad \Omega = \Omega^* \tag{14}$$

La construction de Ω a été donnée pour la première fois en [6]. La démonstration explicite du théorème peut se trouver dans la référence [5], à laquelle nous renvoyons pour tous les détails.

Au premier ordre en les fantômes, la fonction Ω engendre d'après (12) une transformation de jauge dans laquelle les "paramètres infinitésimaux" ε^a sont remplacés par les fantômes η^a. C'est pour cette raison qu'on appelle cette transformation la "transformation BRST".

Les caractéristiques importantes de Ω sont: (a) la nilpotence (13), qui est vérifiée identiquement, c.-à-d.

partout dans l'espace des phases; et (b) l'indépendance de Ω des conditions de jauge.

Enfin, on notera que dans le cas d'un groupe de jauge, Ω se réduit à

$$\Omega = G_a \eta^a - \frac{1}{2} \eta^b \eta^c C^a{}_{cb} \mathcal{P}_a$$

et la transformation BRST est donnée par l'expression connue

$$\begin{aligned} \delta q^i &= [q^i, G_a] \eta^a \\ \delta p_i &= [p_i, G_a] \eta^a \\ \delta \eta^a &= \frac{1}{2} C^a{}_{bc} \eta^c \eta^b \end{aligned}$$

Mais dans le cas général d'une algèbre ouverte, des termes d'ordre supérieur en les moments conjugués $\mathcal{P}_a$ sont nécessaires pour assurer la nilpotence de la transformation BRST.

2.4 Unicité de la symétrie BRST

Théorème: deux générateurs Ω et Ω' associés à la même surface de première classe sont reliés par une transformation canonique dans l'espace des phases étendus.

En ce sens, la symétrie BRST associée à un système de jauge est unique.

Démonstration: voir [5, 7].

3. Cohomologie BRST en mécanique classique

3.1 Définitions

La propriété de nilpotence implique, en vertu de l'identité de Jacobi pour les crochets de Poisson gradués, que

$$\left[\left[A, \Omega\right], \Omega\right] = 0 \tag{15}$$

pour toute fonction de l'espace des phases étendu.

On définit les fonctions "BRST-fermées" comme étant les fonctions invariantes sous la symétrie BRST,

$$\left[A, \Omega\right] = 0 \qquad (\Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{Ker}\,\Omega). \tag{16}$$

Les fonctions BRST exactes sont les fonctions données par

$$B = \left[K, \Omega\right] \qquad (\Leftrightarrow \quad B \in \mathrm{Im}\,\Omega). \tag{17}$$

D'après (15), Im Ω est inclus dans Ker Ω, et on peut définir les classes de cohomologie des fonctions BRST-fermées modulo les fonctions BRST-exactes. Comme gh Ω = 1, on peut en fait considérer les classes de cohomologie à nombre de fantômes p fixé,ce qui conduit à

$$\left(\frac{\mathrm{Ker}\,\Omega}{\mathrm{Im}\,\Omega}\right)^{p}_{\text{classique}} \tag{18}$$

3.2 Interprétation géométrique de la cohomologie BRST classique

Théorème:

$$\left(\frac{\mathrm{Ker}\,\Omega}{\mathrm{Im}\,\Omega}\right)^p_{\text{classique}} = \begin{cases} 0 & p < 0 \\ \left(\frac{\mathrm{Ker}\ d}{\mathrm{Im}\ d}\right)^p & p \geqslant 0 \end{cases} \tag{19}$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure le long des orbites de jauge (sur la surface des contraintes). L'opérateur d mesure uniquement les variations des p-formes le long des orbites de jauge, et pas dans les directions transverses [5,7].

Pour la démonstration du théorème, nous renvoyons à la référence [7]. Notons simplement que pour p = 0, l'ensemble Ker d - et donc aussi $(\mathrm{Ker}\,\Omega/\mathrm{Im}\,\Omega)^0$ - est simplement donné par les fonctions invariantes de jauge. D'autre part, l'équivalence exprimée par le théorème repose sur l'identification des fantômes η^a avec les 1-formes duales ω^a des vecteurs X_a tangents aux orbites.

4. Mécanique quantique

L'utilisation des méthodes BRST s'est avérée particulièrement fructueuse en mécanique quantique, surtout en théorie des cordes.

Nous mentionnons les références suivantes

Théorie générale [8, 5, 9]

Formalisme BRST et théorie des cordes [10, 11, 12, 13, 14, 15] et références citées

Références

[1] C. Becchi, A. Rouet et R. Stora, Phys. Lett. 52B (1974) 344; Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127; Ann. Phys. (N.Y.) 98 (1976) 287.

[2] I.V. Tyutin, "Gauge invariance in field theory and in statistical mechanics", Lebedev preprint FIAN n° 39 (1975), non publié.

[3] P.A.M. Dirac, "Lectures in quantum mechanics", Yeshiva University, Academic Press (New York 1964)

[4] I.V. Tyutin et Sh. M. Schwartsman, Phys. Lett 169B (1986) 225

[5] M. Henneaux, Phys. Reports 126 (1985) 1

[6] I. A. Batalin et G.A. Vilkovisky, Phys. Lett. 69B (1977) 309; E.S. Fradkin et T.E. Fradkina, Phys. Lett. 72B (1978) 343

[7] M. Henneaux et C. Teitelboim, "BRST cohomology in classical mechanics", Santiago preprint (1987)

[8] T. Kugo et I. Ojima, Suppl. Progr. Theor. Phys. n° 66 (1979) 1

[9] M. Henneaux, dans "Proceedings of the Meeting on Quantum Mechanics of Fundamental Systems", Centro de Estudios Cientificos de Santiago (décembre 1985),

Plenum Press (à paraître)

[10] M. Kato et K. Ogawa, Nucl. Phys. B212 (1983) 443

[11] E. Witten, Nucl. Phys. B268 (1986) 253

[12] I.B. Frenkel, H. Garland et G.J. Zuckerman, Yale preprint (1986)

[13] M.D. Freeman et D.I. Olive, Phys. Lett. B 175 (1986) 151

[14] M. Henneaux, Phys. Lett. B177 (1986) 35, B183 (1987) 59

[15] M. Spiegelglass, Nucl. Phys. B283 (1987) 205