MICHEL DUBOIS-VIOLETTE

Structure algébrique des anomalies et cohomologies de B.R.S.

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1986, tome 36
« Conférences de : C. Bardos, L. Baulieu, H.J. Borchers, M. Dubois-Violette, P. Pansu et R. Stora », , exp. nº 5, p. 63-80

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1986__36__63_0>

STRUCTURE ALGEBRIQUE DES ANOMALIES ET COHOMOLOGIES DE B.R.S.

Michel DUBOIS-VIOLETTE

L.P.T.H.E. - Orsay *

Après une brève discussion sur l'origine du problème des anomalies en théorie de jauge basée sur les références [1] , [2] , [3] , [4] ainsi que sur des exposés de R. Stora, on décrit les résultats obtenus en collaboration avec M. Talon et C.M. Viallet concernant la détermination des termes anomaux en théorie de jauge [5] ; on trouvera aussi des résumés de certaines parties de ces résultats dans les références [6] , [7] , [8] et une description de la situation dans des cas particuliers intéressants pour la physique et illustrant bien les mécanismes dans [9] .

---

* Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies,
L.A. 063, Université Paris Sud, Bâtiment 211
91405 ORSAY (France).

1. INTRODUCTION

1.1 L'action quantique.

Soit M l'espace-temps de dimension n. Une théorie classique locale du champ $\psi(x)$ correspond à la donnée d'une action locale $\Gamma^{(0)}(\psi)$; $\Gamma^{(0)}(\psi)$ est une fonctionnelle de ψ qui est locale, autrement dit, $\Gamma^{(0)}(\psi) = \int_M L^{(0)}(\psi)$ où le lagrangien $L^{(0)}(\psi)$ est une n-forme sur M dont la valeur en $x \in M$ ne dépend que des valeurs en x de ψ et d'un nombre fini de ses dérivées partielles.

Une théorie quantique "correspondant" à une théorie classique du type précédent est également décrite par une fonctionnelle $\Gamma(\psi)$ du champ classique ψ appelée action quantique. L'action quantique est la fonctionnelle génératrice des parties une-particule-irréductibles des "fonctions de Green". La théorie des perturbations permet de construire $\Gamma(\psi)$ à partir de $\Gamma^{(0)}(\psi)$ comme série formelle en $\hbar$ $\Gamma(\psi) = \sum_{k\geq 0} (\hbar)^k \Gamma^{(k)}(\psi)$. $\Gamma(\psi)$ n'est définie qu'à une renormalisation finie près ; dans une telle renormalisation finie, la fonctionnelle $\Gamma(\psi)$ qui n'est pas locale est modifiée par l'addition d'un terme local[1]. C'est bien naturel, on ne peut pas distinguer les lagrangiens $L^{(0)}(\psi)$ et $L(\psi) = \sum_{k\geq 0} (\hbar)^k L^{(k)}(\psi)$ en "$\hbar = 0$" ! Il y a, bien entendu, des tas de subtilités liées à l'invariance de Poincaré, au spectre de l'énergie, à la renormalisabilité et au comptage de puissance mais il n'est pas question ici de rentrer dans les détails.

1.2 Invariance de jauge de première espèce.

Avec les notations précédentes, supposons que le champ ψ prenne ses valeurs dans l'espace d'une représentation linéaire de dimension finie π d'un groupe de Lie compact. On fait agir G à droite sur ψ, via $\psi \to \psi^g$ avec $\psi^g(x) = \pi(g^{-1})\,\psi(x)$ pour $g \in G$, de manière à avoir une action à gauche sur les fonctionnelles de ψ. On en déduit, par dérivation à l'origine de G, une représentation linéaire W de l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G)$ de G dans l'espace des fonctionnelles de ψ.

L'invariance de la théorie classique se traduit alors par $W(\xi)\Gamma^{(0)}(\psi) = 0$, $\forall \xi \in \mathrm{Lie}(G)$; dans ce cas, une question naturelle qui se pose pour la théorie quantique est la suivante : Peut-on construire une théorie quantique invariante correspondante ? En d'autres termes, est-il possible de construire $\Gamma(\psi)$ de manière à avoir $W(\xi)\,\Gamma(\psi) = 0$, $\forall \xi \in \mathrm{Lie}(G)$?

---

1. En toute rigueur, cet énoncé est faux puisque l'addition d'un terme local d'ordre $k \geq 1$ en $\hbar$ modifie de manière non locale les termes d'ordres strictement supérieurs à k de l'action, mais, pour les termes anomaux, tout se passe comme si l'énoncé était vrai.

La réponse est oui, au moins en théorie des perturbations ; en appliquant les règles usuelles, on peut construire $\Gamma(\psi) = \sum (\hbar)^k \Gamma^{(k)}(\psi)$ de manière à avoir $W(\xi)\Gamma^{(k)}(\psi) = 0$, $\forall \xi \in \mathrm{Lie}(G)$ et $k \in \mathbb{N}$.

1.3 Invariance de jauge de seconde espèce.

Toujours avec les mêmes notations, soit $\underline{G}$ le groupe des fonctions différentiables sur M à valeurs dans G ; l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\underline{G})$ de $\underline{G}$ s'identifie naturellement avec l'algèbre de Lie des fonctions différentiables sur M à valeurs dans $\mathrm{Lie}(G)$. On peut étendre l'action à droite de G sur ψ en une action à droite de $\underline{G}$ sur ψ en posant, pour $\underline{g} \in \underline{G}$, $\psi^{\underline{g}}(x) = \psi^{\underline{g}(x)}(x)$. On déduit une représentation linéaire $\underline{W}$ de $\mathrm{Lie}(\underline{G})$ dans les fonctionnelles de ψ qui prolonge W. Soit $a(x)$ un champ sur M qui est une 1-forme différentielle à valeurs dans $\mathrm{Lie}(G)$ se transformant, sous l'action de $\underline{g} \in \underline{G}$ de la manière suivante :

$$a(x) \mapsto a^{\underline{g}}(x) = \underline{g}(x)^{-1} a(x) \underline{g}(x) + \underline{g}(x)^{-1} d\underline{g}(x).$$

On a une représentation linéaire associée w de $\mathrm{Lie}(\underline{G})$ dans les fonctionnelles de ψ et de a : $w(\underline{\xi}) = \underline{W}(\underline{\xi}) + \int (\nabla_\mu \underline{\xi}(x)) \frac{\delta}{\delta a_\mu(x)}$, avec $\nabla_\mu \underline{\xi}(x) = \partial_\mu \underline{\xi}(x) + [a_\mu(x), \underline{\xi}(x)]$, ($\underline{\xi} \in \mathrm{Lie}(\underline{G})$). Etant donné une action classique pour le champ ψ, $\Gamma^{(0)}(\psi)$, invariante par G, on peut construire une fonctionnelle locale $\Gamma^{(0)}(\psi,a)$ de ψ et de a invariante par $\underline{G}$, (i.e. $w(\underline{\xi})\,\Gamma^{(0)}(\psi,a) = 0$, $\forall \underline{\xi} \in \mathrm{Lie}(\underline{G})$) en remplaçant les opérateurs de dérivées partielles ∂_μ par les dérivées covariantes ∇_μ pour a dans $\Gamma^{(0)}(\psi)$, (couplage minimal). Dans l'optique précédente, $\Gamma^{(0)}(\psi,a)$ apparaît comme action pour le champ ψ dans le champ extérieur a ; on peut, en rajoutant un terme cinétique (action de Yang-Mills) invariant par $\underline{G}$ pour a, rendre a dynamique et construire une action classique invariante par $\underline{G}$, $\Gamma^{(0)}(\psi,a)$, pour les deux champs couplés ψ et a. Dans ces conditions on peut à nouveau se demander s'il est possible de construire une théorie quantique correspondante en préservant l'invariance par $\underline{G}$. La réponse est non ; en présence de fermions chiraux on a généralement $w(\underline{\xi})\,\Gamma(\psi,a) = \Delta(a;\underline{\xi}) \neq 0$. Le terme $\Lambda(a;\underline{\xi})$ est <u>l'anomalie</u>.

1.4 Anomalies et équations de consistance.

L'anomalie $\Lambda(a;\underline{\xi})$ est linéaire en $\underline{\xi}$ et a la propriété d'être <u>locale</u> autrement dit $\Lambda(a;\underline{\xi}) = \int_M Q(a;\underline{\xi})$, où $Q(a;\underline{\xi})$ est une n-forme différentielle sur M dont la valeur $x \in M$ ne dépend que des valeurs en x de a , $\underline{\xi}$ et d'un nombre fini de leurs dérivées partielles. Nous dirons que $\Delta(a,\underline{\xi})$ est une 1-cochaine locale sur Lie($\underline{G}$) ; (c'est une 1-cochaine sur Lie($\underline{G}$) à valeurs dans les fonctionnelles de a qui est locale). Par construction, Δ vérifie les équations de consistance de Wess et Zumino [10]

$$w(\underline{\xi})\Delta(a;\underline{\zeta}) - w(\underline{\zeta})\Delta(a;\underline{\xi}) - \Delta(a;[\underline{\xi},\underline{\zeta}]) = 0 \quad , \qquad (*)$$

pour tout $\underline{\xi}$, $\underline{\zeta}$ dans Lie($\underline{G}$). Ces équations expriment le fait que Δ est un cocycle. Nous appellerons 1-cocycle local sur Lie($\underline{G}$) toute 1-cochaine locale satisfaisant les équations précédentes. Une classe particulière de 1-cocycles locaux est constituée par les 1-cobords locaux :

$$\Delta(a;\underline{\xi}) = w(\underline{\xi}) \int_V L(a) \quad , \qquad (**)$$

où L(a) est une n-forme sur M dont la valeur en $x \in M$ ne dépend que de la valeur en x de a et d'un nombre fini de ses dérivées partielles. De tels 1-cobords locaux sont considérés comme des anomalies triviales puisqu'elles peuvent être éliminées par renormalisations finies (voir 1.1). On est donc amené à s'intéresser aux solutions de (*) modulo les solutions de la forme (**), c'est à dire à la 1-cohomologie locale de Lie($\underline{G}$).

2. COHOMOLOGIE LOCALE

2.1 Rappels sur la cohomologie des algèbres de Lie. [11]

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et w une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel E . Une p-cochaine sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans (le $\mathfrak{g}$-module) E est une application p-linéaire antisymétrique de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans E ; autrement dit une p-cochaine γ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans E est un élément de $C^p(\mathfrak{g},E) = E \otimes \Lambda^p \mathfrak{g}^*$. On définit, pour $p \in \mathbb{N}$,

$\delta : C^p(\mathfrak{g},E) \to C^{p+1}(\mathfrak{g},E)$ par

$$(\delta\gamma)(\xi_0,\ldots,\xi_p) = \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k\, w(\xi_k)\, (\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_k,\ldots,\xi_p)$$
$$+ \sum_{0 \leq r < s \leq p} (-1)^{r+s}\, \gamma([\xi_r,\xi_s], \xi_0,\ldots,\hat{\xi}_r,\ldots,\hat{\xi}_s,\ldots,\xi_p) \ .$$

δ s'étend linéairement en un endomorphisme de

$C^*(\mathfrak{g},E) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{g},E)$ et l'on a $\delta^2 = 0$. La cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeur dans E est la cohomologie du complexe $(C^*(\mathfrak{g},E),\delta)$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie K , ($\mathfrak{g}$ = Lie(K)), et que w provienne d'une représentation linéaire, $\tilde{w}$, de K dans E. On peut alors identifier $(C^*(\mathfrak{g},E), \delta)$ à un sous-complexe du complexe des formes différentielles sur K à valeur dans E en procédant de la manière suivante. A $\gamma \in C^p(\mathfrak{g},E)$, on associe la p-forme différentielle sur K à valeurs dans E $\tilde{\gamma}$ dont la valeur en $g \in K$ est donnée par $\tilde{\gamma}(g) = \tilde{w}(g)\gamma(\theta_g,\ldots,\theta_g)$, où θ_g est la valeur en g de la forme de Maurer-Cartan θ sur K . On vérifie facilement que $\gamma \to \tilde{\gamma}$ définit un isomorphisme de $C^*(\mathfrak{g},E)$ sur l'espace des <u>formes différentielles homogènes sur</u> K <u>à valeurs dans</u> E , (i.e. les formes ω telles que $L_g\omega = \tilde{w}(g)\omega$) , et que δ correspond à la différentielle extérieure sur K dans cet isomorphisme.

<u>2.2 Cohomologie locale de Lie($\underline{G}$)</u>

Reprenons les hypothèses et notations du paragraphe 1 et soit $\mathfrak{A}$ l'espace des 1-formes différentielles sur M à valeurs dans Lie(G). $\mathfrak{A}$ est l'espace des champs a introduits dans 1.3 ; muni de l'action de $\underline{G}$ $a \to a^{\underline{g}}$ défini dans 1.3 , $\mathfrak{A}$ est un $\underline{G}$-espace à droite. On a donc de manière naturelle une représentation linéaire de $\underline{G}$ dans l'espace $P(\mathfrak{A})$ des fonctionnelles en a ; (on ne considérera que les fonctionnelles polynomiales). w est l'action infinitésimale de Lie($\underline{G}$) correspondante.

Appliquons les définitions du début de 2.1 au cas où $\mathfrak{g}$ = Lie($\underline{G}$) , (i.e. $K = \underline{G}$), et où $E = P(\mathfrak{A})$ muni de la représentation w . On a le complexe $C^*(\text{Lie}(\underline{G}),P(\mathfrak{A}))$ des cochaines sur Lie($\underline{G}$) à valeurs dans $P(\mathfrak{A})$. Nous dirons qu'une p-cochaine $\gamma \in C^p(\text{Lie}(\underline{G}),P(\mathfrak{A}))$ est <u>locale</u> si on a $\gamma(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_p) = \int_M Q(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_p)$ où $Q(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_p)$ est une n-forme différentielle sur M dont la valeur en $x \in M$ ne dépend que des valeurs en x de a , des $\underline{\xi}_i$ et d'un nombre fini de leurs dérivés partielles. Le sous-espace $C^*_{loc}(\text{Lie}(\underline{G}))$ de $C^*(\text{Lie}(\underline{G}),P(\mathfrak{A}))$ constitué par les cochaines locales est stable par δ , c'est donc un complexe dont la cohomologie sera appelée <u>cohomologie locale de</u> Lie($\underline{G}$) , (on a évidemment les notions de cocycles locaux et de cobords locaux).

Il résulte de 1.4 que l'anomalie Δ est un 1-cocycle local qui peut être éliminé (par renormalisation finie) si et seulement si c'est un 1-cobord local. L'objet important est donc l'élément de cohomologie locale correspondant. Le calcul de l'anomalie dans un modèle déterminé est assez laborieux, c'est pourquoi il est intéressant de calculer directement la 1-cohomologie locale (i.e. "toutes les anomalies possibles"). [2]

En remplaçant l'espace-temps par une surface à temps constant, on sait que

---

2. Il est bon cependant de noter que, par construction, l'anomalie est un 1-cobord non-local : $\Delta = \delta(\Gamma)$.

la 2-cohomologie locale décrit les termes de Schwinger anomaux possibles (modulo les termes triviaux) [12]. On est donc amené à étudier la cohomologie locale pour différents degrés et différentes dimensions.

2.3 Cohomologie locale et δ-cohomologie modulo d .

Soit γ une p-cochaine locale ; on a $\gamma(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_p) = \int_M Q(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_p)$. γ est un cocycle local si et seulement si $\delta Q + dQ' = 0$, c'est un cobord local si et seulement si $Q = \delta L + dL'$ où $Q'(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_{p+1})$, $L(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_{p-1})$ et $L'(a;\underline{\xi}_1,\ldots,\underline{\xi}_p)$ sont des formes différentielles sur M de degrés appropriés, dépendant multilinéairement des $\underline{\xi}_i \in \mathrm{Lie}(\underline{G})$, dont les valeurs en $x \in M$ ne dépendent que des valeurs en x de a , des $\underline{\xi}_i$ et de leurs dérivées partielles.[3] Il est clair que les formes du type précédent forment une algèbre bigraduée commutative, $\mathfrak{B}$, pour le bidegré = (degré de forme sur M , degré en $\underline{\xi}$) et le produit extérieur sur l'espace tangent en M combiné à celui sur Lie($\underline{G}$). Cette algèbre est un bicomplexe pour la différentielle extérieure d sur M et δ , i.e. on a : $d^2 = 0$, $\delta^2 = 0$ et $d\delta + \delta d = 0$. Les cohomologies locales de Lie($\underline{G}$) pour les différentes dimensions qui nous intéressent correspondent (par intégration sur les cycles appropriés de M) à la δ-cohomologie modulo d de cette algèbre, c'est à dire la cohomologie du complexe $\mathfrak{B}\ /\ d\mathfrak{B}$ pour l'opérateur δ (qui passe au quotient en vertu de $d\delta + \delta d = 0$).

2.4 L'algèbre réduite $\mathfrak{B}$(M,Lie(G)).

Soit E_α une base de Lie(G) ; on a $a(x) = \sum_\alpha E_\alpha a^\alpha(x)$ et $\xi(x) = \sum_\alpha E_\alpha \xi^\alpha(x)$ pour $\underline{\xi} \in \mathrm{Lie}(G)$. Pour tout α , $A^\alpha : a \mapsto a^\alpha$ et $\chi^\alpha : \underline{\xi} \mapsto \xi^\alpha$ sont des éléments homogènes de $\mathfrak{B}$ de bidegrés (1,0) et (0,1) respectivement. Nous désignerons par $\mathfrak{B}$(M,Lie(G)) la sous-algèbre de $\mathfrak{B}$ engendrée par les A^α , les χ^α et leurs d et δ différentielles ; c'est la plus petite sous-algèbre différentielle bigraduée de $\mathfrak{B}$ contenant les A^α et les χ^α . On remarquera que $\mathfrak{B}$(M,Lie(G)) ne dépend que de Lie(G) et non de G , de sorte que $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{g})$ est bien définie pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ quelconque. En utilisant l'isomorphisme $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ décrit dans 2.1 on peut, pour chaque $a \in \mathfrak{A}$, identifier les éléments de $\mathfrak{B}$(M,Lie(G)), (ou plutôt leurs évaluations en $a \in \mathfrak{A}$),[4] à des formes différentielles sur l'espace produit M x $\underline{G}$; dans cette identification le produit de $\mathfrak{B}$(M,Lie(G)) correspond au produit extérieur, d correspond à la différentielle extérieure partielle le long de M , δ correspond à la différentielle extérieure le long de $\underline{G}$ et χ correspond à la forme

---

3. Le fait que Q' et L' puissent être choisis de cette forme résulte de la trivialité de la d-cohomologie sur les opérateurs différentiels [20] , (voir la discussion de [21]).

4. Insistons sur le fait que les éléments de $\mathfrak{B}$(M,Lie(G)) sont des fonctionnelles de a , i.e. des fonctions sur $\mathfrak{A}$.

de Maurer-Cartan du groupe de jauge $\underline{G}$. Cette identification qui est systématiquement faite dans les références [3] et [4] est très commode pour les calculs de l'action de d et δ ; par exemple, $\delta\chi = -1/2[\chi,\chi]$ est l'équation de Maurer-Cartan et les identités $d^2 = 0$, $\delta^2 = 0$ et $d\delta + \delta d = 0$ proviennent du fait que $d + \delta$ correspond à la différentielle extérieure sur $M \times \underline{G}$, (la bigraduation correspondant à la structure d'espace produit).

En pratique, on observe que les anomalies connues et, plus généralement les termes dérivés du théorème de l'index, sont des expressions intégrées de $\mathcal{B}(M,\mathrm{Lie}(G))$; c'est pourquoi nous allons nous restreindre au calcul de la δ-cohomologie modulo d de $\mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$ par la suite bien que, en principe, des expressions contenant des dérivées arbitraires de A et de χ pourraient intervenir.

3. ALGEBRES DE B.R.S.

3.1 La notion d'algèbre de B.R.S.

Les opérateurs d et δ sont des anti-dérivations homogènes de $\mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$ de bidegrés respectifs $(1,0)$ et $(0,1)$. Pour décrire leur action sur les A^α et χ^α , il est commode d'introduire les éléments $A = E_\alpha \otimes A^\alpha$ et $\chi = E_\alpha \otimes \chi^\alpha$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$, (E_α est une base de $\mathfrak{g}$). On a les opérateurs linéaires d et δ sur $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$ en posant $d(X \otimes P) = X \otimes dP$ et $\delta(X \otimes P) = X \otimes \delta P$ pour $X \in \mathfrak{g}$ et $P \in \mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$, et on définit, de manière usuelle, un crochet $[.,.]$ bilinéaire sur $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$ à partir de celui de $\mathfrak{g}$ en posant $[X \otimes P, Y \otimes Q] = [X,Y] \otimes P.Q$ pour $X,Y \in \mathfrak{g}$ et $P,Q \in \mathcal{B}(M,\mathfrak{g})$. Avec ces notations, on a les relations fondamentales suivantes $\delta\chi = -1/2[\chi,\chi]$ (Maurer-Cartan) et $\delta A = -d\chi - [A,\chi]$ ($= -d_A\chi$) ; on peut résumer ces relations dans la formule

$(d + \delta)(A + \chi) + 1/2[A + \chi, A + \chi] = dA + 1/2[A,A]$ ou encore, de manière équivalente, dans

$(d + \delta)(A + \chi) + 1/2[A + \chi, A + \chi] \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}(M,\mathfrak{g})^{(2,0)}$.

Plus généralement, étant donnée une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous appellerons <u>algèbre de B.R.S.</u> (Becchi, Rouet et Stora) <u>sur</u> $\mathfrak{g}$ tout couple $(\mathcal{B},\omega)$ où $\mathcal{B}$ est une algèbre différentielle bigraduée commutative, i.e. $\mathcal{B} = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} \mathcal{B}^{(r,s)}$ est munie de deux anti-dérivations homogènes d et δ de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$ satisfaisant $d^2 = \delta^2 = d\delta + \delta d = 0$, et où ω est un élément de

$\mathfrak{G} \otimes (\mathfrak{B}^{(1,0)} \oplus \mathfrak{B}^{(0,1)})$ tel que l'on ait, (en définissant comme précédemment d, δ, et $[.,.]$ sur $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{B}$), $(d+\delta)\omega + 1/2\,[\omega,\omega] \in \mathfrak{B}^{(2,0)}$.
ω sera appelé la <u>connexion algébrique de</u> $\mathfrak{B}$, $d+\delta$ est la différentielle de $\mathfrak{B}$.

Etant données deux algèbres de B.R.S. sur une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, $(\mathfrak{B},\omega)$ et $(\mathfrak{B}',\omega')$, un <u>homomorphisme d'algèbres de B.R.S. sur</u> $\mathfrak{G}$ de $(\mathfrak{B},\omega)$ dans $(\mathfrak{B}',\omega')$ sera un homomorphisme $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ d'algèbres différentielles bigraduées tel que $\bar{f}(\omega) = \omega'$ où l'application linéaire $\bar{f} : \mathfrak{G}\otimes\mathfrak{B} \to \mathfrak{G}\otimes\mathfrak{B}'$ est définie par $\bar{f}(X \otimes P) = X \otimes \bar{f}(P)$ pour $X \in \mathfrak{G}$ et $P \in \mathfrak{B}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la connexion l'algèbre de B.R.S. $(\mathfrak{B},\omega)$ sera simplement notée $\mathfrak{B}$. L'algèbre $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$ de 2.4 munie de $\omega = A + \chi$ est une algèbre de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$, (il en est de même de l'algèbre $\mathfrak{B}$ introduite dans 2.3 pour $\mathfrak{G} = \mathrm{Lie}(G)$).

On vérifie facilement que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, l'on a une catégorie B.R.S.($\mathfrak{G}$) dont les objets sont les algèbres de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$ et dont les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$; cette catégorie possède un objet initial que nous allons maintenant décrire.

<u>3.2 L'algèbre de B.R.S. universelle d'une algèbre de Lie.</u>

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et soit (E_α) une base de $\mathfrak{G}$. Considérons quatre copies $\mathfrak{G}^*_A$, $\mathfrak{G}^*_F$, $\mathfrak{G}^*_\chi$ et $\mathfrak{G}^*_\psi$ du dual $\mathfrak{G}^*$ de $\mathfrak{G}$; nous désignerons les bases duales de (E_α) correspondantes par (A^α) , (F^α) , (χ^α) et (ψ^α). Soit $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ l'algèbre graduée commutative libre engendrée par les A^α et les χ^α en degré un et par les F^α et les ψ^α en degré deux. On a

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{G}) = (\Lambda\,\mathfrak{G}^*_A) \otimes (S\,\mathfrak{G}^*_F) \otimes (\Lambda\,\mathfrak{G}^*_\chi) \otimes (S\,\mathfrak{G}^*_\psi)$$

où $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$ désigne l'algèbre extérieure sur $\mathfrak{G}^*$ munie de sa graduation usuelle et $S\,\mathfrak{G}^*$ désigne l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{G}^*$, (i.e. les polynômes sur $\mathfrak{G}$), <u>graduée en degrés pairs</u> en donnant le degré $2n$ aux éléments de $S^n\mathfrak{G}^*$ et où $\otimes$ désigne le produit tensoriel "tordu" des algèbres graduées. Introduisons les éléments $A = E_\alpha \otimes A^\alpha$, $F = E_\alpha \otimes F^\alpha$, $\chi = E_\alpha \otimes \chi^\alpha$ et $\psi = E_\alpha \otimes \psi^\alpha$ de $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ et posons $dA = F - 1/2[A,A]$, $dF = [F,A]$, $d\chi = \psi$, $d\psi = 0$ et $\delta A = -\psi - [A,\chi]$, $\delta F = [F,\chi]$, $\delta\chi = -1/2\,[\chi,\chi]$, $\delta\psi = [\psi,\chi]$ où $[.,.]$ est le crochet naturel de $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$.
Définissons alors $dA^\alpha,\dots,\delta\psi^\alpha$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ par $dA = E_\alpha \otimes dA^\alpha,\dots,\delta\psi = E_\alpha \otimes \delta\psi^\alpha$; d et δ ainsi définis sur les générateurs de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ s'étendent uniquement en deux anti-dérivations notées d et δ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$.
d et δ sont homogènes de degré un et vérifient $d^2 = \delta^2 = d\delta + \delta d = 0$.

Introduisons un bidegré sous-jacent à la graduation de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ en donnant à A le bidegré (1,0) , à F le bidegré (2,0), à χ le bidegré (0,1) et à ψ le bidegré (1,1). Munie de ce bidegré et des différentielles d et δ , $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ est une algèbre différentielle bigraduée et, munie de la connexion $A + \chi$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ est une algèbre de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$ que nous appellerons <u>algèbre de B.R.S. universelle de</u> $\mathfrak{G}$. L'origine de cette terminologie est que $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ est caractérisée (à un isomorphisme d'algèbre de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$ près) par la propriété universelle suivante : <u>Pour toute algèbre de B.R.S. sur</u> $\mathfrak{G}$,$\mathfrak{B}$, <u>il existe un unique homomorphisme</u> $f_{\mathfrak{B}}$ <u>d'algèbres de B.R.S. sur</u> $\mathfrak{G}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ <u>dans</u> $\mathfrak{B}$, (i.e. $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ est un objet initial de B.R.S.($\mathfrak{G}$)). Cette propriété découle immédiatement des propriétés universelles des algèbres extérieures, des algèbres symétriques et du produit tensoriel. $f_{\mathfrak{B}}$ sera appelé <u>homomorphisme canonique de</u> $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ <u>dans</u> $\mathfrak{B}$. Dans le cas où $\mathfrak{B}$ est l'algèbre de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$ définie précédemment, on a le résultat fondamental suivant, [5], : <u>L'homomorphisme canonique de</u> $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ <u>dans</u> $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$ <u>est surjectif et induit un isomorphisme de l'espace vectoriel</u> $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})^{(r,s)}$ <u>sur l'espace vectoriel</u> $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})^{(r,s)}$ <u>pour tout bidegré</u> (r,s) <u>tel que</u> $r \leq \dim(M)$. Si $\mathfrak{B}$ est une algèbre de B.R.S. sur $\mathfrak{G}$, les cohomologies de d et de δ (d-cohomologie et δ-cohomologie) sont des algèbres bigraduées (puisque d et δ sont homogènes pour le bidegré), la cohomologie de $d+\delta$ est simplement une algèbre graduée (car $d+\delta$ est homogène pour le degré total et non pour le bidegré) et la δ-cohomologie modulo d est un espace bigradué. Le résultat précédent montre que l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ dans (sur) $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$ induit des isomorphismes pour les δ-cohomologies et pour les δ-cohomologies modulo d en bidegrés (r,s) tels que $r \leq \dim(M)$[5]; on peut donc se contenter de calculer la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ pour avoir les termes anomaux provenant d'intégrations d'éléments de $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$), (i.e. la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$).

<u>3.3 La d-cohomologie, la (d+δ)-cohomologie et la δ-cohomologie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$.</u>

Pour calculer la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$), nous aurons besoin de connaître les cohomologies de d de $d+\delta$ et de δ . Nous allons maintenant décrire ces cohomologies et en tirer quelques conséquences.

On notera H(d), H(d+δ) et H(δ) la d-cohomologie, la (d+δ)-cohomologie et la δ-cohomologie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$. Il est clair que les A^α, dA^α, χ^α , $d\chi^\alpha$ constituent un système libre de générateurs de $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$; autrement dit $(\mathfrak{A}(\mathfrak{G}),d)$ est l'algèbre différentielle contractile [13] engendrée par les

---

5. On a évidemment $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})^{(r,s)} = \{0\}$ pour $r>\dim(M)$ ce qui implique que la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{B}(M,\mathfrak{G})$ s'annulent en bidegrés (r,s) avec $r>\dim(M)$.

A^α, χ^α en degré un et les $dA^\alpha, d\chi^\alpha$ en degré deux. Il en résulte que la d-cohomologie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ est triviale, i.e. que l'on a $H(d) = H^{0,0}(d) = \mathbb{R}$. De même, le fait que les A^α, χ^α, $(d+\delta)A^\alpha$, $(d+\delta)\chi^\alpha$ constituent un système libre de générateurs de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ implique que la $(d+\delta)$-cohomologie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ est triviale, (i.e. $H(d+\delta) = H^0(d+\delta) = \mathbb{R}$). Un autre système libre de générateurs homogènes de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ est constitué par les $A^\alpha, \delta A^\alpha, \chi^\alpha, F^\alpha$. Il en résulte que $(\mathfrak{A}(\mathfrak{g}),\delta)$ est le produit tensoriel de l'algèbre différentielle (pour δ) contractile engendrée par les $A^\alpha, \delta A^\alpha$ et de l'algèbre différentielle (pour δ) engendrée par les χ^α, F^α ; cette dernière algèbre différentielle est manifestement minimale [13]. La δ-cohomologie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ se réduit donc à celle de la sous algèbre $\Lambda\, \mathfrak{g}^*_\chi \otimes S\, \mathfrak{g}^*_F$ engendrée par les χ^α, F^α ; $\Lambda\, \mathfrak{g}^*_\chi \otimes S\, \mathfrak{g}^*_F \cong \Lambda\, \mathfrak{g}^* \otimes S\, \mathfrak{g}^*$ peut s'identifier à l'espace $C^*(\mathfrak{g}, S\,\mathfrak{g}^*)$ des cochaines sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le $\mathfrak{g}$-module $S\,\mathfrak{g}^*$ des polynômes sur $\mathfrak{g}$ (pour l'action induite par l'action coadjointe), et il est facile de vérifier que, avec cette identification, δ coincide avec la différentielle usuelle du complexe $C^*(\mathfrak{g}, S\,\mathfrak{g}^*)$. On a donc $H(\delta) = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} H^{2r,s}(\delta)$ avec $H^{2r,s}(\delta) = H^s(\mathfrak{g}, S^r\,\mathfrak{g}^*)$.

Par la suite, nous désignerons la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ par $H(\delta,\mathrm{mod}(d)) = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} H^{r,s}(\delta,\mathrm{mod}(d))$.

Soit $Q^{r,s}$ un δ-cocycle modulo d de bidegré (r,s) de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$; on a $\delta Q^{r,s} + dQ^{r-1,s+1} = 0$ pour un élément (non unique) $Q^{r-1,s+1}$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ de bidegré $(r-1,s+1)$. En appliquant δ à $\delta Q^{r,s} + dQ^{r-1,s+1} = 0$, on obtient $\delta dQ^{r-1,s+1} = d(-\delta Q^{r-1,s+1}) = 0$; la trivialité de $H(d)$ implique qu'il existe $Q^{r-2,s+2}$ tel que $\delta Q^{r-1,s+1} + dQ^{r-2,s+2} = 0$ autrement dit que $Q^{r-1,s+1}$ est aussi un δ-cocycle modulo d. Si $Q^{r,s}$ est un δ-cobord modulo d, on a $Q^{r,s} = \delta L^{r,s-1} + dL^{r-1,s}$, d'où l'on tire
$\delta dL^{r-1,s} + dQ^{r-1,s+1} = d(Q^{r-1,s+1} - \delta L^{r-1,s}) = 0$; à nouveau, la trivialité de $H(d)$ implique que l'on a $Q^{r-1,s+1} = \delta L^{r-1,s} + dL^{r-2,s+1}$, autrement dit que $Q^{r-1,s+1}$ est aussi un δ-cobord modulo d. Il en résulte que pour tout δ-cocycle modulo d, $Q^{r,s}$, la classe de $Q^{r-1,s+1}$ dans $H^{r-1,s+1}(\delta,\mathrm{mod}(d))$ est bien définie et ne dépend que de la classe de $Q^{r,s}$ dans $H^{r,s}(\delta,\mathrm{mod}(d))$. On a donc ainsi une application linéaire $\partial : H^{r,s}(\delta,\mathrm{mod}(d)) \to H^{r-1,s+1}(\delta,\mathrm{mod}(d))$.

Soit P un polynôme invariant de degré $r+1$ sur $\mathfrak{g}$, alors, avec des notations évidentes $P(F)$ est un élément de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ de bidegré $(2r+2,0)$.

On a $dP(F) = 0$ et $\delta P(F) = 0$ et par conséquent $(d+\delta)P(F) = 0$. La trivialité de $H(d+\delta)$ entraîne que $P(F) = (d+\delta)Q$ où $Q = \sum_{s=0}^{2r+1} Q^{2r+1-s,s}$ est déterminé à $(d+\delta)L$ près, $(L = \sum_{s=0}^{2r} L^{2r-s,s})$, i.e. les $Q^{2r+1-s,s}$ sont déterminés à des δ-cobords modulo d près. En développant en bidegrés l'égalité $P(F) = (d+\delta)Q$, on obtient, $P(F) = dQ^{2r+1,0}$, $\delta Q^{2r+1-s,s} + dQ^{2r-s,s+1} = 0$ pour $0 \leqq s \leqq 2r$ et $\delta Q^{0,2r+1} = 0$. Les $Q^{2r+1-s,s}$ sont donc des δ-cocycles modulo d qui sont déterminés à des δ-cobords modulo d près ; leurs classes $[Q^{2r+1-s,s}]$ dans $H^{2r+1-s,s}(\delta,\mathrm{mod}(d))$ sont donc bien définies et, par construction, on a $\partial [Q^{2r+1-s,s}] = [Q^{2r,s+1}]$. $P \mapsto [Q^{2r+1-s,s}]$ est une application linéaire $j^{r,s}$ de l'espace $\mathfrak{I}^{r+1}_S(\mathfrak{g})$ des polynômes invariants homogènes de degré $r+1$ sur $\mathfrak{g}$ dans $H^{2r+1-s,s}(\delta,\mathrm{mod}(d))$ et on a $j^{r,s+1} = \partial \cdot j^{r,s}$.

Remarquons que $j^{r,1}$ est une manière classique [1], [2], [3], [4] de construire des anomalies en dimension paire $n = 2r$ à partir des invariants ; montrons que c'est générique si on travaille avec $\mathfrak{B}(M,\mathrm{Lie}(G))$. Plus généralement, nous allons montrer que $j^{r,1}$ est une bijection. Soit c un élément de $H^{2r,1}(\delta,\mathrm{mod}(d))$ et soit $Q^{2r,1}$ un δ-cocycle modulo d de classe c , $([Q^{2r,1}] = c)$, alors on a $\delta Q^{2r,1} + dQ^{2r-1,2} = 0$ pour un certain $Q^{2r-1,2}$; en appliquant d à l'égalité précédente, on obtient $d\delta Q^{2r,1} = \delta(-dQ^{2r,1}) = 0$. $-dQ^{2r,1}$ est donc un δ-cocycle de bidegré $(2r+1,1)$ et on sait que $H^{2r+1,s}(\delta) = 0$; on a donc $\delta Q^{2r+1,0} + dQ^{2r,1}$ pour un $Q^{2r+1,0}$ qui est unique pour $Q^{2r,1}$ donné car $H^{2r+1,0}(\delta) = 0 = Z^{2r+1,0}(\delta)$. $Q^{2r+1,0}$ est donc unique à $dL^{2r,0}$ près pour $c = [Q^{2r,1}]$ donné donc $dQ^{2r+1,0}$ est unique en fonction de c . Il est clair que l'on a $\delta(dQ^{2r+1,0}) = (d+\delta)(dQ^{2r+1,0}) = 0$, ce qui implique $dQ^{2r+1,0} = P(F)$ pour un $P \in \mathfrak{I}^r_S(\mathfrak{g})$ unique et on a par construction $j^{r,1}(P) = c$. On a donc montré que toutes les anomalies chirales en dimension $n = 2r$ qui sont des éléments de $\mathfrak{B}(M,\mathrm{Lie}(G))$ intégrés sur M proviennent de polynômes invariants sur $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. La démonstration précédente montre que $j^{r,0}$ est aussi un isomorphisme. Nous allons maintenant aller un peu plus loin et calculer tous les $H^{r,s}(\delta,\mathrm{mod}(d))$.

4. CALCUL DES TERMES ANOMAUX.

4.1 Le couple exact reliant la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ à la cohomologie de $\mathfrak{g}$.

Un δ-cocycle est a fortiori un δ-cocycle modulo d ; cette inclusion induit en cohomologie des homomorphismes $i : H^{r,s}(\delta) \to H^{r,s}(\delta,\mathrm{mod}(d))$. Soit

$c \in H^{r,s}(\delta, \mathrm{mod}(d))$ tel que $\partial c = 0$; si $Q^{r,s}$ est un δ-cocycle modulo d de classe c , on a $\delta Q^{r,s} + dQ^{r-1,s+1} = 0$
avec $Q^{r-1,s+1} = dL^{r-2,s+1} + \delta L^{r-1,s}$ puisque la classe de $Q^{r-1,s+1}$ est $\partial c = 0$.
on a donc $\delta(Q^{r,s} - dL^{r-1,s}) = 0$ ce qui est équivalent à dire que c est dans l'image de i . Il est d'autre part évident que $\partial \cdot i$ est nul. Autrement dit, la suite $H^{r,s}(\delta) \xrightarrow{i} H^{r,s}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \xrightarrow{\partial} H^{r-1,s+1}(\delta, \mathrm{mod}(d))$ est exacte.

Si $Q^{r-1,s+1}$ est un δ-cocycle modulo d alors $dQ^{r-1,s+1}$ est évidemment un δ-cocycle de bidegré $(r,s+1)$; on en déduit en cohomologie des homomorphismes $d^{\#} : H^{r-1,s+1}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \to H^{r,s+1}(\delta)$. Soit $c \in H^{r-1,s+1}(\delta, \mathrm{mod}(d))$ tel que $d^{\#}c = 0$; si $Q^{r-1,s+1}$ est un δ-cocycle modulo d de classe c , on a $dQ^{r-1,s+1} + \delta Q^{r,s} = 0$ pour un certain $Q^{r,s}$ qui est un δ-cocycle modulo d . On a donc $c = \partial c'$ où c' est la classe de $Q^{r,s}$. Inversement si $c = \partial c'$ et si $Q^{r,s}$ est un δ-cocycle modulo d de classe c' alors c est la classe d'un $Q^{r-1,s+1}$ tel que $\delta Q^{r,s} + dQ^{r-1,s+1} = 0$ donc $d^{\#}c = 0$. Finalement on a la suite exacte
$H^{r,s}(\delta) \xrightarrow{i} H^{r,s}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \xrightarrow{\partial} H^{r-1,s+1}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \xrightarrow{d^{\#}} H^{r,s+1}(\delta)$; cette suite se prolonge en une longue suite exacte qu'il est facile d'obtenir aussi à partir d'une suite exacte courte de complexes [5].

On sait déjà que $H^{2r+1,s}(\delta) = 0$, on déduit donc des suites précédentes des isomorphismes $\partial : H^{2r+1,s}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \xrightarrow{\cong} H^{2r,s+1}(\delta, \mathrm{mod}(d))$; Il suffit donc de ne s'intéresser qu'aux $H^{2r,s}(\delta, \mathrm{mod}(d))$.

On a d'autre part $H^{2r,s}(\delta) = H^{s}(\mathfrak{g}, S^{r}\mathfrak{g}^{*})$ d'où les suites exactes
$H^{s}(\mathfrak{g}, S^{r}\mathfrak{g}^{*}) \xrightarrow{i} H^{2r,s}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \xrightarrow{\partial^2} H^{2r-2,s+2}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \xrightarrow{p} H^{s+1}(\mathfrak{g}, S^{r}\mathfrak{g}^{*})$
où $p = d^{\#} \cdot \partial^{-1}$. Finalement on a le triangle exact, i.e. le couple exact [14]

$$\begin{tikzcd}
H_{+}^{\mathrm{pair},*}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \arrow[rr, "\partial^2"] & & H_{+}^{\mathrm{pair},*}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \arrow[dl, "p"] \\
& H_{+}^{*}(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}^{*}) \arrow[ul, "i"] &
\end{tikzcd} \qquad (C)$$

où $H_{+}^{\mathrm{pair},*}(\delta, \mathrm{mod}(d)) = \bigoplus_{r+s \geq 1} H^{2r,s}(\delta, \mathrm{mod}(d))$ et $H_{+}^{*}(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}^{*}) = \bigoplus_{r+s \geq 1} H^{s}(\mathfrak{g}, S^{r}\mathfrak{g}^{*})$
sont considérés comme bigradués sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en étendant trivialement leur bigraduation (en (r,s)).

4.2 Principe du calcul de la δ-cohomologie modulo d .

Etant donné un couple exact d'espaces vectoriels, C , c'est à dire un triangle exact d'applications linéaires

$$\begin{array}{c} F \xrightarrow{\ b\ } F \\ {\scriptstyle i}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} \\ E \end{array} \qquad (C)$$

faisant intervenir deux espaces vectoriels E et F , on peut en construire un autre

$$\begin{array}{c} F' \xrightarrow{\ b'\ } F' \\ {\scriptstyle i'}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} \\ E' \end{array} \qquad (C')$$

appelé couple exact dérivé de C en procédant de la manière suivante. On pose $F' = b(F)$ et b' est la restriction de b à $F' = b(F)$ considérée comme application de F' dans F' . $d = p \cdot i$ est un endomorphisme de E de carré nul, $d^2 = 0$; E' est l'homologie correspondante, $E' = H(E,d)$. Par exactitude, i applique les cycles de E (pour d) dans $F' = b(F)$ et les bords de E sur $0 \in F'$; on définit i' comme étant l'application induite correspondante de E' dans F' . p applique F dans les cycles de E (exactitude) et la classe de $c(f)$ dans E' ne dépend que de $b(f) \in F'$ pour $f \in F$; p' est l'application correspondante de F' dans E' . On vérifie que le triangle d'applications linéaires i', b', p' ainsi défini est exact.

On définit alors, pour tout entier r , le couple exact $r^{\text{ème}}$ dérivé de C

$$\begin{array}{c} F_r \xrightarrow{\ b_r\ } F_r \\ {\scriptstyle i_r}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_r} \\ E_r \end{array} \qquad (C_r)$$

par récurrence en posant $C_0 = C$ et $C_{r+1} = C'_r$. En posant $d_r = p_r \cdot i_r$ on a $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$; $(E_r, d_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est la suite spectrale associée à C [14].

Puisque $\ker(b_r) = i_r(E_r)$ et $\mathrm{Im}(b_r) = F_{r+1}$, on a l'isomorphisme $F_r \cong i_r(E_r) \oplus F_{r+1}$, d'où on tire, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'isomorphisme

$$F \cong \left(\bigoplus_{r=0}^{r=k} i_r(E_r) \right) \oplus b^{k+1}(F) .$$

Dans le cas qui nous intéresse le couple exact C $(=C_0)$ est donné par $F = H_+^{\text{pair},*}(\delta, \mathrm{mod}(d))$, $E = H_+^*(\mathfrak{g}, S\,\mathfrak{g}^*)$, $b = \partial^2$ et i et p ont été définis dans 4.1 ; on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'isomorphisme

$H_{+}^{pair,*}(\delta,\mathrm{mod}(d)) \cong \left(\bigoplus_{r=0}^{r=k} i_r(E_r)\right) \oplus \partial^{2k+2}H_{+}^{pair,*}(\delta,\mathrm{mod}(d))$, mais comme tout $x_0 \in H_{+}^{pair,*}(\delta,\mathrm{mod}(d))$ est de bidegré $(2k_0, \ell_0)$ fini on a $\partial^{2k+2}x_0 = 0$ pour $k \geq k_0$, d'où l'isomorphisme $H_{+}^{pair,*}(\delta,\mathrm{mod}(d)) \cong \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} i_r(E_r)$.

Pour calculer la δ-cohomologie modulo d de $\mathcal{A}(\mathfrak{g})$, il suffit donc de déterminer les termes E_r de la suite spectrale ainsi que les noyaux des i_r et éventuellement de donner une méthode de construction de δ-cocycles modulo d correspondant aux éléments de $\bigoplus_{r\in\mathbb{N}} E_r$. Nous allons décrire la situation dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive.

4.3 Le cas des algèbres de Lie réductives.

Dans ce paragraphe $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle réductive de dimension finie c'est à dire un produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre de Lie abélienne. Rappelons que dans ce cas $H^*(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'algèbre $\mathfrak{J}_\Lambda(\mathfrak{g})$ des formes extérieures invariantes sur $\mathfrak{g}$ et que cette algèbre est engendrée librement, comme algèbre graduée commutative, par n'importe quelle base de formes homogènes invariantes primitives [15] [16] ; de plus, toute forme homogène invariante primitive est de degré impair de sorte que $\mathfrak{J}_\Lambda(\mathfrak{g})$ est l'algèbre extérieure construite sur l'espace P des formes invariantes primitives : $\mathfrak{J}_\Lambda(\mathfrak{g}) = \Lambda P$. Soit P^{2k+1} l'espace des formes invariantes primitives qui sont de degré $2k+1$; $P = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} P^{2k+1}$, et puisque $\dim(P)$ est le rang (fini) de $\mathfrak{g}$, les espaces P^{2k+1} s'annulent lorsque k est supérieur à un entier fini $r_M(\mathfrak{g})$. De même, $H^*(\mathfrak{g}, S\,\mathfrak{g}^*)$ s'identifie au produit tensoriel $\mathfrak{J}_S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{J}_\Lambda(\mathfrak{g})$ de l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$ par l'algèbre des formes extérieures invariantes sur $\mathfrak{g}$ [17] [18] . On notera d'autre part que l'application $j^{k,2k+1} : \mathfrak{J}_S^{k+1}(\mathfrak{g}) \to H^{0,2k+1}(\delta,\mathrm{mod}(d))$ définie dans 3.3 s'identifie à l'application de Cartan $\rho : \mathfrak{J}_S^{k+1}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{J}_\Lambda^{2k+1}(\mathfrak{g})$, [18] , [16] (via $H^{0,2k+1}(\delta,\mathrm{mod}(d)) = H^{0,2k+1}(\delta) = H^{2k+1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{J}_\Lambda^{2k+1}(\mathfrak{g})$) .
L'image de $\rho : \mathfrak{J}_S(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{J}_\Lambda(\mathfrak{g})$ est précisément l'espace P des formes primitives [18]. Choisissons une fois pour toutes une transgresssion τ , c'est à dire une application linéaire $\tau : P \to \mathfrak{J}_S(\mathfrak{g})$ telle que $\tau(P^{2k+1}) \subset \mathfrak{J}_S^{k+1}(\mathfrak{g})$ pour $k \in \mathbb{N}$ et que $\rho \circ \tau$ soit l'application identique de P . Il est classique [19], [16] que l'image par τ d'une base homogène de P

est un système libre de générateurs de l'algèbre commutative $\mathfrak{J}_S(\mathfrak{g})$ qui coincide par conséquent avec l'algèbre symétrique $S\tau(P) \cong SP$ construite sur P : $\mathfrak{J}_S(\mathfrak{g}) = S\tau(P)$. On a donc $H^*(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}^*) = S\tau(P) \otimes \Lambda P$.

Introduisons les sous-espaces $P_r = \bigoplus_{k \geq r} P^{2k+1}$ de P ($P_0 = P$) et définissons les sous-algèbres $\mathfrak{J}_r$ et $E_r = \mathfrak{J}_r^+$ de $\mathfrak{J}_S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{J}_\Lambda(\mathfrak{g})$ par $\mathfrak{J}_r = S\tau(P_r) \otimes \Lambda P_r$ et $E_r = \bigoplus_{m+n \geq 1} (S^m\tau(P_r) \otimes \Lambda^n P_r)$. On a $E_r = E_{r+1} \oplus E_r^r$ avec $E_r^r = \bigoplus_{m+n \geq 1} (S^m\tau(P^{2r+1}) \otimes \Lambda^n P^{2r+1}) \otimes \mathfrak{J}_{r+1}$. Par définition, on a $E_0 = H_+^*(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}^*)$ et $E_r = \{0\}$ pour $r > r_M(\mathfrak{g})$. Soit d_r l'unique anti-dérivation de $\mathfrak{J}_r$ (les polynômes homogènes de degré k ont le degré 2k dans toutes les algèbres considérées ici) telle que $d_r(\mathbb{1} \otimes P_{r+1}) = 0$, $d_r(\tau(P_r) \otimes \mathbb{1}) = 0$ et $d_r(\mathbb{1} \otimes \alpha) = \tau(\alpha) \otimes \mathbb{1}$ pour $\alpha \in P^{2r+1}$. On a $d_r^2 = 0$, $dE_r \subset E_r$ et, on vérifie facilement que pour l'homologie on a $H(E_r, d_r) = E_{r+1}$; en fait, (E_r, d_r) est la suite spectrale associée au couple exact C de 4.1. Plus précisément <u>le couple exact</u> C_r <u>$r^{\text{ème}}$ dérivé de</u> C <u>est donné par</u>

$$\begin{tikzcd}
\partial^{2r} H_+^{pair,*}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \arrow[rr, "\partial^2"] & & \partial^{2r} H_+^{pair,*}(\delta, \mathrm{mod}(d)) \arrow[dl, "p_r"] \\
& E_r \arrow[ul, "i_r"] &
\end{tikzcd} \qquad (C_r)$$

où i_r est donné par la restriction de $i = i_0$ à $E_r \subset E_0 = H_+^*(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}^*)$ et $p_r(\partial^{2r}\alpha)$ est la composante de $p(\alpha) = p_0(\alpha)$ sur E_r dans la décomposition $E_0 = E_r \bigoplus_{s=0}^{s=r-1} E_s^s$. <u>On a d'autre part</u> $\ker(i_r) = \bigoplus_{k=r}^{k=r_M(\mathfrak{g})} \mathrm{Im}(d_k)$. Ces résultats peuvent se démontrer directement par récurrence sur r ou bien en utilisant un lemme de "transgression généralisée" qui a son intérêt en lui-même et permet de construire directement des δ-cocycles modulo d au-dessus de $\bigoplus_r E_r$, (pour plus de détails, voir la référence [5] ainsi que la référence [9] pour des applications à des cas particuliers intéressants pour la physique).

4.4 Conclusion.

Ce qui précède permet de dresser la table de la δ-cohomologie modulo d de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ dans le cas où $\mathfrak{g}$ est réductive et, par conséquent, de déterminer tous les termes anomaux qui sont des intégrales de produit extérieur des 1-formes de potentiel de jauge, des "champs de fantômes" ainsi que de leurs différentielles d et δ. Il serait souhaitable d'étendre ces résultats à des expressions plus générales contenant des dérivées arbitraires des champs puisque, en principe, de telles expressions pourraient intervenir dans certains modèles (bien que l'on n'en connaisse pas d'exemples pour l'instant).

Références bibliographiques .

(1) R. STORA : "Continuum gauge theories". In (Cargèse 1976) : New developments in quantum field theory and statistical mechanics", M. Lévy et P. Mitter Eds., Plenum 1977.

(2) R. STORA : "Algebraic structure and topological origin of anomalies". In (Cargèse 1983) : "Recent progress in gauge theories", G. Lehmann and Al. Eds., Plenum 1984.

(3) B. ZUMINO : "Chiral anomalies and differential geometry". In (Les Houches 1983) : "Relativity, groups and topology II", B.S. De Witt et R. Stora Eds., North Holland 1984.

(4) B. ZUMINO : "Cohomology of gauge groups : Cocycles and Schwinger terms", Nucl. Phys. 253B (1985), 477.

(5) M. DUBOIS-VIOLETTE, M. TALON et C.M. VIALLET : "B.R.S. algebras. Analysis of the consistency equations in gauge theory", à paraître dans Commun. Math. Phys. 101 (1985).

(6) M. DUBOIS-VIOLETTE, M. TALON et C.M. VIALLET : "Results on B.R.S. cohomologies in gauge theory", Phys. Lett. 158B (1985), 231.

(7) C.M. VIALLET : "Some results on the cohomology of the Becchi-Rouet-Stora operator in gauge theory". In : "Symposium on anomalies, geometry and topology", (Chicago-Argonne, March 1985), World Scientific Publishing Co., Singapour, 1985.

(8) M. TALON : "Algebra of anomalies". Exposé à l'école d'été de Cargèse 1985, à paraître dans les comptes rendus de Cargèse.

(9) M. DUBOIS-VIOLETTE, M. TALON et C.M. VIALLET : "Anomalous terms in gauge theory : Relevance of the structure group", à paraître dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré (1986).

(10) J. WESS et B. ZUMINO : "Consequence of anomalous Ward identities", Phys. Lett. 37B (1971), 95.

(11) C. CHEVALLEY et S. EILENBERG : "Cohomology of Lie groups and Lie algebras", Trans. Am. Math. Soc. 63 (1948), 85.

(12) L.D. FADDEEV : "Operator anomaly for the Gauss law", Phys. Lett. 145B (1984), 81.

(13) D. SULLIVAN : "Infinitesimal computations in topology", Publ. I.H.E.S. 47 (1977), 269.

(14) S. MAC LANE : "Homology", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer 1963.

(15) J.L. KOSZUL : "Homologie et cohomologie des algèbres de Lie", Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 65.

(16) W. GREUB, S. HALPERIN et R. VANSTONE : "Connections curvature and cohomology" Vol. III, Academic Press 1976.

(17) G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE : "Cohomology of Lie algebras", Ann. Math 57 (1953), 591.

(18) H. CARTAN : "Notion d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie" et "La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal", dans : "Colloque de topologie", (Bruxelles 1950), Masson 1951.

(19) C. CHEVALLEY : "Invariants of finite groups generated by reflexions", Am. J. Math. 77 (1955), 778.

(20) M. de WILDE : "On the local Chevalley cohomology of the dynamical Lie algebra of a symplectic manifold", Lett. Math Phys. 5 (1981), 351.

(21) L. BONORA and P. COTTA-RAMUSINO : "Some remarks on B.R.S. transformations, anomalies and the cohomology of the Lie algebra of the group of gauge transformations", Commun. Math. Phys. 87 (1983), 589.