C. Bardos

Équations cinétiques et changement d'échelle

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1986, tome 36
« Conférences de : C. Bardos, L. Baulieu, H.J. Borchers, M. Dubois-Violette, P. Pansu et R. Stora », , exp. n° 1, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1986__36__1_0>

EQUATIONS CINETIQUES ET CHANGEMENT D'ECHELLE

C. BARDOS

INTRODUCTION

Dans cet exposé, on va considérer les équations cinétiques et on se propose de décrire les progrès réalisés dans le traitement mathématique de ces équations.

Pour étudier l'évolution d'un courant, d'un fluide ou d'un plasma, on peut, soit utiliser des équations macroscopiques qui décrivent les phénomènes à l'échelle de l'observateur ; on utilise alors les lois classiques de la physique ; on peut aussi examiner le phénomène au niveau des particules (molécules, ions ou atomes) ; il se trouve que l'on utilise également un niveau intermédiaire que l'on peut appeler cinétique. On introduit comme inconnue une ou plusieurs fonctions positives $f(x,v,t)$ qui décrivent "le nombre" de particules qui, au point x et à l'instant t, sont animées de la vitesse v. f est donc une fonction de variables x, v et t ; t est le temps, x et v parcourent l'espace des phases $X \times V$. Les quantités macroscopiques sont obtenues par intégration par rapport à v :

$$\rho = \int f(x,v,t)\,dv\,,\quad \rho u = \int v\, f(x,v,t)\,dv\,,\quad E = \int \frac{|v|^2}{2}\, f(x,v,t)\,dv$$

sont respectivement la densité ou la charge, le moment cinétique et l'énergie interne. Comme les particules ont pour vitesse v, toute équation cinétique commence par le terme d'advection :

$$\frac{\partial t}{\partial t} + v\,\nabla_x f\;.$$

Les autres termes dépendent des types de phénomènes considérés.

Cette approche est très classique mais elle suscite actuellement un intérêt important, probablement pour les raisons suivantes :

(1) Un certain nombre de problèmes abordés en recherche fondamentale ou appliquée sont trop complexes pour pouvoir être décrits au niveau macroscopique. Les plus connus sont les suivants :
- l'évolution des neutrons dans un milieu radioactif (Technologie des réacteurs nucléaires ou utilisation de substance radioactive pour explorer le sous-sol, comme cela est fait par exemple en recherche pétrolière).
- L'évolution d'un plasma (en fusion contrôlée) décrit par les équations de Vlasov.
- La propagation des électrons dans un semi conducteur (Arseniate de Gallium).
- L'étude de la distribution des photons dans un milieu stellaire (équation du transfert radioactif).
- Les problèmes classiques de mécanique des fluides en régime très "violent" (utilisation de l'équation de Boltzmann pour analyser les phénomènes lors de la rentrée de la navette spatiale dans l'atmosphère).

(2) Les calculateurs vectoriels offrent des méthodes de calculs, pour les équations macroscopiques, qui s'inspirent beaucoup du mouvement des particules (méthodes particulaires) et une étude des équations cinétiques peut contribuer à comprendre ces méthodes de calculs et à en concevoir de nouvelles.

(3) Une série de résultats théoriques ont été récemment obtenus, en particulier par Nishida, Ukai et leurs collaborateurs, par Caflisch et Nicolaenko, ou par les équipes parisiennes, remettant ainsi le sujet à la mode.

Une partie du travail mathématique consiste à justifier le passage des équations cinétiques aux équations macroscopiques, éventuellement à déterminer ces équations ; ceci se fait par des méthodes de perturbation en choisissant convenablement le ou les petits paramètres. En fait, une variété dans le choix de ces paramètres et des équations cinétiques conduit à une très grande diversité dans les équations macroscopiques obtenues. Ce sont ces idées que je souhaite utiliser.

I. L'EQUATION DU TRANSPORT DES NEUTRONS ET L'APPROXIMATION DE LA DIFFUSION

Pour simplifier l'exposé, on considère l'évolution des neutrons dans un milieu infini, conservatif, et invariant par toute translation perpendiculaire à la direction 0.x. L'équation obtenue est alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} + u' - \frac{1}{2}\int_{1}^{1} u(x,\mu')\,d\mu' = 0 \tag{I.1}$$

u est une fonction définie dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times]-1,1[$; μ désignant en fait le cosinus de l'angle du vecteur v avec l'axe $0x$. Il est commode d'introduire l'espace $H = L^2(\mathbb{R}\times]-1,1[)$ et les théorèmes d'analyse classique Hille Yosida en particulier) permettent d'affirmer que pour toute donnée initiale $u(x,\mu,0) = u_o(x,\mu)$, le problème (I.1) admet une unique solution décrite par l'expression

$$u(x,t) = e^{tT} u_o \tag{I.2}$$

où e^{tT} est un groupe d'opérateur. e^{tT} est en particulier aussi bien défini pour t positif que pour t négatif. Il sera commode de désigner par φ l'opérateur

$$(\varphi f)(\mu) = f - \frac{1}{2}\int_{1}^{1} f(\mu)\,d\mu' .$$

Le noyau de φ est formé des fonctions constantes en μ, il est de dimension 1, et φ n'est autre que la projection orthogonale dans $L^2(]-1,1[)$ sur $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\perp}$ espace des fonctions de moyenne nulle. Motivé par l'interprétation physique du phénomène, et aussi pour obtenir le résultat désiré, on introduit un petit paramètre $\varepsilon > 0$, destiné à tendre vers zéro, et on remplace l'équation (I.1) par l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi u_\varepsilon = 0 \tag{I.3}$$

la solution est alors donnée, pour $t \geqslant 0$ et $t < 0$ par la formule

$$u(\alpha,t) = e^{tT_\varepsilon} u_o .$$

La différence entre $t > 0$ et $t < 0$ apparaît maintenant si on observe que l'on a, uniquement pour $t \geqslant 0$

$$\| e^{tT_\varepsilon} \| \leqslant 1 . \tag{I.4}$$

$\| \cdot \|$ désigne la norme de l'opérateur e^{-tT_ε} dans l'espace H. En utilisant la compacité faible, on peut extraire de la famille u_ε une sous-famille, encore notée u_ε qui converge dans un sens convenable vers une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ ; H)$.

La décomposition de H en la somme Hilbertienne $(\operatorname{Ker}\varphi) \oplus (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$ conduit à écrire u_ε sous la forme $u_\varepsilon = q_\varepsilon + w_\varepsilon$.

On obtient, après multiplication par u_ε et intégration la relation :

$$\text{(I.4)} \quad \frac{1}{2}\iint |u_\varepsilon(x,\mu,t)|^2\, dx\, d\mu + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \iint |w_\varepsilon(x,\mu,s)|^2\, dx\, d\mu\, ds = \frac{1}{2}\iint |u_o(x,\mu)|^2\, dx\, d\mu .$$

Ceci permet de prouver que w_ε tend vers zéro comme ε. La limite u appartient donc à $\operatorname{Ker}\varphi$ et est indépendante de μ.

De l'équation (I.3) on déduit, par intégration par rapport à μ la formule

$$\text{(I.5)} \qquad \frac{\partial}{\partial t} q_\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-1}^{1} \mu\, w_\varepsilon\, d\mu = 0 .$$

Comme on a :

$$\text{(I.6)} \qquad w_\varepsilon = -\varepsilon\mu\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon\mu\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon^2\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} ,$$

On déduit de (I.5) la relation :

$$\text{(I.7)} \quad \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-1}^{1} \mu\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}\, d\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1}\mu^2 w_\varepsilon\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\int_{-1}^{1}\mu\, w_\varepsilon\, d\mu .$$

Le second membre de (I.7) est dans un sens convenable (dans un bon espace de distributions) petit d'ordre ε. On a donc, après intégration :

$$\text{(I.8)} \qquad \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial x^2} = O(\varepsilon) .$$

Par passage à la limite (ne présentant aucune difficulté car le problème est linéaire), on obtient

$$\text{(I.9)} \qquad \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 .$$

Remarques

(1) A un facteur 1/2 près, q n'est autre que la quantité totale de neutrons ; (I.9) est donc une équation approchée pour la fonction

$$u_\varepsilon = \int_{-1}^{1} u_\varepsilon(x,\mu,t)\,d\mu \ .$$

(2) La démonstration ci-dessus n'est pas classique, elle est particulièrement simple, mais pour obtenir cette simplicité, on a perdu toute information sur la rapidité de la convergence et sur l'erreur entre u_ε et $u = 2q$. Il existe dans la littérature des démonstrations beaucoup plus complexes, mais beaucoup plus précises, tenant en particulier compte des conditions aux limites.

(3) Le point essentiel est que l'on est passé d'une équation linéaire réversible (en temps) à une équation linéaire parabolique, ou de diffusion, donc irréversible. On peut expliquer cela par une perte d'information obtenue en considérant q plutôt que $u(x,\mu,t)$.

(4) L'approximation de l'équation de transport est obtenue par une unique équation. Ceci est lié au fait suivant : Le noyau de φ est de dimension 1 .

La situation mathématique est radicalement différente dans le second exemple également fondamental, et historiquement antérieur, que nous allons considérer maintenant.

II. L'EQUATION D'EULER COMPRESSIBLE ET L'EQUATION DE BOLTZMANN.

Le système d'équations suivant (défini dans $\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^d_x$, $d = 1,2$ ou 3) .

$$(\text{II}.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla.(\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\dfrac{3}{2}T + |u|^2/2\right)\right) + \nabla.\left(\rho u\left(\dfrac{3}{2}T + \dfrac{|\xi|^2}{2}\right) + pu\right) = 0 \end{cases}$$

exprime pour le mouvement d'un fluide compressible la conservation de la masse, du moment cinétique et de l'énergie. Les inconnues sont ρ la densité, $u = (u_1,u_2,u_3)$ la vitesse, et T la température. La pression p est donnée en fonction de ρ et T par la relation $p = \rho T$ (dite loi d'état). Le système (II.1) est non linéaire et hyperbolique. Si les données initiales sont régulières, on peut prouver que pendant un temps (éventuellement bref), il y a une solution régulière, mais après, apparaissent des singularités qui correspondent par exemple à la formation d'ondes de choc dans le fluide. Les équations ci-dessus sont écrites sous formes conservatives (les dérivées sont à l'extérieur) ; elles peuvent donc encore être définies (au sens des distributions), bien que les inconnues soient des fonctions discontinues. On parle alors de solutions faibles ; il semble d'ailleurs que ce soit au sujet de ce problème qu'apparaissent (chez Riemann !) les premières idées relatives à la notion de distribution. Maintenant, on remarque (avec Lax [11], qui a apporté une importante contribution à ce type de problèmes) que les solutions faibles ne sont pas déterminées de manière unique par leur donnée initiale. Il faut ajouter le long d'un choc une condition supplémentaire, qui exprime par exemple que les caractéristiques rentrent dans le choc. On remarque que l'on peut, par des manipulations élémentaires, déduire du système (II.1) l'équation supplémentaire :

$$\text{(II.2)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \operatorname{Log} \frac{\rho^{2/3}}{T}\right) + \nabla \cdot \left(\rho\, u \operatorname{Log} \frac{\rho^{2/3}}{T}\right) = 0 \; .$$

Mais ces manipulations ne sont valables que lorsque les solutions sont régulières, elles cessent d'être vraies pour des solutions faibles. La quantité $\rho \operatorname{Log} \rho^{2/3}/T$ est appelée aussi entropie ; c'est une fonction convexe des variables :

$$\rho \; , \; m = \rho\, u \qquad E = \rho\left(\frac{2}{3} T + |u|^2 / 2\right) \; ,$$

et on remarque qu'un choc "physique" (de faible amplitude) est caractérisé par la relation :

$$\text{(II.3)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \operatorname{Log} \frac{\rho^{2/3}}{T}\right) + \nabla \cdot \left(\rho\, u \operatorname{Log} \frac{\rho^{2/3}}{T}\right) \leqslant 0$$

(cf. Lax [11]). La plupart des problèmes concernant le système (II.1) sont encore largement "ouverts", tant en ce qui concerne l'existence, l'unicité ou le comportement asymptotique des solutions. Néanmoins, on espère que la solution physique est limite de la solution des équations de Navier Stokes compressible, la viscosité apparaissant dans les équations de Navier Stokes, empêchant la formation des singularités. Dans ce sens, on démontre facilement

la

Proposition II.1 : On désigne par $\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, T^\varepsilon$ la solution des équations de Navier Stokes compressible.

$$
(II.\ )\quad \left[\begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial t} \rho^\varepsilon + \nabla.\ (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho^\varepsilon u^\varepsilon + \nabla.(\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon + p^\varepsilon) = \varepsilon \nabla . (\mu \sigma (u^\varepsilon) - \frac{2}{3} \mu \nabla . u^\varepsilon) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\varepsilon(\frac{3}{2} T^\varepsilon + \frac{1}{2} | u^\varepsilon|^2)) + \nabla . (\rho^\varepsilon u^\varepsilon (\frac{3}{2} T^\varepsilon + \frac{1}{2} |u^\varepsilon|^2) + u^\varepsilon p^\varepsilon) \\
\qquad = \varepsilon \nabla (\mu\sigma(u^\varepsilon) - \frac{2}{3} u \nabla . u^\varepsilon + K \nabla T^\varepsilon) \qquad (1)
\end{array}\right.
$$

On suppose que ρ^ε, u^ε et $T^{\varepsilon'}$ sont uniformément bornés et convergent presque partout en (x,t) vers des fonctions ρ,u,T . Alors, celles-ci vérifient, au sens des distributions, l'équation d'Euler compressible et la condition d'entropie (II.3).

Démonstration : On déduit du système (II.4) les deux équations suivantes :

$$(II.5) \qquad (\rho^\varepsilon)^{-1} (\rho_t^\varepsilon + u^\varepsilon . \nabla \rho^\varepsilon) + \nabla . u^\varepsilon = 0$$

$$(II.6) \quad (T^\varepsilon)^{-1} (T_t^\varepsilon + u^\varepsilon . \nabla T^\varepsilon) + \frac{2}{3} \nabla . T^\varepsilon = \varepsilon \frac{2}{3} (\rho^\varepsilon)^{-1} (\nabla . (K \nabla . T^\varepsilon) + \psi^\varepsilon))$$

où ψ^ε désigne l'expression (toujours positive)

$$\psi^\varepsilon = \frac{\mu}{2} ((u_{x_j}^{\varepsilon i}) + u_{x_i}^{\varepsilon j})^2 - \frac{2}{3} (\nabla . u^\varepsilon)^2) .$$

---

(1) Comme dans l'équation d'Euler compressible $\nabla.(\rho u \otimes u)$ désigne le vecteur de composantes $(\rho u^i u^j)_{x_j}$, $\sigma(u)$ est le tenseur de composantes $(u_{x_j}^i + u_{x_i}^j)$, $\nabla.(\mu \sigma(u))$ est donc le vecteur de composantes $(\mu(u_{x_j}^i + u_{x_i}^j))_{x_i}$. Enfin μ et K coefficients de viscosité et diffusivité sont positifs et proportionnels à T^γ où γ est un réel dépendant du fluide considéré. Comme ci-dessus, on a $p = \rho T$.

Par combinaisons de (II.5) et (II.6), on obtient :

$$(\text{II}.7)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^\varepsilon \operatorname{Log} \frac{(\rho^\varepsilon)^{2/3}}{T^\varepsilon}\right) + \nabla\cdot\left(\rho^\varepsilon u^\varepsilon \operatorname{Log} \frac{(\rho^\varepsilon)^{2/3}}{T^\varepsilon}\right)$$

$$+\,\varepsilon\left(\frac{2}{3}\,\psi^\varepsilon + \frac{K}{(T^\varepsilon)^2}\,|\nabla T^\varepsilon|^2\right) = \frac{2}{3}\,\varepsilon\,\nabla\cdot\left(\frac{1}{T^\varepsilon}\,K\,.\nabla T^\varepsilon\right).$$

Il en résulte deux choses :

(i) d'une part la majoration :

$$(\text{II}.8)\qquad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{2}{3}\,\psi^\varepsilon + \frac{K}{(T^\varepsilon)^2}\,|\nabla T^\varepsilon|^2\right) dx\,dt \leqslant C$$

où C désigne une constante indépendante de x,t et ε .

(ii) l'inégalité :

$$(\text{II}.9)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^\varepsilon \operatorname{Log} \frac{(\rho^\varepsilon)^{2/3}}{T^\varepsilon}\right) + \nabla\cdot\left(\rho^\varepsilon u^\varepsilon \operatorname{Log} \frac{(\rho^\varepsilon)^{2/3}}{T^\varepsilon}\right) \leqslant \frac{2}{3}\,\varepsilon\cdot\nabla\cdot\left(\frac{K}{T^\varepsilon}\,\nabla\,.\,T^\varepsilon\right).$$

Nous avons fait des hypothèses suffisantes pour pouvoir passer à la limite au sens des distributions dans les premiers membres de (II.4). L'inégalité (II.8) permet de montrer que les seconds membres tendent vers zéro. Enfin, la relation d'entropie est obtenue en passant à la limite dans (II.9).

<u>Remarque</u> : Comme le problème est maintenant non linéaire, les majorations uniformes ne sont pas faciles à obtenir; il s'agit encore en fait d'un problème ouvert; d'autre part, la convergeance presque partout est indispensable pour passer à la limite dans des problèmes non linaires. On peut s'en persuader en remarquant que l'on a, au sens des distributions :

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (\sin nx)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Néanmoins, le contenu de la Proposition II.1 est une étape importante dans la compression des problèmes non linéaires, comme le montre son utilisation dans des cas particuliers (cf. Di Perna [5]).

Nous nous proposons maintenant de suivre la même route pour passer de l'équation de Boltzmann au système des équations d'Euler compressibles. On considère donc un fluide dans lequel les seuls événements sont les chocs entre deux molécules ; on suppose que dans ces chocs, sont conservées les masses, les moments cinétiques et les énergies ; cela conduit, avec Boltzmann, à introduire deux couples de vitesses (v,v_i) avant choc, (v',v_i') après choc. Ces vitesses sont donc reliées par les relations :

$$v' + v_1' = v + v_i \ , \quad |v'|^2 + |v_1'|^2 = |v|^2 + |v_1|^2 \ . \tag{II.10}$$

Il en résulte que tout choc est déterminé de manière unique par la donnée d'un vecteur unitaire sur S^2 (modulo la symétrie par rapport à 0) selon les formules :

$$v' = v + (v-v_1,\omega)\omega \ ; \ v_1' = v_1 - (v - v_1,\omega)\omega \ . \tag{II.11}$$

On introduit avec Boltzmann, une fonction $q(|v-v_1|,\omega) \geqslant 0$ qui décrit la probabilité d'apparition d'un choc correspondant à ω pour v et v_1 donnés (cf. Chapman Cowling [4], ou Ferziger et Kaper [6] par exemple), et on obtient ainsi l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial t}{\partial t} + v : \nabla_x f = \iint_{S^2\times\mathbb{R}^3_{v_1}} (f'f_1' - f\,f_1)\, q(|v-v_1|,\omega)\, dv,\, d\omega \tag{II.12}$$

qui est integrodifférentielle et quadratique. On note $Q(f,f)$ l'opérateur figurant au second membre de (II.12) et on remarque que les relations (II.10) se traduisent à ce niveau par les identités :

$$\int Q(f,f)dv = \int Q(f,f)|v|^2\, dv = \int Q(f,f)v_i\, dv = 0 \ (1\leqslant i\leqslant 3)\ . \tag{II.13}$$

Boltzmann a de plus remarqué que l'utilisation répétée de Théorème de Fubini donnait la relation (dite Théorème H) :

$$\begin{aligned} &\int (f+\mathrm{Log}\, f)\ Q(f,f)dv = \\ &-4 \iiint (f',f_1' - ff_1)(\mathrm{Log}(f'f_1') - \mathrm{Log}\,(ff_1))\, q(|v-v_1|,\omega)\, dv_1\, dv\, d\omega \ . \end{aligned} \tag{II.14}$$

Un des intérêts de la formule (II.14) est que l'intégrande du second membre est toujours positive (croissance de la fonction Log). Elle n'est nulle que si on a

$$\mathrm{Log}\, f' + \mathrm{Log}\, f'_1 \equiv \mathrm{Log}\, f + \mathrm{Log}\, f_1 .$$

Ceci implique que f est une Maxwellienne ; c'est-à-dire une fonction de la forme :

$$\text{(II.15)} \qquad f(x,v,t) = \alpha(x,t)\, e^{-\beta(x,t)|v|^2 - \vec{\gamma}(x,t)\cdot\vec{v}} .$$

Il convient de réécrire (II.15) sous la forme :

$$\text{(II.16)} \qquad f(x,v,t) = \rho(x,t)/_{(2\pi x,T))^{3/2}}\ \bar{e}^{|v-u(x,t)|^{\varepsilon}/2T(x,t)}$$

car alors on a :

$$\text{(II.17)} \qquad \begin{cases} \int f(x,v,t)\, dv = \rho(x,t) \\ \int v\, f(x,v,t) dv = \rho(x,t)\, u(x,t) \\ \int \frac{|v|^2}{2}\, f(x,v,t)\, dv = \rho(x,t)\, (\frac{3}{2}\, T(x,t) + |u(x,t)|^{2/2}) \end{cases}$$

et bien entendu tout autre moment de f $\int v^j f\, dv$ (j multi entier) peut aussi, dans ce cas, être calculé explicitement en fonction de ρ, u, T .

Boltzmann a utilisé ces remarques pour montrer que tout état d'équilibre était Maxwellien et que, si une solution convergeait pour $t\to\infty$, sa limite était un état d'équilibre Maxwellien. En fait, on peut développer un peu plus cet analyse et relier le Théorème H à l'entropie macroscopique, pour démontrer en s'inspirant de la Proposition II.1, la

Proposition II.2 . On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon(x,v,t)$ est une solution de l'équation de Boltzmann.

$$\text{(II.18)} \qquad \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v\nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(f_\varepsilon, f_\varepsilon)\ ,\quad f_\varepsilon(x,v,0) = f_0(x,v)$$

dans $\mathbb{R}_t^t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$, satisfaisant de "bonnes majorations uniformes" et "de bonnes conditions d'intégrabilité" (cf. Bardos et Golse [1] pour les détails), alors si $f_\varepsilon(x,v,t)$ converge presque partout vers une limite f(x,v,t), cette limite est une Maxwellienne :

$$f(x,v,t) = (\rho(x,t) e^{-|v-u(x,t)|^2/2T(x,t)})/(2\pi T(x,t))^{3/2} .$$

<u>dont les paramètres vérifient les équations d'Euler compressible et la condition d'entropie.</u>

<u>Démonstration</u> : On remarque que l'expression $1 + \mathrm{Log}\, f$ n'est autre que la dérivée par rapport à f de la quantité $f\,\mathrm{Log}\, f$. On en déduit que l'on a (en utilisant (II.14)) :

$$\text{(II.20)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \; f_\varepsilon \,\mathrm{Log}\, f_\varepsilon \,dv + \nabla_x \int v\, f_\varepsilon \,\mathrm{Log}\, f_\varepsilon \, dv$$
$$+ \frac{4}{2} \iiint (f'_\varepsilon f'_{1\varepsilon} - f_\varepsilon f_{1\varepsilon})(\mathrm{Log}(f'_\varepsilon\, f'_{1\varepsilon}) - \mathrm{Log}(f_\varepsilon f_{1\varepsilon}))\, q\, dv_1\, dv\, d\omega = 0 \,.$$

Ceci permet de montrer que l'on a :

$$\text{(II.21)} \quad \iiint (f'f'_1 - ff_1)(\mathrm{Log}\; f'f'_1 - \mathrm{Log}\; ff_1)\, q\, dv_1\, d\omega\, dv$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint (f'_\varepsilon f'_{1\varepsilon} - ff_1)(\mathrm{Log}\; f'_\varepsilon f'_{1\varepsilon} - \mathrm{Log}\; f_\varepsilon f_1)\, q\, dv_1\, d\omega\; dv = 0$$

Ainsi f limite des fonctions f_ε est-elle une Maxwellienne dont les paramètres vérifient les relations :

$$\text{(II.22)} \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \; &= \int f(x,v,t)dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \int f \;(x,v,t)dv \\ \rho u \; &= \int v\, f\,(x,v,t)dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \int v\, f\;(x,v,t)dv \\ \rho\, (\frac{|4|^2}{2} + \frac{3}{2}\, T) \; &= \int \frac{|v|^2}{2}\; f(x,v,t)dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{|v|^2}{2}\; f_\varepsilon(x,v,t)dv \end{aligned} \right.$$

Le passage à la limite par rapport à tout autre moment se fait de la même manière.

En multipliant (II.18) par 1, v et $|v|^2/2$ et en utilisant (II.13), on en déduit que ρ, u et T sont solutions, au sens des distributions des équations d'Euler compressibles.

Enfin de (II.20), on déduit que l'on a :

$$\text{(II.23)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int f_\varepsilon \;\mathrm{Log}\; f_\varepsilon \,dv \; + \nabla_x \int v\, f_\varepsilon \,\mathrm{Log}\, f_\varepsilon \,dv \leqslant 0 \;.$$

Ce qui, par passage à la limite, conduit à la relation d'entropie.

Remarques :

(1) Le nombre $\varepsilon > 0$ représente le libre parcours moyen entre deux collisions et la Proposition II.2 montre le lien étroit existant entre les équations d'Euler compressibles et l'équation de Boltzmann pour ε tendant vers 0. Il en résulte en particulier que les théorèmes disponibles concernant l'équation de Boltzmann ne sont pas "meilleurs" que ceux concernant les équations d'Euler; On ne sait prouver l'existence de la solution, durant un temps T indépendant de ε que pour des données initiales extrêmement proches d'une Maxwellienne. Elles doivent être choisies de manière à ce que le problème macroscopique correspondant ne présente pas de choc sur l'intervalle [0,T] (cf. Nishida [12] ou Caflisch [3]).

(2) Le système d'Euler compressible est formé de 5 équations ; cela correspond au fait qu'il est limite d'une équation de la forme

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$$

où le noyau de D est une variété de dimension 5 (Les Maxwelliennes).

(3) Une étude plus attentive de l'équation de Boltzmann montre que celle-ci n'est bien posée que pour $t > 0$ (cf. Grad [7]) ; cependant, le système (II.1) est non linéaire hyperbolique, et avant que les singularités ne se forment, il est bien posé, autant pour $t > 0$ que pour $t < 0$. Il y a là un paradoxe qui disparaît pour des temps plus grands, lorsque les singularités se sont formées dans (II.1), conduisant alors à la relation (II.3).

III. L'EQUATION DE BOLTZMANN ET L'EQUATION D'ADVECTION

Maintenant, si au lieu de faire tendre le libre parcours moyen vers zéro, on le garde fixe et on fait tendre le temps vers l'infini, on peut obtenir, pour la solution de l'équation de Boltzmann, un comportement complètement différent. C'est ce que l'on se propose de mettre en évidence.

Cette analyse (due pour l'équation de Boltzmann à Ilner et Shinbrot [9], et pour l'équation de Vlasov Poisson à Degond et l'A [2]) se rapproche des résultats récents obtenus pour les équations des ondes linéaires. On sait que l'équation $y' = y^p$ ne possède pas de solution globale (en temps), par contre, si on considère l'équation des ondes non linéaires

$$\square u = |u|^p u \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t \quad . \tag{III.1}$$

On peut (cf. Klainemann [10] et alt.) prouver l'existence globale d'une solution régulière qui, pour $t \to \pm\infty$ se comporte comme une solution du problème $\square u_\pm = 0$; pour cela, on utilise deux idées.

(i) Bien que l'équation $\square u = 0$ conserve l'énergie, la solution se disperse car elle part à l'infini, sa norme dans L^∞ décroît donc d'autant plus vite que la dimension est grande (il y a plus d'espace pour se disperser) selon la loi :

$$|u(x,t)| \leqslant C\, t^{-(d-1)/2} \tag{III.2}$$

où C est une constante dépendant des données initiales.

(ii) Si la donnée initiale est petite et si p est grand, la perturbation $|u|^p u$ sera d'autant plus petite, et c'est la dispersion qui l'emportera.

Pour l'équation de Boltzmann on peut mettre en évidence un phénomène analogue, en effet si f est la solution de l'équation d'advection :

$$\frac{\partial f}{\partial T} + v \cdot \nabla_x f = 0 \;, \tag{III.3}$$

la densité correspondante est donnée par

$$\rho(x,t) = \int f(x,v,t)\, dv = \int f_o(x-vt,v)\, dv \;. \tag{III.4}$$

Enfin, si $f_o(x,v)$ est (uniformément en v) majorée par une fonction intégrable $h(x)$, on a , par un changement de variables évident :

$$\rho(x,t) = \int f_o(x-vt,v)dv \leqslant \int h(x-vt)dv \leqslant \frac{1}{t^d} \int h(X)dX \;, \tag{III.5}$$

d'où une dispersion en $1/t^d$.

Suivant ces idées, on peut donc prouver la

Proposition III.1 : On suppose que la donnée initiale $f_i(x,v)$ est assez régulière (1) et vérifie la majoration uniforme :

---

(1) Pour des précisions et pour des fonctions q plus générales, on se reportera à Illner-Shinbrot [9] ou Hamdache [8].

(III.6) $$f_o(x,v) \leqslant C\, e^{-|x|^2}$$

alors, si C est assez petite, l'équation de Boltzmann :

(III.7) $$\frac{\partial f}{\partial t} = v \cdot \nabla_f = Q(f,f) \ , \ f(x,v,0) = f_o(x,v)$$

admet une solution (unique) régulière qui, pour t tendant vers l'infini, se comporte comme la solution du problème d'advection :

$$\frac{\partial f_+}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_+ = 0 \ .$$

Démonstration : Nous ne donnons que les grandes lignes de la démonstration, en nous limitant en particulier au cas où la section efficace q est identique à 1 (1). L'essentiel va résider dans une estimation a priori que l'on va prouver.

On pose

$$f(x,v,t) = e^{-|x-vt|^2} \ g(x,v,t) \quad \text{et} \quad X(t) = \sup_{x,v} \ g(x,v,t)$$

et on s'intéresse à une majoration uniforme, pour t grand de X(t) .

On a alors (avec des notations évidentes) :

(III.8) $$\frac{\partial g}{\partial t} + v \cdot \nabla g =$$
$$e^{|x-vt|^2} \iint \left(e^{-(|x-v't|^2 + |x-v_1't|^2)} \ g'g_1' - e^{-(|x-vt|^2 + |x-v_1t|^2)} \ g\, g_1\right) dv_1\, d\omega$$

A cause des relations de conservation du moment cinétique et de l'énergie, on a la formule :

(III.9) $$|x-vt|^2 - |x-v't|^2 - |x-v_1't|^2 = -|x-v_1t|^2 \ .$$

On déduit ainsi de (III.8) la relation :

---

(1) Pour des précisions et pour des fonctions q plus générales, on se reportera à Ilner Shinbrot [9] ou Hamdache [8].

$$\text{(III.10)} \qquad \left| \frac{\partial g}{\partial t} + v \cdot \nabla g \right| = \left| \iint e^{-|x-v_1' t|^2} (g' g_1' - g g_1) dv_1 \, d\omega \right|$$

$$\leqslant e \, (X(t))^2 \iint e^{-|x-v_1 t|^2} dv_1 \, d\omega$$

$$\leqslant 2 \, (X(t))^2 \, \frac{1}{t^3} \left(\int e^{-x^2} dx \right) \int d\omega$$

$$\leqslant C \, (X(t))^2 \, 1/t^3 \, .$$

En utilisant le fait que le groupe engendré par $-v.\nabla$ est une isométrie dans L^∞, et le fait que $X(t)$ est borné pour t petit (existence locale), on obtient :

$$\text{(III.11)} \qquad \left| \frac{d\,X(t)}{dt} \right| \leqslant \frac{C}{(1+t)^3} (X(t))^2 \, .$$

On en déduit, par comparaison avec la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$y' = \frac{C}{(1+t)^3} y^2 \, ,$$

la majoration :

$$\text{(III.12)} \qquad X(t) \leqslant \frac{X(0)}{1 - X(0)\, C \int_0^t \frac{ds}{(1+s)^3}} \, .$$

Il en résulte que, pour

$$X(0) \, . \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^3} < 1/C \, .$$

$X(t)$ est uniformément borné, et le second membre de (III.10), décroissant comme $1/t^3$ est donc intégrable à l'infini ; ceci permet de terminer facilement la démonstration.

IV. EN GUISE DE CONCLUSION

Avec l'équation de Transport et l'équation de Boltzmann, on a décrit trois régimes asymptotiques absolument différents. Les différences proviennent bien sûr de l'opposition linéaire - non linéaire, mais elles proviennent surtout du choix des paramètres asymptotiques. Des idées analogues interviennent également dans les autres problèmes évoqués en introduction. En particulier, pour l'équation de Vlasov - Poisson, l'analogie avec les propriétés de l'équation des ondes non linéaires est encore plus poussée (cf. Bardos - Degond [1]).

Pour en savoir plus, on peut bien entendu se référer à la bibliographie ci-dessous.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bardos et P. Degond : Global Existence for the Vlasov-Poisson Equation in 3 space variable with small initial Data. Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire.

[2] C. Bardos et F. Golse : Différents aspects de la notion d'entropie au niveau de l'Equation de Boltzmann et de Navier-Stokes. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 299 Série I - 7 (1984).

[3] R. Caflisch : The Fluid dynamic limit of the non linear Boltzmann Equation. Comm. in Pure Appl. Math. 3 (1980) p. 651-666.

[4] S. Chapman et T.G. Cowling : The mathematical theory of non uniform gases. 3rd Ed. Cam. Univ. Press (1970).

[5] R. Di Perna : Convergence of Approximate Solutions to conservations laws. Arch. Rat. Mech. Anal. (1983).

[6] J. Ferziger et H. Kaper : Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. (North Holland Amsterdam 1972).

[7] H. Grad : Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non linear Boltzmann Equation in Proc. Symp. Appl. XVII. Application of non linear P.D.E. in Mathematics, p. 154-183.

[8] K. Hamdache : Quelques résultats pour l'Equation de Boltzmann . Note C.R. Acad. Sci. Paris.

[9] R. Ilner et M. Shinbrot : The Boltzmann Equation global existence in an infinite vacuum. A paraître dans Com. Math. Phys.

[10] S. Klainerman : Long time behaviour of the solution to non linear equations. Arch. Rat. Mech. and Anal. Vol. 78 (1982), p. 73-98.

[11] P. Lax : Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock waves. S.I.A.M. Regional Conference Serie in Math. II 1973.

[12] T. Nishida : Fluid dynamical limit of the non linear Boltzmann Equation to the level of the compressible Euler Equation. Comm. Math. Phys. 61 (1978), p. 119-148.

*
* *

Centre de Mathématiques Appliquées
E.N.S. - 45, rue d'Ulm -
75230 PARIS CEDEX 05

et

Département de Mathématiques CSP
Université Paris XIII
Av. J-B. Clément,
93430 VILLETANEUSE