Recherche Coopérative sur Programme n° 25

P. Collet

Modèles d'Ising avec interactions aléatoires sur des réseaux diamants

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1984, tome 34
« Conférences de : P. Collet, P.A. Meyer, P. Moussa, V. Rivasseau, Y. Sibuya et B. Malgrange », , exp. n° 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1984__34__1_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MODELES D'ISING AVEC INTERACTIONS ALEATOIRES SUR DES RESEAUX DIAMANTS

P. Collet

Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.
Groupe de Recherche du C.N.R.S. n°48

A620.0784 Août 1984

I. INTRODUCTION

Il est maintenant bien établi que le groupe de renormalisation est un outil puissant pour l'étude des transitions de phase en mécanique statistique. Récemment il a été utilisé avec succés en théorie constructive des champs, pour l'étude des systèmes dynamiques, en théorie de la turbulence et dans bien d'autres domaines de la physique. La difficulté principale dans l'utilisation de cette méthode est la dérivation de la transformation de renormalisation, c'est pourquoi Migdal et Kadanoff ont cherché à développer une méthode systématique pour résoudre approximativement ce problème. Bien que leur méthode ait l'avantage de fournir une expression explicite pour la transformation de renormalisation, la qualité de leur approximation semble être assez mauvaise dans la région critique.

Il est cependant bien connu que pour certains modèles sur des réseaux dits diamantés, la transformation de Migdal - Kadanoff est exacte. On peut donc obtenir pour ces modèles des résultats rigoureux dont on espère qu'ils sont qualitativement semblables aux résultats correspondants pour des réseaux plus réalistes. Plusieurs travaux ont déjà été consacrés dans cette optique à l'étude de la percolation, de l'équation de Schrodinger aléatoire et à des modèles de verres de spin. C'est à ce problème que nous nous sommes récemment intéressés ([C.E], [C.E.G.M.1], [C.E. G.M.2]) et dont quelques résultats vont être exposés dans la suite. Le chapitre II décrit la construction des deux modèles (A et B) que nous avons considérés, le chapitre III est consacré à l'étude du modèle A et le chapitre IV à l'étude du modèle B.

II. CONSTRUCTION DES MODELES ET TRANSFORMATION DE RENORMALISATION

Pour construire le réseau diamanté, nous choisissons tout d'abord un nombre $n \geqslant 2$. La construction est récursive et commence avec un réseau contenant deux sites A et B reliés par un lien. Nous transformons ce réseau en un réseau à $n+2$ sites $B_1,\ldots,B_n$, A, B, et 2n liens reliant les sites A et B aux sites $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (voir figure). Nous appliquons cette construction récursivement à tous les liens déjà formés, et après N étapes nous obtenons un réseau noté L_N.

Si $n = 2^d$, il est possible de donner une autre construction du réseau. Soit $\underline{e}$ une direction de lien dans un réseau $\mathbb{Z}^d$ (nous prendrons $\underline{e} = (1,0,0,\ldots,0)$). Soit B_N un parallélépipède de côté 2^N dans la direction $\underline{e}$, et 2^{N-1} dans les directions transverses. Soit $\underline{i}$ un point de B_N, nous supposerons que sa première coordonnée i_1 satisfait à $0 \leqslant i_1 \leqslant 2^N - 1$. Soit r le plus grand entier tel que 2^r divise i_1. L'ensemble des points $\underline{i}$ de première coordonnée i_1 est divisé en $2^{(N-r)(d-1)}$ hypercubes de dimension d-1 et de côté 2^r, et tous les points d'un même hypercube sont identifiés. Il est facile de voir que l'on obtient ainsi le réseau L_{N-1}. Nous allons maintenant décrire nos modèles A et B.

<u>Modèle A</u>. A tout site $\underline{i}$ du réseau L_N nous associons une variable de spin d'Ising $S_{\underline{i}} = \pm 1$. A chaque lien $(\underline{i},\underline{j})$ nous associons une variable aléatoire $\xi_{\underline{i},\underline{j}}$ qui est une copie indépendante d'une variable ξ donnée a priori. L'Hamiltonien $H_N(\underline{\xi}, \underline{S})$ est donné par

$$H_N(\underline{\xi},\underline{S}) = \sum_{\substack{\underline{i},\underline{j} \\ \text{plus proches} \\ \text{voisins}}} \xi_{\underline{i},\underline{j}} S_{\underline{i}} S_{\underline{j}} \quad .$$

Pour chaque configuration $\underline{\xi}$ des couplages, nous avons la loi de probabilité de Gibbs des spins qui est donnée par

$$P_{N,\beta,\xi}(\underline{S}) = Z_N(\beta, \underline{\xi})^{-1} \exp[-\beta H_N(\underline{\xi}, \underline{S})]$$

où β est la température inverse et $Z_N(\beta,\underline{\xi})$ une constante de normalisation. Les "observables physiques" sont des fonctions des variables de spin et nous nous intéressons à leurs moyennes dans la limite thermodynamique $N \to +\infty$ (notée $\langle \cdot \rangle$), le but étant d'obtenir des propriétés presque sûres par rapport aux variables $\underline{\xi}$. Nous remplacerons ce problème par le problème plus simple d'obtenir des valeurs moyennes par rapport aux variables $\underline{\xi}$.

<u>Modèle B</u> . Il est très semblable au modèle A, la différence vient du choix des couplages. Nous allons supposer pour simplifier que $n = 2^d$. Pour chaque valeur de i_1, $0 \leq i_1 \leq 2^N - 1$, nous construisons une copie η_{i_1} indépendante de ξ . Si $\underline{i}$ et $\underline{j}$ sont deux points du réseau L_N qui sont reliés par un lien, et si $\underline{i} = (i_1,\ldots)$, $\underline{j} = (i_1 + 1,\ldots)$ nous posons $\xi_{\underline{i},\underline{j}} = \eta_{i_1}$. La construction du modèle thermodynamique se poursuit comme dans le modèle A.

Il est maintenant facile de déterminer la transformation de renormalisation, c'est en quelque sorte la transformation inverse de la construction du réseau, elle fait passer d'un réseau L_{N+1} à un réseau L_N. Plus précisément, on somme sur toutes les variables $S_{\underline{i}}$ où $\underline{i}$ est un

point du réseau L_{N+1} qui n'appartient pas au réseau L_N. On obtient ainsi un nouveau modèle sur le réseau L_N. Pour simplifier l'exposé, nous allons supposer pour le moment que la température β a été incorporée dans les couplages. Il est facile de voir que grâce au choix très spécial du réseau et à la forme des couplages, la renormalisation se ramène à changer la variable alèatoire ξ qui sert à construire le modèle. La règle de renormalisation est donnée par les formules suivantes.

Modèle A . ξ étant donnée, on en construit 2n copies indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$. La variable aléatoire renormalisée $R(\xi)$ est donnée par

$$R(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\xi_j \ \mathrm{th}\xi'_j) \qquad (1) \ .$$

Modèle B . ξ étant donnée, on en construit deux copies indépendantes ξ_1 et ξ_2. La variable aléatoire renormalisée $R(\xi)$ est donnée par

$$R(\xi) = n \ \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\xi \ \mathrm{th}\xi') \qquad (2) \ .$$

Le pas suivant dans l'analyse du groupe de renormalisation consiste à étudier la suite des couplages $(\xi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ construite de la manière suivante. ξ est une variable aléatoire donnée, et on pose $\xi_o = \beta\xi$. Les ξ_p sont déterminées récursivement par

$$\xi_{p+1} = R(\xi_p)$$

Nous allons voir que suivant la valeur de β , la suite des ξ_p peut avoir un comportement asymptotique très différent. Ce phénomène est le signal d'une transition de phase et l'étude des observables physiques permet de préciser la nature des phases.
Dans toute la suite, nous allons supposer que les variables aléatoires sont de moyenne nulle (cette propriété est invariante par renormalisation).

III. ETUDE DU MODELE A

La formule (1) suggère immédiatement de considérer le cas où le nombre n est grand, on peut en effet espérer que la variable aléatoire $R(\xi)$ est très proche d'une variable gaussienne et que le problème devient plus simple. Nous allons tout d'abord donner un argument heuristique avant d'énoncer des résultats rigoureux. Supposons que la variable aléatoire ξ est presque sûrement petite.

On peut alors remplacer la formule (1) par la formule

$$R(\xi) = \sum_{1}^{n} \xi_i \, \xi'_i \quad .$$

Posons $\sigma = E(\xi^2)^{1/2}$, $\sigma' = E(R(\xi)^2)^{1/2}$, il vient facilement

$$\sigma' = n^{1/2} \, \sigma \quad .$$

Nous avons donc le comportement suivant pour la variable aléatoire $\xi_p = R^p(\xi_o)$:

i) Si $\sigma_o (= E(\xi_o^2)^{1/2}) < n^{-1/2}$, alors $\sigma_p (= E(\xi_p^2)^{1/2}) \to 0$, ce qui implique $\xi_p \to 0$ p.s., et nous sommes dans la phase à haute température.

ii) Si $\sigma_o > n^{-1/2}$, $\sigma_p \to +\infty$, et notre approximation n'est plus valable.

iii) Si $\sigma_o = n^{-1/2}$, $\sigma_p = n^{-1/2}$ $\forall p$, et nous avons un point fixe (au niveau de la variance). De plus

$$\left.\frac{d\sigma'}{d\sigma}\right|_{\sigma = n^{-1/2}} = 2,$$

c'est à dire que l'exposant critique est Log 2.

Si nous réintroduisons explicitement la température, nous avons $\sigma_o = \beta E(\xi^2)^{1/2}$ et nous obtenons une transition de phase pour $\beta = n^{-1/2} E(\xi^2)^{-1/2}$.

L'argument heuristique précédent sert de guide à l'approche rigoureuse du problème, et nous allons maintenant énoncer les principaux résultats. Pour simplifier l'exposé, nous allons supposer les variables aléatoires symétriques.Considérons tout d'abord le cas à haute température (β grand).

<u>Théorème 1</u> <u>Soit</u> ξ <u>une variable aléatoire de moyenne nulle, symétrique et de variance</u> 1. <u>Si</u> $\beta < (50n)^{-1/2}$, <u>alors</u>

$$E[(R^p(\beta\xi))^2] \leqslant 2^{-p}/50n \quad \forall p.$$

La preuve est élémentaire et repose sur l'inégalité (voir [C.E.])

$$|th^{-1}(thx\ thy)|^2 \leqslant 25x^2\ y^2.$$

Ce théorème nous apprend que pour β petit, la renormalisation entraîne les couplages vers zéro, c'est-à-dire vers la phase à haute température, ce qui n'a rien d'étonnant. Nous allons considérer maintenant le cas des grandes valeurs de β .

Théorème 2 Soit ξ une variable aléatoire réelle, de moyenne nulle, symétrique, et de variance non nulle. Soit ξ' une copie indépendante de ξ et posons

$$Q = E(\mathrm{Inf}(\xi^2, \xi'^2)/8).$$

Il existe un nombre $N_o = N_o(Q) > (320)^2$ tel que si β est assez grand et $n > N_o$, la suite de variables aléatoires ξ_p donnée par $\xi_p = R^p(\beta\xi)$ a les propriétés suivantes :

1) $\sigma_p = E(\xi_p^2)^{1/2} > (n^{1/2}/320)^p \beta Q^{1/2}$ (i.e. $\sigma_p \to +\infty$).

2) Si la densité de probabilité de ξ est dans L_∞ , ξ_p a aussi une densité de probabilité f_p, et elle satisfait à l'inégalité

$$|f_p(x) - (2\pi\sigma_p^2)^{-1/2} \exp(-x^2/2\sigma_p^2)| \leqslant K\ \sigma_p^2\ n^{-1/2}/(\sigma_p + |x|)^{3/2}$$

pour tout nombre réel x, et où K est une constante universelle.

La preuve de ce théorème repose sur l'idée déjà mentionnée que la variable aléatoire ξ_p est presque une variable gaussienne. Une version quantitative de cette affirmation est fournie par l'inégalité de Berry - Esseen [P]. Si ξ_p est presque une variable aléatoire gaussienne, il est

facile d'utiliser la formule (1) pour donner une borne inférieure pour la variance de $R(\xi_p)$ en fonction de la variance de ξ_p. Ceci conduit au 1) du théorème. Malheureusement ce premier énoncé ne suffit pas pour affirmer que la suite ξ_p tend vers l'infini presque sûrement. On obtient ce résultat en faisant une hypothèse supplémentaire sur la loi de probabilité, un énoncé possible est donné par le 2) du théorème. Nous renvoyons le lecteur à l'article [CE] pour les détails de la preuve.

Nous allons maintenant considérer le problème plus délicat du comportement critique. Nous nous limiterons au cas des variables aléatoires ξ ayant une densité f. Si n est grand, le résultat approché nous conduit à penser que cette densité doit être proche d'une Gaussienne. Nous allons donc chercher un point fixe de R qui dans une certaine échelle s'écrit :

$$(2\pi s)^{-1/2} \exp(-x^2/2s) + \varphi(x)$$

où φ est une fonction petite qui satisfait à

$$\varphi \in L_\infty \ , \ \int x^8 |\varphi(x)|^2 \, dx < +\infty \ , \quad \text{et} \quad \int \varphi(x) \, dx = \int x^2 \varphi(x) \, dx = 0 \quad .$$

Il est commode d'écrire R sous la forme d'une composition de deux opérations, $R = R_2 \circ R_1$ où R_1 correspond au terme en th^{-1}, et R_1 à la sommation de n variables aléatoires indépendantes. Plus précisément, si f est la densité de ξ , la densité de $R_1(\xi)$ que nous noterons $R_1(f)$ est donnée par

$$R_1(f)(x) = (1-\mathrm{th}^2 x) \int dy\, |y|^{-1} (1-y^2)^{-1} (1-y^2(\mathrm{th}x)^2)^{-1} f(\mathrm{th}^{-1} y) f(\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}x(y))).$$

Si η est une variable aléatoire de densité g, il est bien connu que la densité $R_2(g)$ de $R_2(\eta)$ est donnée par

$$R_2(g) = g * g * \ldots * g \text{ (n fois)}.$$

Il est remarquable que si la densité f de ξ est proche d'une gaussienne (dans le sens ci-dessus), la fonction $R_1(f)$ en est très éloignée. Cette fonction a en particulier une singularité à $x = 0$. Par contre l'opérateur R_2 contracte si fortement vers le sous espace des fonctions gaussiennes que $R_2 \circ R_1(f)$ appartient presque à cet espace. Comme nous l'avons vu dans l'argument simplifié, il suffit alors d'ajuster la variance pour avoir un point fixe. Le théorème s'énonce plus simplement après un changement d'échelle (qui dépend de n). Nous noterons M le nouvel opérateur qui se déduit de R par cette transformation. Dans cette nouvelle échelle, le point fixe gaussien correspondant à $n = +\infty$ à une variance égale à 1. Si n est fini, nous décomposons le point fixe en une partie gaussienne de variance S (proche de 1) et une déviation φ (de moyenne et variance nulles). La topologie sur φ est donnée par la norme

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{L\infty} + (\int x^8 |\varphi|^2(x)\, dx)^{1/2} \quad .$$

Une densité de probabilité proche d'une gaussienne est donc décrite par une couple (s,φ) et nous utilisons l'espace H de ces couples avec la norme

$$\|(s,\varphi)\|_H = |s-1| + \|\varphi\|$$

On a alors le théorème suivant (voir [C.E.]).

Théorème 3 Soit $B = \{(s,\varphi) \in H \mid \|(s,\varphi)\|_H \leqslant (\log n)^{10}/n\}$. La transformation M de B dans H a un point fixe unique (s_o,φ_o) dans B pour n grand. De plus

$$s_o = 1 + \mathcal{O}((\log n)^{10}/n)$$

$$\varphi_o = \mathcal{O}((\log n)^{10}/n) .$$

L'opérateur linéaire $DM_{(s_o,\varphi_o)}$ a une valeur propre simple égale à $2 + \mathcal{O}(n^{-1/2})$, le reste du spectre est contenu dans le disque unité ouvert.

Ce résultat permet d'appliquer la méthode habituelle du groupe de renormalisation (variétés stables et instables, indices critiques). La dernière étape de l'analyse consiste à déduire des conséquences physiques des résultats précédents. La méthode permet d'étudier certaines observables du type spin moyen ou corrélation. Si E désigne l'espérance par rapport aux couplages nous avons le résultat suivant (transition du paramètre d'Edwards-Anderson).

Théorème 4 Sous les conditions du théorème 2 nous avons

i) $E(\langle s \rangle) = 0$ pour toute température

ii) $E(\langle s \rangle^2) = \begin{cases} 0 & \text{à haute température} \\ \neq 0 & \text{à basse température.} \end{cases}$

La preuve de ce résultat est basée sur une relation de récurrence des moyennes des observables vis-à-vis de la renormalisation. Plus précisément si A et B sont des constantes, si S_o est un spin du réseau L_N mais pas du réseau L_{N-1} et si S'_o est un site voisin du réseau L_{N-1}, on a

$$<AS_o + BS'_o>_{L_N} = <A'S'_o + B'S'_1>_{L_{N-1}}$$

où S'_1 est un spin du réseau L_{N-2} voisin de S'_o, et

$$A' = B + AX(1-X'^2)(1-X^2 X'^2)^{-1} \quad , \quad B' = AX'(1-X^2)(1-X^2 X'^2)^{-1}$$

où X et X' sont des copies indépendantes de la variable aléatoire th ξ .
En utilisant ce résultat, on obtient finalement

$$< S_o >_{L_N} = A_N S_N + B_N S'_N$$

où S_N et S'_N sont les spins sur les sites extrêmes du réseau. Les constantes A_N et B_N sont des expressions très compliquées en terme des couplages, mais le comportement de ces variables aléatoires quand N tend vers l'infini peut être analysé et conduit au théorème 4 (voir [C.E.]).

IV. ETUDE DU MODELE B

Ce modèle semble être beaucoup plus difficile à étudier que le modèle A. Nous allons tout d'abord donner une formulation un peu plus maniable de l'itération. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans [-1, 1] (nous supposerons X symétrique et moyenne nulle), nous définissons R(X) par

$$R(X) = q(XX')$$

où X' est une copie identique et indépendante de X et où q est donnée par

$$q(s) = \mathrm{th}(n\ \mathrm{th}^{-1}(s)) \quad .$$

Cette formulation est équivalente à celle du paragraphe II par le changement de variable $X = \mathrm{th}\,\xi$.

On pose $X_o = \mathrm{th}\,\beta\xi$, et $X_p = R^p(X_o)$. Il faut maintenant étudier le comportement de la suite de variables aléatoires (X_p) pour p tendant vers l'infini. Le premier résultat montre l'existence de transitions de phase pour certaines variables aléatoires ξ .

<u>Théorème 5</u> <u>Supposons qu'il existe un nombre</u> $c > 0$ <u>tel que</u>

$$c \leqslant |\xi| \leqslant c^{-1} \quad \text{p.s.}$$

<u>Alors</u>

i) <u>A haute température</u> (β <u>petit</u>) $R^p(X_o) \to 0$ p.s.

ii) <u>A basse température</u> (β <u>grand</u>) $|R^p(X_o)| \to 1$ p.s.

Ce résultat suit immédiatement de la remarque suivante. Si $0 < a < b < 1$,

$$q([a,b]^2) \subset [q(a^2),\ q(b^2)] \quad .$$

La transformation $s \to q(s^2)$ a deux points fixes stables $s = 0$ et $s = 1$ dont les bassins d'attraction sont séparés par un unique point fixe instable. L'analyse des phases à haute et basse température se fait maintenant comme dans le modèle A (voir [CEGM1]). L'analyse du comportement critique semble être beaucoup plus difficile (voir [CEGM1] pour quelques résultats). Ceci nous a amené à introduire un problème approximé (plus

simple) de la manière suivante. Nous remplaçons les densités de probabilité par des densités constantes sur les ensembles $[-2^{-q}, -2^{-q-1}[\cup]2^{-q-1}, 2^{-q}]$, et soit a_q la valeur de cette nouvelle densité. Nous noterons $g(z)$ la fonction génératrice de la série $2^{-q} a_q$, c'est-à-dire

$$g(z) = \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q} a_q z^q$$

Cette fonction est holomorphe dans le disque unité, et elle a des coefficients de Taylor positifs en $z = 0$. Elle vérifie de plus $g(1) = 1$. La renormalisation approchée S est donnée par

$$S(g)(z) = g(0)^2 + (g(z)^2 - g(0)^2)/z.$$

Il est facile de vérifier que $S(g)$ a les mêmes propriétés d'analyticité que g (y compris $S(g)(1) = 1$). Dans l'espace de fonctions analytiques considéré, S a trois points fixes : $g=1$, $g(z)=z$ et "$g=z^{\infty}$" ($g(z)=0$ si $|z| < 1$, $g(z)=\infty$ si $|z| > 1$). Le comportement global des itérations de S est donné dans le théorème suivant (voir [CEGM2]) .

<u>Théorème</u> 6 <u>Soit</u> g <u>une fonction holomorphe dans le disque unité</u>, à <u>coefficients de Taylor en zéro positifs et satisfaisant à</u> $g(1)=1$. <u>Alors</u>

1) <u>Si</u> g <u>ne s'étend pas en une fonction holomorphe jusqu'à</u> $z=2$, <u>ou si</u> $g(2) - 2g'(2) < 0$, <u>alors</u> $S^q(g)(z) \to z^{\infty}$ <u>si</u> $q \to +\infty$.
2) <u>Si</u> $g(2) - 2g'(2) > 0$, <u>ou</u> $g(2) - 2g'(2) = 0$ <u>mais</u> g <u>n'est pas la fonction</u> $g(z) = z$, <u>alors</u> $S^q(g) \to 1$ <u>si</u> $q \to +\infty$.

Il s'agit là d'un comportement très inhabituel pour le groupe de renormalisation. La surface invariante $g(2) - 2g'(2) = 0$ joue le rôle d'une surface critique, mais les modèles qui s'y trouvent sont déjà dans la phase à basse température. En particulier ce modèle n'a pas d'indices critiques. Nous conjecturons que le modèle B a les mêmes propriétés.

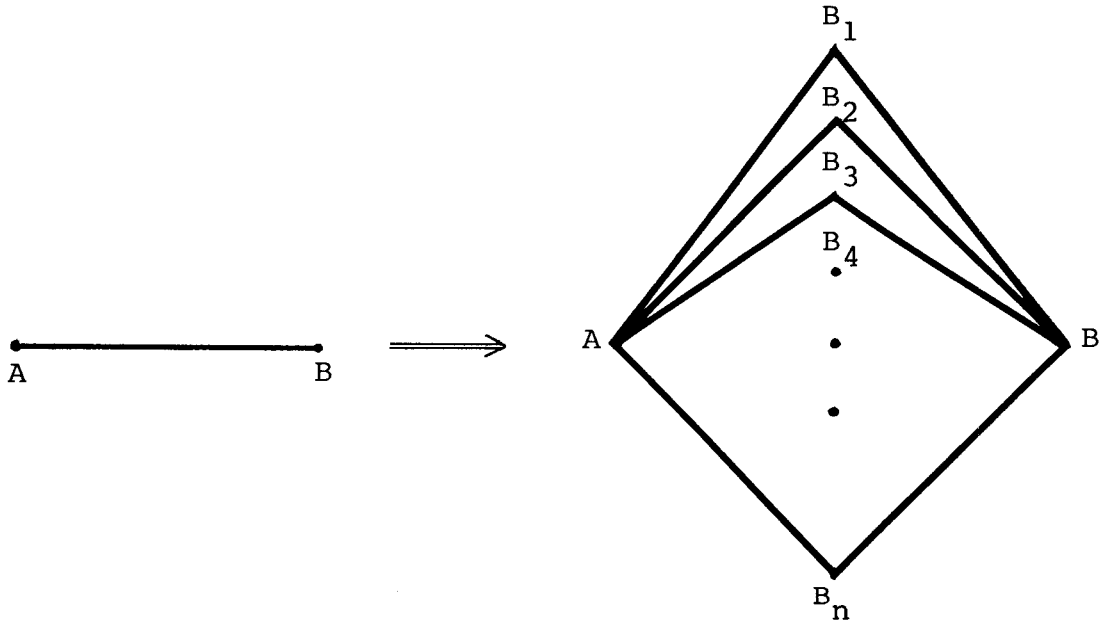
REFERENCES

[C.E] P. Collet, J-P. Eckmann, A spin glass model with random couplings. Comm. Math. Phys. 93, 379-407 (1984).

[C.E.G.M.1] P. Collet, J-P. Eckmann, Y. Glaser, A. Martin, A spin glass with random couplings. Journ. Stat. Phys. à paraître.

[C.E.G.M.2] P. Collet, J-P. Eckmann, Y. Glaser, A. Martin, Study of the iterations of a mapping associated to a spin glass model. Comm. Math. Phys. 94, 3 (1984) 353-370, et RCP 25 volume 33 (1984).

[P] V.V. Petrov, Sums of independent random variables Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1975).



Construction du réseau