Jean-Louis Koszul

Sur le faisceau d'un groupe de Lie gradué et certaines représentations linéaires de son algèbre de Lie

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1982, tome 30
« Conférences de : P. Moussa, J. Fröhlich, J.L. Koszul, P.A. Meyer, M. Sirugue », ,
exp. n° 4, p. 115-125
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1982__30__115_0>

Institut Fourier
Université de Grenoble I

SUR LE FAISCEAU D'UN GROUPE DE LIE GRADUE ET CERTAINES REPRESENTATIONS LINEAIRES DE SON ALGEBRE DE LIE

par Jean-Louis KOSZUL

1. Un groupe de Lie gradué (ou super-groupe de Lie) au sens de B. Kostant ([2]) est formé par un groupe de Lie G_o et un faisceau $\mathcal{a}$ de $\mathbb{R}$-algèbres graduées commutatives sur G_o , les degrés étant dans $\mathbb{Z}/(2)$. L'algèbre de Lie de $(G_o,\mathcal{a})$ est une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o + \mathfrak{g}_1$, où $\mathfrak{g}_o$ est l'algèbre de Lie de G_o . On notera $E(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'algèbre graduée quotient de l'algèbre tensorielle $\otimes\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$x \otimes y - (-1)^{pq} y \otimes x - [x,y] ,$$

où $x,y \in \mathfrak{g}$ sont respectivement de degrés $p,q \in \mathbb{Z}/(2)$. Pour tout ouvert U de G_o , l'algèbre $\mathcal{a}(U)$ est un bimodule sur $E(\mathfrak{g})$: on a sur $\mathcal{a}(U)$ une structure de module à gauche et une structure de module à droite sur $E(\mathfrak{g})$ telles que $(u\varphi)v = u(\varphi v)$ quels que soient $u,v \in E(\mathfrak{g})$ et $\varphi \in \mathcal{a}(U)$.

L'exemple le plus classique de cette situation est celui du super-groupe de Lie (G_o,Ω) où Ω est le faisceau des formes différentielles sur G_o . L'algèbre de Lie de (G_o,Ω) est $\mathfrak{g} = \Delta\otimes\mathfrak{g}_o$, où Δ est l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des nombres duaux graduée mod 2 : $\Delta = \mathbb{R} + \mathbb{R}e$ avec $e^2 = 0$ et $dg(e) = 1$. Soient R_a (resp. L_a) les champs de vecteurs invariants à droite (resp. à gauche) sur G_o ayant a pour valeur en l'élément neutre. Pour tout ouvert U de G_o, la structure de $E(\mathfrak{g})$ module à gauche sur $\Omega(U)$ est définie par

$$(1 \otimes a)\omega = \theta(R_a)\omega ,$$
$$(e \otimes a)\omega = i(R_a)\omega ,$$

où $\theta(X)$ et $i(X)$ désignent respectivement la dérivation de Lie et la dérivation produit intérieur par rapport à un champ X. De même, la structure de $E(\mathfrak{g})$-module à droite est définie par

$$\omega(1 \otimes a) = + \theta(L_a)\omega$$
$$\omega(e \otimes a) = - (-1)^{dg(\omega)} i(L_a)\omega ,$$

pour tout $a \in \mathfrak{g}_o$ et tout $\omega \in \Omega(U)$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o + \mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{R}$ et soit G_o un groupe de Lie ayant $\mathfrak{g}_o$ pour algèbre de Lie. En général, il n'existe pas de groupe de Lie gradué ayant G_o pour variété sous-jacente et $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie. Néanmoins, on peut associer à $(G_o, \mathfrak{g})$ une variété graduée $(G_o, \mathcal{A})$ telle que pour tout ouvert U de G_o, l'algèbre $\mathcal{A}(U)$ possède une structure de $E(\mathfrak{g})$-module à gauche et une structure de $E(\mathfrak{g}_o)$-module à droite. Si il existe un groupe de Lie gradué $(G_o, \mathcal{B})$ ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie, les variétés graduées $(G_o, \mathcal{B})$ et $(G_o, \mathcal{A})$ sont canoniquement isomorphes (cf. N° 2).

On se propose dans ce papier de présenter une construction du faisceau $\mathcal{A}$ associé à G_o et $\mathfrak{g}$. Soient U un ouvert de G_o et $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$ la sous-algèbre des éléments de $\mathcal{A}(U)$ invariants à droite par $\mathfrak{g}_o$. Si U est connexe, $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ des formes alternées sur $\mathfrak{g}_1$ (cf. B. Kostant, [2] Remarque 3.6). Au numéro 3, on calcule les dérivations de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ qui définissent la structure de $E(\mathfrak{g})$-module à gauche des $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$. On explicite dans quelques exemples les sous-modules de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ que l'on peut associer aux $\mathfrak{g}_o$-sous-modules de $\mathfrak{g}_1$.

2. CONSTRUCTION DU FAISCEAU $\mathfrak{a}$ DEFINI PAR G_o ET $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o + \mathfrak{g}_1$.

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o + \mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie graduée de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et G_o un groupe de Lie ayant $\mathfrak{g}_o$ pour algèbre de Lie. On note $\mathcal{F}$ le faisceau des fonctions numériques de classe C^∞ sur G_o . Pour tout ouvert U de G , $\mathcal{F}(U)$ est un bimodule sur l'algèbre enveloppante $E(\mathfrak{g}_o)$ dont la structure est définie par les dérivées de Lie

$$af = R_a \cdot f \quad , \qquad fa = L_a \cdot f$$

pour tout $a \in \mathfrak{g}_o$ et tout $f \in \mathcal{F}(U)$ (R_a et L_a étant respectivement les champs de vecteurs invariants à droite et à gauche sur G_o ayant a pour valeur en l'élément neutre). L'injection $\mathfrak{g}_o \to \mathfrak{g}$ se prolonge en un homomorphisme injectif de $E(\mathfrak{g}_o)$ dans $E(\mathfrak{g})$. On identifiera $E(\mathfrak{g}_o)$ et son image dans $E(\mathfrak{g})$ qui est ainsi un bimodule sur $E(\mathfrak{g}_o)$. Pour tout ouvert U de G_o , soit $\mathfrak{a}(U)$ l'espace des homomorphismes de $E(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{F}(U)$ considérés comme $E(\mathfrak{g}_o)$-modules à gauche. L'espace $\mathfrak{a}(U)$ est gradué (mod 2) :

$$\mathfrak{a}(U)_p = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_o}(E(\mathfrak{g})_p, \mathcal{F}(U)) \qquad (p=0,1) \ .$$

Le produit dans $\mathcal{F}(U)$ et le coproduit $E(\mathfrak{g}) \to E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{g})$ définissent sur $\mathfrak{a}(U)$ une structure d'algèbre graduée commutative.

Précisons que l'on définit le produit dans $\mathfrak{a}(U)$ en prenant pour accouplement

$$(\mathfrak{a}(U) \otimes \mathfrak{a}(U) \ , \ E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{g})) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

l'application

$$(\varphi \otimes \psi \ , \ u \otimes v) \longmapsto (-1)^{dg(\psi)dg(u)} \varphi(u)\psi(v) \ .$$

[cf. [2], p. 200].

La même règle sera respectée dans la suite toutes les fois que l'on prendra le dual d'une cogèbre graduée et en particulier le dual d'une algèbre extérieure.

Pour tout ouvert $U \subset G_o$, l'application $\nu_U : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{F}(U)$ définie par $\nu_U(\varphi) = \varphi(1)$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}(U)$ dans l'algèbre $\mathcal{F}(U)$. Il est clair que les $\mathcal{A}(U)$ sont un faisceau d'algèbres graduées sur G_o et que les ν_U sont un morphisme surjectif $\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$.

On va maintenant préciser la structure des $\mathcal{A}(U)$. Pour tout entier $n \geq 0$, soit γ^n la forme n-linéaire alternée sur $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $E(\mathfrak{g})$ définie par

$$\gamma^n(x_1,\dots x_n) = \sum_{\tau\in G(n)} sg(\tau)x_{\tau(1)}\dots x_{\tau(n)}$$

pour toute suite $x_1,\dots x_n$ dans $\mathfrak{g}_1$. Il existe une application linéaire Γ de l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{g}_1)$ dans $E(\mathfrak{g})$ et une seule telle que

$$\Gamma(x_1 \wedge\dots x_n) = \frac{1}{n!}\gamma^n(x_1,\dots x_n) .$$

Si $\underline{p}$ est la classe de p mod 2 , $\Gamma(\Lambda^p(\mathfrak{g}_1)) \subset E(\mathfrak{g})_{\underline{p}}$.

Compte-tenu de la version graduée du Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ([3]), l'application $(u,v) \mapsto u\Gamma(v)$ de $E(\mathfrak{g}_o) \times \Lambda(\mathfrak{g}_1)$ dans $E(\mathfrak{g})$ définit un isomorphisme canonique de $E(\mathfrak{g}_o) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)$ sur $E(\mathfrak{g})$. Cet isomorphisme est visiblement compatible avec les structures de $E(\mathfrak{g}_o)$-modules à gauche. Par conséquent, $\mathcal{A}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_o}(E(\mathfrak{g}),\mathcal{F}(U))$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_R(\Lambda(\mathfrak{g}_1),\mathcal{F}(U))$. On sait d'autre part que $\Gamma : \Lambda(\mathfrak{g}_1) \to E(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme de cogèbres ; par suite, <u>l'algèbre graduée</u> $\mathcal{A}(U)$ <u>est canoniquement isomorphe à</u> $\mathcal{F}(U) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ où $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est l'algèbre des formes alternées sur $\mathfrak{g}_1$ à valeurs scalaires. Plus précisément, le produit dans $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est l'opposé du produit extérieur habituel des formes alternées. Le faisceau $\mathcal{A}$ étant ainsi canoniquement isomorphe au faisceau $\mathcal{F} \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)'$, $(G_o,\mathcal{A})$ est une variété graduée de dimension $(\dim \mathfrak{g}_o , \dim \mathfrak{g}_1)$. On observera que $\mathcal{A}$ est un faisceau d'algèbres graduées en $\mathbb{Z}$ et non pas seulement en $\mathbb{Z}/(2)$.

Pour tout ouvert $U \subset G$, $\mathcal{A}(U)$ possède une structure de $(E(\mathfrak{g}),E(\mathfrak{g}_o))$-bimodule déterminée par les relations :

$$(x\varphi)(u) = (-1)^{dg(x)}\varphi(ux) \ ,$$
$$(\varphi a)(u) = L_a \cdot \varphi(u) \ ,$$

où $\varphi \in \mathcal{A}(U)$, $x \in \mathfrak{g}$ et $a \in \mathfrak{g}_o$. Si $x \in \mathfrak{g}_i$, l'application $\varphi \mapsto x\varphi$ est une dérivation dont le degré mod 2 est défini et égal à i ; cette dérivation sera notée $r(x)$. Si $a \in \mathfrak{g}_o$, l'application $\varphi \mapsto \varphi a$ est une dérivation dont le degré en $\mathbb{Z}$ est défini et égal à 0.

Si il existe un groupe de Lie gradué $(G_o, \mathcal{B})$ ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie, alors $(G_o, \mathcal{B})$ et $(G_o, \mathcal{A})$ sont des variétés graduées canoniquement isomorphes. Mais en général la structure du faisceau $\mathcal{A}$ construit plus haut est moins riche que celle que l'on trouve dans le faisceau d'un groupe gradué. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe gradué ayant G_o pour variété sous-jacente, il existe une représentation linéaire Ad de G_o dans $\mathfrak{g}$ telle que $Ad(\exp(ta))x = x + t[a,x] + t^2 \ldots$ pour tout $a \in \mathfrak{g}$. Inversement, la donnée d'une telle représentation linéaire de G_o dans $\mathfrak{g}$ détermine sur $(G_o, \mathcal{A})$ une structure de groupe gradué. Le prolongement de cette représentation linéaire à $E(\mathfrak{g})$ permet de définir le morphisme produit $(G_o, \mathcal{A}) \times (G_o, \mathcal{A}) \to (G_o, \mathcal{A})$ et le morphisme antipode $(G_o, \mathcal{A}) \to (G_o, \mathcal{A})$. L'antipode détermine sur les algèbres $\mathcal{A}(U)$ une structure de module à droite sur $E(\mathfrak{g})$ qui prolonge la structure de $E(\mathfrak{g}_o)$-module à droite définie plus haut. Ce qui suit ne fera pas intervenir des structures de groupes gradués, mais seulement la structure de la variété graduée $(G_o, \mathcal{A})$.

3. LES MODULES $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$.

Si U est un ouvert connexe de G_o les éléments $\varphi \in \mathcal{A}(U)$ tels que $\varphi a = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{g}_o$ sont les homomorphismes $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}_o}(E(\mathfrak{g}), \mathcal{F}(U))$ tels que pour tout $u \in E(\mathfrak{g})$, $\varphi(u)$ soit une fonction constante. Ils forment une sous-algèbre $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$ de $\mathcal{A}(U)$ égale à $Hom_{\mathfrak{g}_o}(E(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$. Puisque $\mathbb{R}$ est le $E(\mathfrak{g}_o)$-module trivial, $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$ s'identifie à l'espace des formes linéaires sur $E(\mathfrak{g})$ qui sont nulles sur l'idéal à droite $\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g}) \subset E(\mathfrak{g})$. En d'autres termes, le $E(\mathfrak{g})$-module $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$ s'identifie au dual du $E(\mathfrak{g})$-module à droite induit :

$\mathbb{R} \underset{E(\mathfrak{g}_o)}{\otimes} E(\mathfrak{g}) = E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g})$.

Puisque $E(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $E(\mathfrak{g}_o) \otimes (\Lambda \mathfrak{g}_1)$, $E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\Lambda(\mathfrak{g}_1)$ et $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_o}$ est donc canoniquement isomorphe à $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$. Cet isomorphisme est compatible avec les structures d'algèbres graduées.

On va expliciter la structure de $E(\mathfrak{g})$-module à droite de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)$ identifié à $E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g})$.

LEMME 1. - <u>Pour tout</u> $a \in \mathfrak{g}_o$ <u>et toute suite</u> $x_1,\dots x_p \in \mathfrak{g}_1$ <u>on a</u> :

$\gamma^p(x_1,\dots x_p)a = \sum_i \gamma^p(x_1,\dots [x_i,a],\dots x_p) \mod \mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g})$.

Cela résulte facilement des relations $x_i a = a x_i + [x_i, a]$.

Le calcul de $\gamma^p(x_1,\dots x_p)y$ pour y dans $\mathfrak{g}_1$ qui va suivre est plus compliqué. On conviendra de noter $\alpha.\beta$ le produit extérieur de deux formes alternées $\alpha.\beta$ sur $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $E(\mathfrak{g})$. Ainsi $\gamma^p = \gamma.\gamma\dots\gamma$ (p fois) où γ est l'injection canonique de $\mathfrak{g}_1$ dans $E(\mathfrak{g})$. On pose $\varphi_y^o = y$, et on considère φ_o comme une forme de degré 0 sur $\mathfrak{g}_1$. De proche en proche, on définit

(1) $\qquad \varphi_y^p = \varphi_y^{p-1}.\psi + \psi.\varphi_y^{p-1}$.

Ainsi, $\varphi_y^1(x) = yx + xy = [x,y]$.

La relation (1) donne :

$$\varphi_y^p(x_1,\dots x_p) = \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i+1}[x_i.\varphi_y^{p-1}(x_1,\dots \hat{x}_i,\dots x_p)] .$$

Par induction sur p, on obtient :

$$\varphi_y^p(x_1\dots x_p) = \sum_{\tau\in G(p)} sg(\tau)[x_{\tau(1)},[x_{\tau(2)},\dots[x_{\tau(p)},y]\dots]] .$$

On observera que φ_y^p est à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$ pour p pair et à valeurs dans $\mathfrak{g}_o$ pour p impair.

Soit ψ une forme alternée de degré p sur $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$. On lui associe une dérivation (produit intérieur) $i(\psi)$ de degré $p-1$ dans l'algèbre des formes alternées sur $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $E(\mathfrak{g})$ en posant :

$$(i(\psi)\alpha)(x_1,\dots x_{p+q}) =$$
$$= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}(p.q)} sg(\tau)\alpha(\psi(x_{\tau(1)},\dots x_{\tau(p)}),x_{\tau(p+1)},\dots x_{\tau(p+q)})$$

pour toute forme α de degré $q+1$ et toute suite $x_1,\dots x_{p+q}\in\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{S}(p,q)$ désignant l'ensemble des permutations de $[1,p+1]$ croissantes sur $[1,p]$ et sur $[p+1,q]$.

LEMME 2. - <u>Pour tout</u> $p>0$,

$$\gamma^{2p}.\varphi_y^o = \frac{1}{2p+1}\, i(\varphi_y^o)\,\gamma^{2p+1} - \sum_{i=1}^{i=p} 2^{2i} b_{2i}\, i(\varphi_y^{2i})\,\gamma^{2p-2i+1}$$

<u>modulo</u> $\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g})$, <u>les coefficients</u> b_{2i} <u>étant les nombres de Bernoulli</u> $\left(\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^{-1} = \sum \frac{1}{r!} b_r t^r\right)$.

<u>Démonstration</u>. - On vérifie que, pour tout $p>0$,

(2) $$\gamma^p.\varphi_y^o = \varphi_y^p - \binom{p}{1}\varphi_y^{p-1}.\gamma + \dots (-1)^i\binom{p}{i}\varphi_y^{p-i}.\gamma^i + (-1)^p\varphi_y^o.\gamma^p .$$

(3) $$i(\varphi_{2r})\gamma^{p+1} = \binom{p+1}{1}\varphi_y^{2r}.\gamma^p - \binom{p+1}{2}\varphi_y^{2r+1}.\gamma^{p-1} + \dots (-1)^p\varphi_y^{2r+p} .$$

Pour $p-i$ impair, $\varphi_y^{p-i}.\gamma^i$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g})$. On retranche du second membre de (2) une combinaison linéaire

$$\lambda_o^{2p} i(\varphi_y^o)\gamma^{2p+1} + \lambda_2^{2p} i(\varphi_y^2)\gamma^{2p-1} + \dots \lambda_{2p}^{2p} i(\varphi_y^{2p})\gamma$$

de manière à annuler les termes en $\varphi_y^{2p-i}.\gamma^i$ pour i pair. Compte-tenu de (3), cette condition est vérifiée si et seulement si les λ_{2i}^{2p} sont solution du système linéaire :

$$\binom{2p+1}{1}\lambda_o^{2p} = 1 ,$$

$$\binom{2p+1}{3}\lambda_o^{2p} + \binom{2p-1}{1}\lambda_2^{2p} = \binom{p}{p-2} ,$$

. . . .

$$\binom{2p+1}{2p+1}\lambda_o^{2p} +\dots \binom{2p-2i}{2p-2i}\lambda_{2i}^{2p} +\dots \binom{1}{1}\lambda_{2p}^{2p} = \binom{2p}{0} .$$

La solution de ces équations est :

$$\lambda_o^{2p} = \frac{1}{2p+1} , \qquad \lambda_{2i}^{2n} = \frac{2^{2i}}{(2i)}b_{2i}\binom{2n}{2i-1}$$

pour $1 < i \leq n$.

On observe que la forme $i(\varphi_{2i})\gamma^{2p-2i+1}$ est à valeurs dans l'image par Γ de $\Lambda^{2p-2i+1}(\mathfrak{g}_i)$. Par suite :

LEMME 3. - *Quels que soient* $x_1,\dots x_{2p}$,

$$\gamma_{2p}(x_1,\dots x_{2p})y = 2^{2p}b_{2p}\varphi_y^{2p}(x_1,\dots x_{2p})$$

modulo $\mathfrak{g}_o U(\mathfrak{g}) + \Gamma \sum_{r>0} \Lambda^r(\mathfrak{g}_1)$.

On peut maintenant calculer la représentation linéaire r de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ qui correspond à sa structure de $E(\mathfrak{g})$-module à gauche. On sait que pour $z \in \mathfrak{g}_i$, $r(z)$ est une dérivation de degré i , mod 2 . Il suffit donc de calculer $r(z)f$ où $f \in \mathfrak{g}_1'$ est une forme de degré 1 : c'est ce que donnent les lemmes 1 et 3 .

PROPOSITION. - *Si* $a \in \mathfrak{g}_o$ *la dérivation* $r(a)$ *de* $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ *est définie par*

$$(r(a)f)(x) = -f([a,x]) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}_1 \text{ et tout } f \in \mathfrak{g}_1' .$$

Si $y \in \mathfrak{g}_1$, $r(y)$ *est une dérivation de* $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ *de degré* 1 *modulo* 2 . *Pour tout* $f \in \mathfrak{g}_1'$, *la composante de degré* 0 *de* $r(y)f$ *est* $-y$. *Si* $p \geqslant 1$, *la composante de degré* $2p$ *de* $r(y)f$ *est donnée par*

$$(r(y)f)(x_1,\dots x_{2p}) = -\frac{2^{2p}}{2p!}b_{2p}\varphi_y^{2p}(x_1,\dots x_{2p}) .$$

COROLLAIRE. - <u>Pour tout</u> $y \in \mathfrak{g}_1$,

$$r(y) = -i(y) - \sum_{p\geq 1} \frac{2^{2p}}{2p!} b_{2p} i(\varphi_y^{2p})$$

<u>où</u> $i(\varphi_y^j)$ <u>désigne la dérivation de</u> $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ <u>de degré</u> $j-1$ <u>telle que</u> $i(\varphi_y^j)f = f(\varphi_y^j)$ <u>pour tout</u> $f \in \mathfrak{g}_1'$.

On observera que si la composante de degré $2p-1$ de $r(y)$ est nulle, alors il en est de même des composantes de degré $2q-1$ pour $q>p$. Pour que $r(y)$ se réduise à la composante $-i(y)$ de degré -1 , il faut et il suffit que $\varphi_y^1 = 0$, autrement dit que $[y,\mathfrak{g}_1] = \{0\}$.

Si $n = \dim \mathfrak{g}_1$, le $E(\mathfrak{g})$-module $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est engendré par $\Lambda^n(\mathfrak{g}_1)'$. Les formes ω telles que $r(z)\omega = 0$ pour tout $z \in \mathfrak{g}$ sont les éléments de $\Lambda^\circ(\mathfrak{g}_1)' = k$.

4. <u>SOUS-ALGEBRES DE $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ ASSOCIEES A UN $\mathfrak{g}_o$-SOUS-MODULE DE $\mathfrak{g}_1$</u>.

Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_1$ et soit $J(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{g}_o+\mathfrak{m})E(\mathfrak{g})$ l'idéal à droite de $E(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{g}_o+\mathfrak{m}$. L'image de $J(\mathfrak{m})$ par le coproduit $E(\mathfrak{g}) \to E(\mathfrak{g})\otimes E(\mathfrak{g})$ est contenue dans $J(\mathfrak{m})\otimes E(\mathfrak{g}) + E(\mathfrak{g})\otimes J(\mathfrak{m})$. Le quotient $C(\mathfrak{m}) = E(\mathfrak{g})/J(\mathfrak{m})$ est donc une cogèbre et, par factorisation, $E(\mathfrak{g}) \to C(\mathfrak{m})$ donne un homomorphisme surjectif $\lambda(\mathfrak{m}) : E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_oE(\mathfrak{g})) \to C(\mathfrak{m})$ compatible avec les structures de cogèbres et de $E(\mathfrak{g})$-module à droite. Le transposé est un homomorphisme injectif $\lambda(\mathfrak{m})'$ de l'algèbre $C(\mathfrak{m})'$ dans l'algèbre $(E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_oE(\mathfrak{g}))'$ compatible avec les structures de $E(\mathfrak{g})$-modules à gauche.

On supposera dans la suite que $\mathfrak{m}$ est un $\mathfrak{g}_o$-sous-module de $\mathfrak{g}_1$ c'est-à-dire que $[\mathfrak{g}_o,\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. On peut alors décrire comme suit la structure de $C(\mathfrak{m})'$. Soit $\mu : \mathfrak{g}_1/\mathfrak{m} \to \mathfrak{g}_1$ un relèvement de l'application $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1/\mathfrak{m}$. Son prolongement $\Lambda(\mu) : \Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m}) \to \Lambda(\mathfrak{g}_1)$ est un homomorphisme de bigèbres. Puisque $\mathfrak{g}_o + \mathfrak{m}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, le Théorème de

Poincaré-Birkhoff-Witt montre que $E(\mathfrak{g})$ est somme directe de $J(\mathfrak{m})$ et de l'image de $\Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m})$ par $\Gamma\circ\Lambda(\mu)$. Il en résulte que le composé des applications

$$\Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\Lambda(\mu)} \Lambda(\mathfrak{g}_1) \xrightarrow{\Gamma} E(\mathfrak{g}) \longrightarrow E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\lambda(\mathfrak{m})} C(\mathfrak{m})$$

est un isomorphisme de cogèbres. L'application transposée est un <u>isomorphisme de l'algèbre</u> $C(\mathfrak{m})'$ <u>sur l'algèbre de formes alternées</u> $\Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m})'$. Cet isomorphisme est compatible avec les degré mod 2 ; en général, il n'existe pas de degré en $\mathbb{Z}$ naturel sur $C(\mathfrak{m})$.

Nous supposons maintenant que $\mathfrak{g}_1$ est somme directe de deux $\mathfrak{g}_o$-sous-modules $\mathfrak{m}_{-1}$ et $\mathfrak{m}_1$ tels que $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i] = (0)$ pour $i = 1,-1$. C'est par exemple le cas si $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre simple classique de seconde espèce (cf. [1]). En posant $\mathfrak{m}_o = \mathfrak{g}_o$, les sous-espaces $\mathfrak{m}_{-1}$, $\mathfrak{m}_o$, $\mathfrak{m}_1$ définissent un degré en Z sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les homomorphismes $\lambda(\mathfrak{m}_i)' : C(\mathfrak{m}_i)' \to \Lambda(\mathfrak{g}_1)' = (E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_o E(\mathfrak{g}))'$ définissent dans ce cas un isomorphisme de $C(\mathfrak{m}_{-1})' \otimes C(\mathfrak{m}_1)'$ sur $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$. D'autre part, $E(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\Lambda(\mathfrak{m}_i)$ et de $J(\mathfrak{m}_{-i})$. On a donc un isomorphisme canonique de $\Lambda(\mathfrak{m}_i)$ sur $C(\mathfrak{m}_{-i})$ et, par transposition, un isomorphisme canonique de $C(\mathfrak{m}_{-i})'$ sur $\Lambda(\mathfrak{m}_i)'$ au moyen duquel on identifie ces deux algèbres.

Une variante simplifiée du calcul du N° 3 montre que la représentation linéaire r de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda(\mathfrak{m}_{-1})'$ qui définit sa structure de $E(\mathfrak{g})$-module à gauche est donnée par les dérivations telles que

$$\begin{aligned} & r(y)f = -f(y) , \\ (4) \qquad & (r(a)f)(x) = -f([a,x]) , \\ & (r(z)f)(x,y) = -f([x,[y,z]]) , \end{aligned}$$

quels que soient $f \in \mathfrak{m}_{-1}'$, $x,y \in \mathfrak{m}_{-1}$, $a \in \mathfrak{g}_o$, $z \in \mathfrak{m}_1$ (cf. [1], p. 58). Vis-à-vis du degré en $\mathbb{Z}$ de $\Lambda(\mathfrak{m}_{-1})'$, ces dérivations sont de degré $-1, 0$ ou 1 .

Exemple. - Soit $V = V_o + V_1$ un espace vectoriel gradué de dimension finie et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie graduée des endomorphismes de V identifiée à $V \otimes V'$. La sous-algèbre $\mathfrak{g}_o$ est somme directe de $V_o \otimes V'_o$, et de $V_1 \otimes V'_1$. Le sous-espace $\mathfrak{g}_1$ est somme directe de $\mathfrak{m}_{-1} = V_o \otimes V'_1$ et de $\mathfrak{m}_1 = V_1 \otimes V'_o$. On va calculer la représentation linéaire r de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda(\mathfrak{m}_{-1})'$. On identifie $\mathfrak{m}_{-1}'$ et $\mathfrak{m}_1$, l'accouplement étant

$$(\xi \otimes f)(x \otimes \varphi) = - f(x)\varphi(\xi)$$

pour $x \in V_o$, $\xi \in V_1$, $f \in V'_o$, $\varphi \in V'_1$. Compte-tenu des relations (4),

$$r(x\otimes\varphi)(\xi\otimes f) = f(x)\varphi(\xi) ,$$

$$r(x\otimes g)(\xi\otimes f) = - f(x)\xi\otimes g ,$$

$$r(\eta\otimes\varphi)(\xi\otimes f) = \varphi(\xi)\eta\otimes f ,$$

$$r(\eta\otimes g)(\xi\otimes f) = (\xi\otimes g)\Lambda(\eta\otimes f) ,$$

quels que soient $x \in V_o$, $f,g \in V'_o$, $\xi,\eta \in V_1$ et $\varphi \in V'_1$.

Ecrivant ξf pour $\xi\otimes f$, on a :

$$r(\xi f)(\xi f_1 \wedge \xi f_2 \wedge \ldots \xi f_n) = n\xi f \wedge \xi f_1 \wedge \ldots \xi f_n .$$

On en déduit que si $\dim V_1 = 1$, $\Lambda(\mathfrak{m}_1)/\Lambda^\circ(\mathfrak{m}_1)$ est un $E(\mathfrak{g})$-module simple. Il en est de même si $\dim V_o = 1$. On a d'autre part :

$$r(\eta f)(\xi g \wedge \xi h) - r(\eta_g)(\xi h \wedge \xi f) + r(\eta h)(\xi f \wedge \xi g) = 2\xi f \wedge \eta g \wedge \xi h .$$

Cette relation montre que tout sous-module de $\Lambda(\mathfrak{m}_1)$ qui n'est pas contenu dans $\Lambda^\circ(\mathfrak{m}_1)$ contient

$$\Lambda^\circ(\mathfrak{m}_1) + \Lambda^1(\mathfrak{m}_1) + \Lambda^2(\mathfrak{m}_1) + \Lambda^3(\mathfrak{m}_1) .$$

REFERENCES.

[1] V.G. KAC, Lie Superalgebras, Advances in Math., 26, (1977), 8-96.

[2] B. KOSTANT, Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, Lecture Notes in Mathematics, 570, 177-306.

[3] J. MILNOR - J. MOORE, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. 81 (1965), 211-264.