

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

M. JAEKEL

J. M. MAILLARD

Modèles solubles en mécanique statistique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1981, tome 29
« Conférences de : J. Ginibre, W. Krieger, M.Jaeckel-J.M. Maillard, A. Lichnerowicz et C.
de Calan », , exp. n° 3, p. 93-114

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1981__29__93_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Division de la Physique
Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique

MODELES SOLUBLES EN MECANIQUE STATISTIQUE

par

M. JAEKEL et J.M. MAILLARD

MODELES SOLUBLES EN MECANIQUE STATISTIQUE

M. JAEKEL ET J.M. MAILLARD

I.1) Introduction

La notion d'intégrabilité complète est une notion que l'on rencontre dans des problèmes extrêmement différents entre eux, au moins en apparence, appartenant à différents domaines. Sans rentrer dans les détails nous avons esquissé sur la figure (1) les correspondances entre ces différents domaines et les concepts et techniques qui leur sont associés de façon plus spécifique. Dans la suite nous avons choisi de nous placer sur le terrain de la mécanique statistique.

I.2) Fonction de partition. Matrice de transfert

Considérons pour commencer un réseau carré de taille finie et sur chaque liaison joignant deux vertex nous plaçons des flèches (si l'on préfère un élément de Z_2). Si L est le nombre de liaisons du réseau il y a au total 2^L choix possibles que nous appellerons "configurations" ou "états" du système. Introduisons seize paramètres $\omega_1 \dots \omega_{16}$ associés aux diverses configurations locales de flèches autour d'un vertex (la figure (2) représente huit de ces configurations). Un état du système induit donc en chaque vertex indexé par v une application $v \rightarrow i(v)$ où $i(v) \in \{1, \dots, 16\}$, à chaque vertex on peut donc faire correspondre $\omega_{i(v)}$ l'un des seize paramètres. Nous chercherons à calculer la fonction suivante de nos seize paramètres (appelée fonction de partition)

$$Z(\omega_1, \dots, \omega_{16}) = \sum_{\Gamma} \prod_v \omega_{i(v)}$$

où le produit porte sur tous les vertex du réseau carré et où la somme porte sur toutes les configurations possibles.

Pour calculer cette fonction on a créé la notion de matrice de transfert.

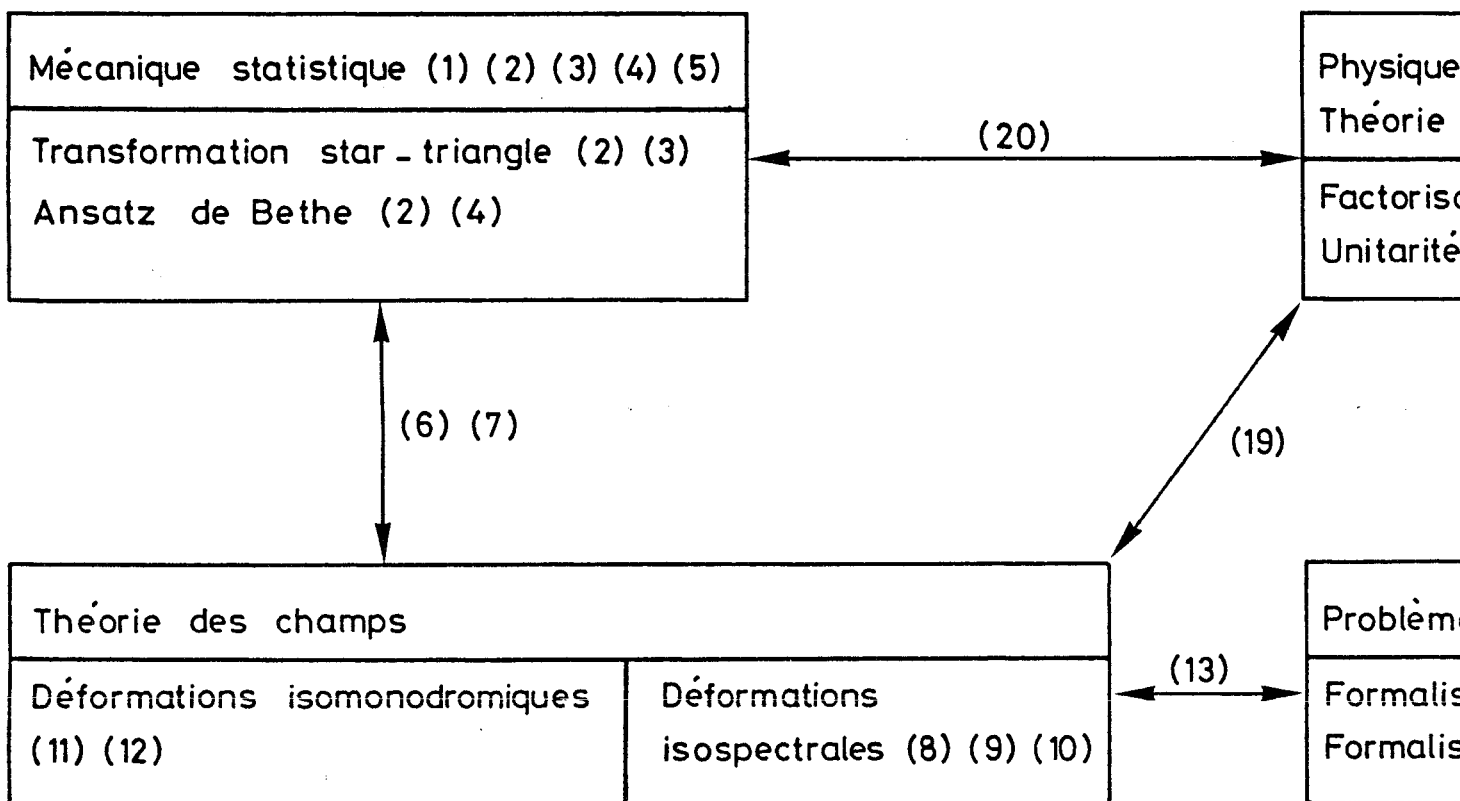


Figure 1

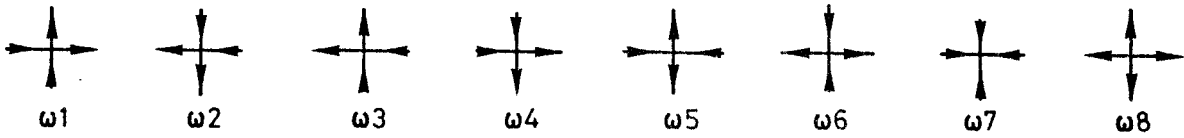


Figure (2)

Considérons un vertex tel que celui de la figure (3) et une configuration précise de flèches autour de ce vertex : la configuration de la figure (3) est déterminée par α flèche vers le haut (que nous conviendrons de noter $\alpha = +1$), β vers le bas ($\beta = -1$), γ vers la droite ($\gamma = +1$), δ vers la gauche ($\delta = -1$). Introduisons la matrice 2×2 dépendant des deux éléments de \mathbb{Z}_2 précédents α et β :

$$L(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \omega(\alpha, \beta, +1, +1) & \omega(\alpha, \beta, +1, -1) \\ \omega(\alpha, \beta, -1, +1) & \omega(\alpha, \beta, -1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha, \beta) & B(\alpha, \beta) \\ C(\alpha, \beta) & D(\alpha, \beta) \end{bmatrix} .$$

Introduisons maintenant N matrices L indexées par i allant de 1 à N :

$$L_i = \begin{bmatrix} A(\alpha_i, \beta_i) & B(\alpha_i, \beta_i) \\ C(\alpha_i, \beta_i) & D(\alpha_i, \beta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & C_i \\ B_i & D_i \end{bmatrix} .$$

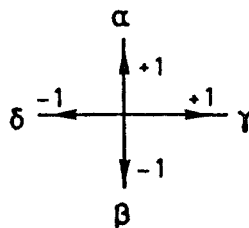


Figure (3)

Pour comprendre à quoi correspond physiquement la notion du produit matriciel, considérons le produit

$$L_i L_{i+1} = \begin{pmatrix} A_i A_{i+1} + C_i B_{i+1} & A_i C_{i+1} + C_i D_{i+1} \\ B_i A_{i+1} + D_i B_{i+1} & B_i C_{i+1} + D_i D_{i+1} \end{pmatrix}$$

Nous voyons que le terme $A_i A_{i+1} + C_i B_{i+1}$ correspond à ce que l'on associe à la figure (4) : quel que soit la flèche mise sur la liaison intermédiaire. Le premier terme correspond à la liaison intermédiaire valant +1 et le second -1. La notion de produit matriciel s'identifie avec la notion de sommation sur toutes les configurations de liaisons horizontales intermédiaires.

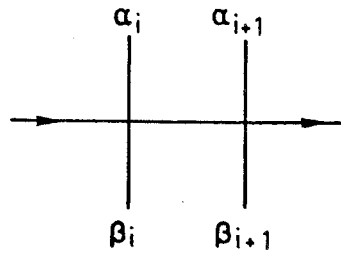


Figure (4)

Formons $T(\alpha_1, \dots, \alpha_N; \beta_1, \dots, \beta_N) = \text{Tr}(L_1(\alpha_1, \beta_1) \dots L_N(\alpha_N, \beta_N))$ qui apparaît comme associé à la configuration de la figure (5) où l'on a sommé sur toutes les configurations de liaisons horizontales possibles et où l'on a imposé que l'état de la liaison λ soit le même que l'état de la liaison λ' (ce qui signifie physiquement que l'on impose des conditions périodiques du système).

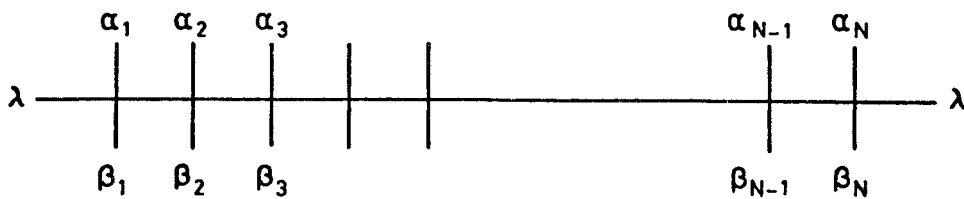


Figure (5)

Il y a 2^N configurations de liaisons verticales $\alpha_1 \dots \alpha_N$ ou $\beta_1 \dots \beta_N$; $T(\alpha_1 \dots \alpha_N; \beta_1 \dots \beta_N)$ définit des éléments de matrices entre les 2^N états $(\alpha_1 \dots \alpha_N)$ et $(\beta_1 \dots \beta_N)$. La matrice $T(2^N \times 2^N)$ ainsi définie est appelée matrice de transfert. Formons le produit matriciel de deux matrices T :

$$\sum_{\beta_1 = \pm 1 \dots \beta_N = \pm 1} T(\alpha_1 \dots \alpha_N; \beta_1 \dots \beta_N) T(\beta_1 \dots \beta_N; \gamma_1 \dots \gamma_N) = (T^2)(\alpha_1 \dots \alpha_N; \gamma_1 \dots \gamma_N)$$

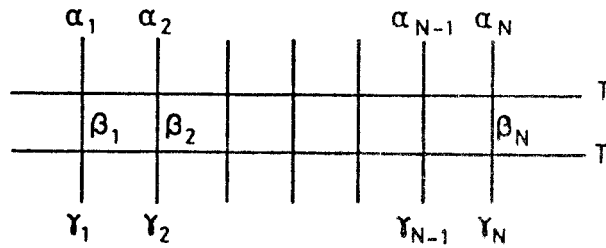


Figure (6)

Là encore la notion de produit matriciel correspond à la sommation sur toutes les configurations $(\beta_1 \dots \beta_N)$ de liaisons verticales intermédiaires. Formons maintenant $Z = \text{Tr}(T^M)$. Un tel objet n'est autre que la fonction de partition d'un modèle à vertex sur réseau carré à M lignes N colonnes et doubles conditions périodiques. On a en effet sommé sur toutes les configurations de liaisons horizontales ou verticales du réseau. Le calcul de la fonction de partition sera effectué à la limite thermodynamique $M \rightarrow \infty$ $N \rightarrow \infty$. Dans ces conditions on peut facilement se convaincre qu'une grandeur possédant une limite est

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{M \cdot N} \ln Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \Lambda$$

où Λ désigne la plus grande valeur propre de T et que l'on peut jouer arbitrairement sur les flèches aux bords du système dans le calcul de cette limite (effets de bord négligeables). Dorénavant on posera

$$\frac{1}{Z^{N \cdot M}} \rightarrow Z$$

fonction de partition par site.

I.3) Relation triangle et relation d'inverse

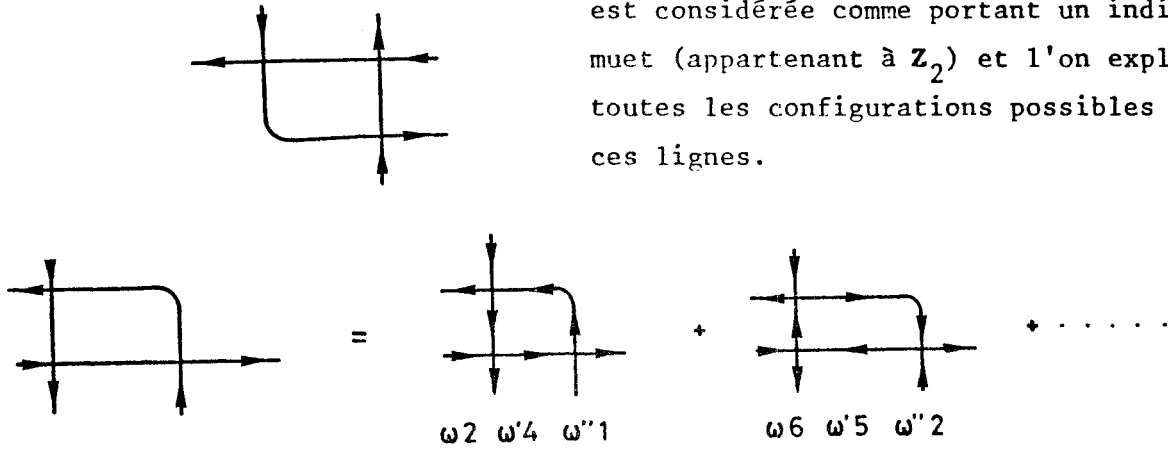
Dans ce qui suit nous sommes amenés à déformer notre réseau carré et à considérer des figures telles que



Chacun des trois vertex peut localement être considéré comme l'un des vertex d'un réseau carré précédemment introduit. Nous nous réservons la possibilité de prendre un jeu de paramètres $\omega_1 \dots \omega_{16}$, $\omega'_1 \dots \omega'_{16}$, $\omega''_1 \dots \omega''_{16}$ différent en chaque vertex.

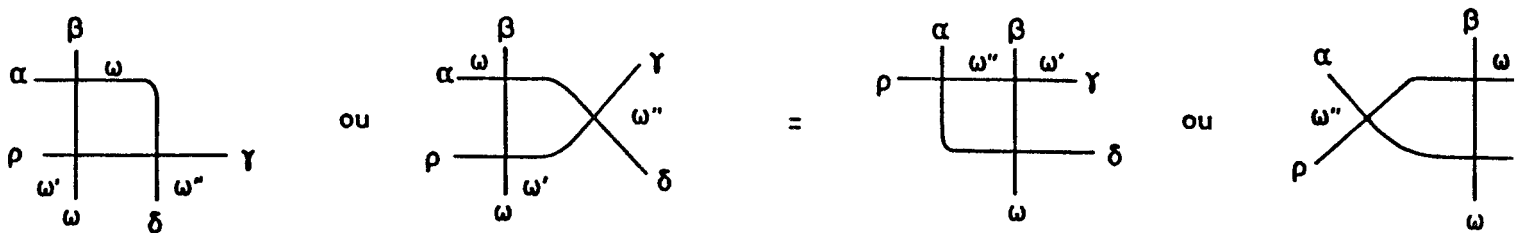
A la figure précédente nous associons le produit des paramètres en chaque vertex soit dans le cas présent $\omega_2 \cdot \omega'_4 \cdot \omega''_1$.

Considérons maintenant la figure suivante. Chaque ligne intérieure est considérée comme portant un indice muet (appartenant à Z_2) et l'on explore toutes les configurations possibles sur ces lignes.



on associe à une telle figure la somme des produits précédents.

Appelons $\alpha, \beta, \gamma \dots$ les configurations de flèches "extérieures" et $S(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ la somme précédente. Considérons maintenant la relation suivante (relation triangle) :



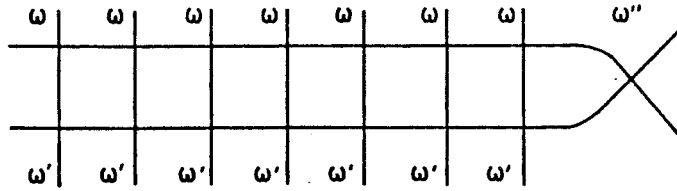
De la même façon qu'au terme de gauche est associée une somme $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, \rho)$, au terme de droite est associée une autre somme $S'(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, \rho)$. La relation graphique précédente a une traduction analytique qui est d'écrire

$$S(\alpha, \beta, \gamma \dots) = S'(\alpha, \beta, \gamma \dots), \quad \text{quels que soient } \alpha, \beta, \gamma \dots$$

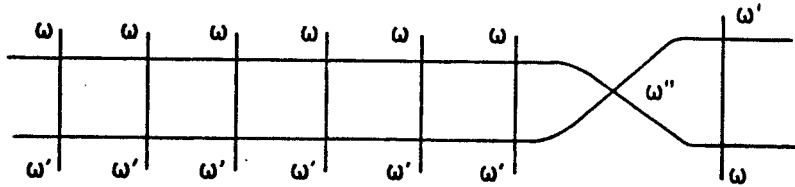
Nous obtenons ainsi un système d'équations (1) homogènes linéaires en chacune des variables ω_i ou ω'_j ou ω''_k extrêmement lourd (le cas général n'a pas été résolu à l'heure actuelle). On en connaît de nombreuses solutions particulières.

Montrons tout le parti que l'on peut tirer d'une telle symétrie.

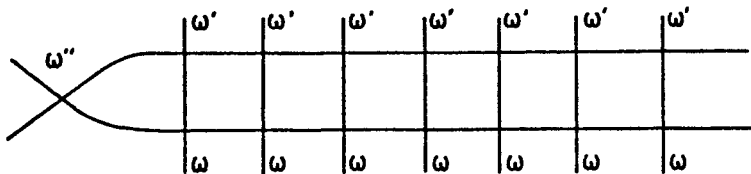
Considérons la figure suivante



Aux vertex du haut on a associé les paramètres $\omega_1 \dots \omega_{16}$ à ceux du bas $\omega'_1 \dots \omega'_{16}$ et $\omega''_1 \dots \omega''_{16}$ au vertex du bord droit. En utilisant la symétrie précédente sur ce bout de chaîne de droite on voit aisément que l'on passe à la figure suivante



On peut bien sûr itérer cette transformation : on aboutit alors à la figure



Ayant en tête le fait que nous prenons la limite thermodynamique et donc que nous négligeons le fait que les flèches sur les deux bords soient dans un état plutôt qu'un autre, nous voyons que l'identité graphique précédente s'écrit matriciellement

$$T(\omega_1 \dots \omega_{16}) T(\omega'_1, \dots, \omega'_{16}) = T(\omega'_1 \dots \omega'_{16}) T(\omega_1 \dots \omega_{16})$$

où T est la matrice de transfert ci-dessus définie. (En fait cette identité matricielle est parfaitement licite en dehors de la limite thermodynamique mais nous ne voulons pas compliquer la démonstration).

Les solutions des équations (1), que l'on connaît à l'heure actuelle sont très particulières, si bien que les matrices de transfert au lieu de dépendre des seize paramètres ω_i ne dépendent que de trois paramètres et forment lorsqu'elles commutent une famille à un seul paramètre de matrices. Aussi nous oublions les deux autres paramètres et notons la relation précédente

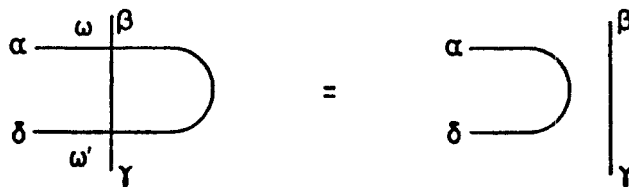
$$[T(u), T(v)] = 0 \tag{2}$$

T(u) dépendant d'une variable peut être considéré comme fonction génératrice d'autres matrices T_i il suffit de développer T(u) :

$$T(u) = T_0 + u T_1 + u^2 T_2 + u^3 T_3 + \dots$$

On trouve facilement que (2) implique $[T_i, T_j] = 0$ quels que soient i et j. Ceci n'est autre que l'expression d'un nombre infini de lois de conservation pour ce problème. (Classiquement, on aurait eu des "hamiltoniens" en involution relativement aux crochets de Poisson $\{t_i, t_j\} = 0$).

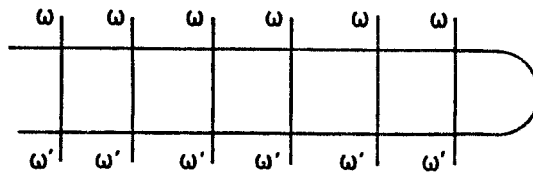
Nous abordons maintenant une deuxième symétrie qui va se révéler tout aussi importante. Symbolisons-la graphiquement par



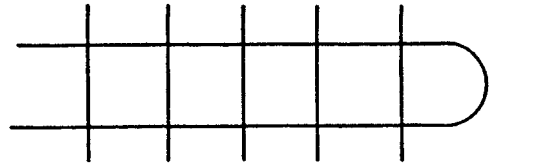
Ce qui signifie que quel que soit $\omega_1 \dots \omega_{16}$ nous savons trouver $\omega'_1, \dots, \omega'_{16}$ tel que lorsque nous avons effectué les sommations (correspondant aux deux liaisons internes) des termes $\omega_i \omega'_j$ correspondant au dessin de gauche, cette somme est égale à $\delta_{\alpha, \delta} \cdot \gamma_{\beta, \gamma}$ où δ désigne le δ de Kronecker. La convention de droite est évidente : une ligne telle que $\begin{matrix} \alpha \\ \delta \end{matrix}$ doit porter un seul élément de Z_2 à savoir $\alpha = \delta$.



Considérons maintenant la figure suivante



En utilisant sur le bord droit de cette figure notre nouvelle relation locale nous obtenons



On peut bien sûr itérer cette procédure, on obtient ainsi



Ce qui s'interprète facilement (en négligeant les bords : limite thermodynamique) comme la relation matricielle

$$T(\omega_1 \dots \omega_{16}) T(\omega'_1 \dots \omega'_{16}) = \mathbf{I} \quad (3)$$

où \mathbf{I} désigne une matrice identité $2^N \times 2^N$. (En fait on peut notamment dans le cas du modèle de Potts traité dans la suite écrire une telle relation sans être à la limite thermodynamique). Si comme précédemment T dépend d'une seule variable u la relation devient

$$T(u)T(-u) = \mathbf{I} \quad (4)$$

ou encore avec d'autres définitions pour les paramètres

$$T(u)T(-u) = c^N(u). \mathbb{1}$$

où $c(u)$ est une fonction connue.

Pour compléter le parallèle avec la précédente symétrie, regardons là encore T comme fonction génératrice (pour une suite variable u)

$$T(u) = T_0 + u.T_1 + u^2.T_2 + \dots$$

les relations que nous obtenons de (4) sont les suivantes : $T_0^2 = \mathbb{1}$

$$[T_0, T_1] = 0 \quad \{T_0, T_2\} = T_1^2$$

$$[T_3, T_0] + [T_1, T_2] = 0$$

$$\{T_0, T_4\} + T_2^2 = \{T_1, T_3\}$$

$$[T_5, T_0] + [T_3, T_2] + [T_1, T_4] = 0 \dots$$

Elles présentent certaines analogies avec les relations $[T_i, T_j] = 0$ mais elles ne font pas seulement intervenir les commutateurs (crochets de Poisson).

Nous voyons dans les deux cas comment une relation locale simple peut engendrer de sévères contraintes sur des objets beaucoup plus grands à caractère global comme par exemple les matrices de transfert.

I.4) Calcul de la fonction de partition

De la première symétrie et de sa conséquence immédiate, l'existence d'une famille à un paramètre de matrices de transfert qui commutent découle une méthode de résolution que l'on pourrait qualifier de "traditionnelle" qui ne sera pas exposée ici du fait de son extrême lourdeur. (Disons très schématiquement que l'on se sert de la relation triangle pour trouver explicitement une base de représentation de T (ansatz de Bethe [4]). La deuxième symétrie et sa conséquence l'équation matricielle

$$T(u)T(-u) = c^N(u). \mathbb{1} \tag{5}$$

par contre fournit une méthode de calcul très rapide de la fonction de partition:

considérons le vecteur propre $|\Omega\rangle$ correspondant à la plus grande valeur propre $\Lambda(u)$ de $T(u)$. Nous avons alors

$$T(u)T(-u)|\Omega\rangle = T(-u)T(u)|\Omega\rangle = T(-u).\Lambda(u)|\Omega\rangle = c^N(u)|\Omega\rangle$$

$|\Omega\rangle$ est donc un vecteur propre de $T(-u)$ et il existe dans de très nombreux cas des arguments pour dire que $|\Omega\rangle$ a pour valeur propre $\Lambda(-u)$ (la même fonction mais avec modification de l'argument ; par "même fonction" il faut bien sûr entendre continuation analytique [2]). On peut s'en convaincre [21] dans des cas simples : T matrice d'ordre fini, u voisin de zero. Si nous posons $\Lambda^{1/N}(u) = Z(u)$, nous tirons donc de (5) une équation fonctionnelle pour la fonction de partition par site

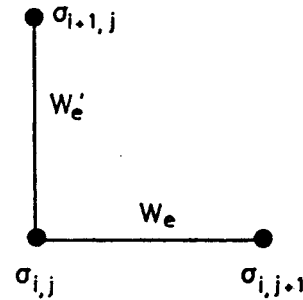
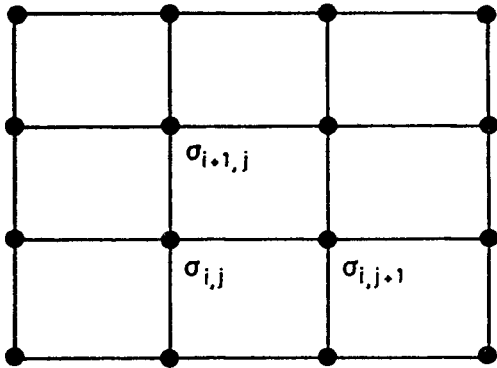
$$Z(u)Z(-u) = c(u)$$

D'autre part ce qui est dit pour la plus grande valeur propre semble vrai pour la seconde plus grande valeur propre. Il existe donc une équation fonctionnelle pour leur quotient qui a une signification physique intéressante. Nous allons dans la deuxième partie illustrer ces propos sur un exemple inédit : le modèle de Potts [22][23] scalaire bidimensionnel, sans champ, sur réseau carré.

II - MODELE DE POTTS [23]

II.1) Définition - propriétés

C'est un modèle à 2 dimensions où les spins sont situés sur les noeuds du réseau et peuvent prendre q valeurs différentes. Ces spins interagissent entre plus proches voisins seulement : à chaque lien est associé un poids d'interaction, normalisé à 1 si les deux spins sont dans des états différents, valent b ou c si les 2 spins sont dans le même état.



spins : $(i,j) \rightarrow \sigma_{i,j} \in \mathbb{Z}_q$

poids d'interaction :
$$W_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{i,j} \neq \sigma_{i,j+1} \\ b & \text{si } \sigma_{i,j} = \sigma_{i,j+1} \end{cases} \Leftrightarrow W(\sigma, \sigma') = \begin{cases} \delta_{\sigma\sigma} \\ b \\ \text{ou} \\ c \\ \delta_{\sigma\sigma} \end{cases}$$

$$W'_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{i,j} \neq \sigma_{i+1,j} \\ c & \text{si } \sigma_{i,j} = \sigma_{i+1,j} \end{cases}$$

La fonction de partition du modèle est définie par l'expression suivante :

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\ell} W_\ell(\{\sigma\})$$

↑ poids correspondant à une configuration des spins
 ↑ produit sur tous les liens du réseau
 ↑ somme sur toutes les configurations

Comme précédemment on calculera plutôt la fonction de partition par site dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire que l'on posera :

$$Z \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} Z^{1/N},$$

où N est le nombre de noeuds du réseau.

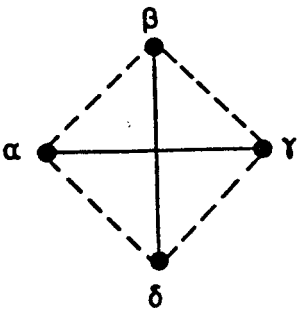
Il s'agit donc de déterminer une fonction de 2 variables $Z(b,c)$ (et du paramètre q , le nombre d'états du modèle). Cette fonction n'est pas encore connue, mais on sait déjà beaucoup sur elle :

- on connaît la fonction, sous forme analytique sur 3 courbes : sur deux courbes correspondant à des modèles de Potts à 1 dimension et sur la courbe critique (grâce à une correspondance avec un modèle à 6 vertex, Baxter [22]) ; on a de plus l'expression de la discontinuité au voisinage de la courbe critique (la chaleur latente, Baxter [26]) ; on sait ainsi que le modèle possède une transition de phase du 1er ordre pour $q > 4$ et d'ordre supérieur pour $q \leq 4$.
- on possède des développements de la fonction, à haute ou basse température, (b, c infinis), ainsi qu'un développement à q infini. (Kihara et al. [24] et Ginsparg [25]).

On va montrer ici comment on peut exploiter la relation d'inverse décrite précédemment, ainsi que les propriétés de symétrie du modèle, afin d'obtenir rapidement, par une méthode plus directe que la méthode traditionnelle (Baxter [4]), l'expression de la fonction de partition sur la courbe critique.

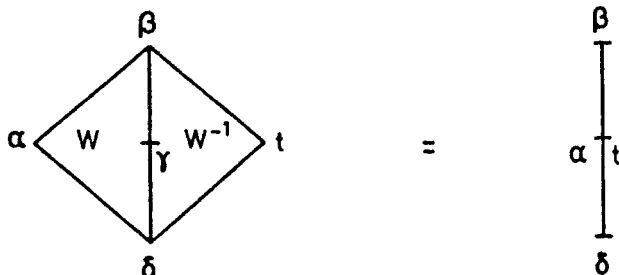
Le modèle possède deux transformations essentielles :

- 1) l'inverse, introduite précédemment : c'est une transformation sur le poids local suivant :

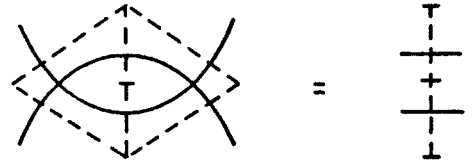


$$W(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = b^{\delta_{\alpha\gamma}} c^{\delta_{\beta\delta}}$$

(par commodité on entrelace 2 modèles identiques)



(c'est une forme duale de la relation décrite au I :



$$\sum_{\gamma} W(\alpha, \beta, \gamma, \delta) W^{-1}(\gamma, \beta, \epsilon, \delta) = \Lambda \delta_{\alpha\epsilon} \quad (\text{relation d'inverse})$$

On vérifie alors que la relation locale est satisfaite pour un poids W^{-1} de la même forme que W :

$$W^{-1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2-q-b)^{\delta_{\alpha\gamma}} \left(\frac{1}{c}\right)^{\delta_{\beta\delta}}$$

le facteur de normalisation valant :

$$\Lambda = -(b-1)(b+q-1)$$

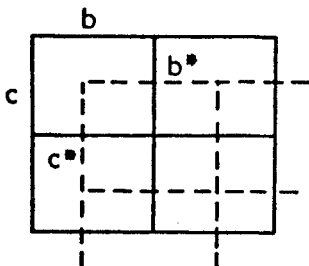
En suivant la méthode décrite du I on étend cette propriété locale à une propriété globale sur la matrice de transfert, puis à une relation fonctionnelle sur la fonction de partition par site :

$$\underline{Z(b, c) Z(2-q-b, \frac{1}{c}) = -(b-1)(b+q-1)} \quad (\text{I})$$

2) la symétrie évidente qui consiste à échanger l'horizontale et la verticale

$$\underline{Z(b, c) = Z(c, b)} \quad (\text{S})$$

Ces deux équations sont deux relations fonctionnelles que doit vérifier une même fonction analytique, la fonction de partition par site Z . De plus, il existe une autre transformation remarquable, la dualité, qui consiste à remplacer le réseau par un réseau dual (où les spins sont situés non plus sur les noeuds, mais au centre des faces du réseau) : le modèle de Potts (b, c) se transforme alors en un autre modèle de Potts (b^*, c^*) avec :



$$b^* = \frac{c+q-1}{c-1} \quad c^* = \frac{b+q-1}{b-1}$$

(Kramers, Wannier [27])

La dualité joue un rôle important : c'est une involution qui échange la région

de haute température avec la région de basse température ; l'ensemble de ces points fixes constitue la courbe critique :

$$\underline{q-1 + b+c - bc = 0}$$

II.2 - Groupe d'automorphie

Les deux transformations (inverse I et symétrie S) engendrent un groupe infini de transformation qui semble agir simplement sur la fonction de partition par site Z. De façon générale pour s'assurer que ce groupe agit bien sur Z, il faut vérifier les conditions de cocycles : c'est-à-dire si g et g' sont deux éléments du groupe G agissant sur Z :

$$Z_g(m) = Z(g(m)) = \varphi_g(m) Z^{\varepsilon(g)}(m)$$

(φ_g est le facteur d'automorphie associé à g, $\varepsilon(g) = \pm 1$), alors il faut que soient vérifiées les conditions de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned} Z_{gg'}(m) &= \varphi^{gg'}(m) Z^{\varepsilon(gg')}(m) \\ &= Z_g(g'(m)) = \varphi_g(g'(m)) Z_{g'}^{\varepsilon(g)}(m) \\ &= \varphi_g(g'(m)) [\varphi^{g'}(m)]^{\varepsilon(g)} Z^{\varepsilon(g)\varepsilon(g')}(m) \end{aligned}$$

On en déduit les conditions de cocycles :

$$\underline{\varphi^{gg'}(m) = \varphi_g(g'(m)) [\varphi^{g'}(m)]^{\varepsilon(g)} \quad \text{et} \quad \varepsilon(gg') = \varepsilon(g)\varepsilon(g')}$$

Le groupe G étudié ici est engendré par I et S avec les seules relations : $I^2 = S^2 = 1$ et les conditions de cocycles se réduisent alors aux seules identités :

$$\varphi^I(I(m)) [\varphi^I(m)]^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^S(S(m)) \varphi^S(m) = 1$$

qui sont bien vérifiées par les 2 facteurs :

$$\varphi^I(m) = -(b-1)(b+q-1) \qquad \varphi^S(m) = 1$$

Le groupe G admet la structure simple :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{l} (\text{SI})^n \quad g \quad S^\alpha \qquad g = S^\alpha (\text{SI})^n \quad \text{par exemple} \\ n \in \mathbf{Z} \qquad \alpha = 0, 1 \end{array}$$

G possède en particulier un élément remarquable : $(\text{SI})^2$

$$(\text{SI})^2 : (b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{2-q-b}, 2-q - \frac{1}{c} \right) \quad (\text{agissant séparément sur } b \text{ et } c)$$

des points fixes de cet élément sur les solutions de l'équation :

$$t^2 - (2-q)t + 1 = 0 \qquad \text{soit :} \qquad q_{\pm} = 1 - \frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q(q-4)}$$

une homographie permet d'amener ces 2 points fixes en 0 et ∞ et de donner ainsi une forme simple aux transformations du groupe :

$$\text{soient :} \qquad x \equiv \frac{b-q_+}{b-q_-}, \qquad y \equiv \frac{c-q_+}{c-q_-}$$

$$I \quad : (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y} \right)$$

$$S \quad : (x, y) \rightarrow (y, x)$$

$$(\text{SI})^2 : (x, y) \rightarrow \left(q_+^2 x, \frac{y}{q_+} \right)$$

les "facteurs d'automorphie" prennent aussi une forme simple :

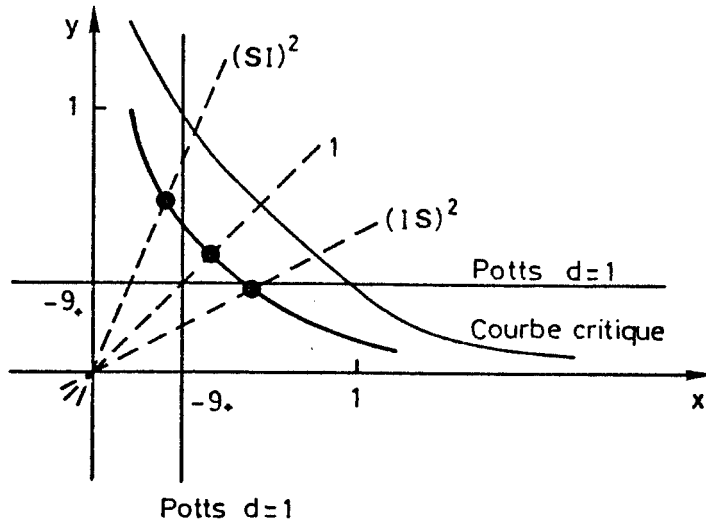
$$\text{soit : } L(x) \equiv \frac{1+x/q_+}{1-x} \qquad \text{alors} \qquad \varphi^I(x) = -qq_+ LL_I$$

Cette transformation a de plus l'avantage de mettre en évidence les différents domaines physiques :

$0 \leq q \leq 4$ alors $|q_+| = 1$ et l'action itérée de $(\text{SI})^2$ ne mène à aucun point fixe ; on observe même que le groupe G devient fini pour les valeurs entières de q .

$q < 0$ ou $q > 4$ alors $|q_+| \neq 1$ et l'action itérée de $(\text{SI})^2$ mène à l'un des deux points fixes ; les orbites sont situés sur des hyperboles : $xy = k$;

l'hyperbole critique (invariante par dualité) $xy = -q_+$ sépare les deux régions haute et basse température :



II.3 - La fonction de partition sur la courbe critique

Sur la courbe critique ($xy = -q_+$) la fonction de partition Z n'est plus fonction que d'une seule variable et est "automorphe" du groupe engendré par I et S . La première étape consiste à construire une représentation, sous forme de produit infini, du sous-groupe engendré par $(SI)^2$, isomorphe à \mathbb{Z} :

Soit la fonction : $a \equiv \prod_{n=0}^{\infty} L_{(SI)^{2n}}$ $a(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+q_+^{2n-1}x}{1-q_+^{2n}x}$, si $|q_+| < 1$

(ou bien $\bar{a} \equiv \prod_{n=0}^{\infty} L_{(IS)^{2n}}$ si $|q_+| > 1$)

et soit $A \equiv \frac{a}{a_{SI}}$, qui satisfait la relation : $A A_{SI} = L$

La seconde étape consiste à inclure l'action du générateur S :

$$Z = A A_S = \frac{a a_S}{a_{SI} a_{SIS}}$$

On vérifie alors que Z satisfait les relations demandées :

$$Z_S = Z \quad ZZ_I = \frac{a a_I}{s_{SIS} a_{(SI)^2}} = L L_I$$

Avec la bonne normalisation, la solution cherchée s'écrit :

$$Z\left(x, -\frac{q_+}{x}\right) = \sqrt{-qq_+} \frac{a(x) a\left(-\frac{q_+}{x}\right)}{a(-q_+x) a\left(\frac{q_+}{x}\right)}$$

Bien sûr, les relations d'automorphie ne suffisent pas à déterminer Z : elles ne déterminent Z qu'à une fonction quelconque près, définie sur le domaine fondamental. Mais dans tous les cas physiques connus, la fonction de partition correspond à la fonction qui possède les propriétés d'analyticité maximale ; c'est pourquoi la fonction construite ici est la bonne, c'est-à-dire que l'on retrouve la fonction obtenue en identifiant le modèle de Potts avec un modèle à 6-vertex (Baxter [22]). Remarquons que cette approche éclaire un peu le fait remarquable que dans ce modèle, les grandeurs caractéristiques (fonction de partition, polarisation, aimantation, ... Baxter [26]) prennent la forme de "produits eulériens".

CONCLUSION

Depuis Bethe [28], Yang [14], Onsager [29], Lieb [30], Baxter [4], a commencé à se former une classe de modèles particuliers, dits modèles solubles, pour lesquels on arrive à calculer analytiquement la fonction de partition (pour les autres approches ce sont la matrice S , Zamolodchikov [17], ou le spectre de la théorie, Faddeev [8]). D'ordinaire cette résolution est laborieuse et repose sur l'existence de la relation triangle, véritable critère d'intégrabilité du modèle. Dans l'approche utilisée ici (Baxter [2], Stroganov [21], Schultz [31]) qui est à rapprocher de celle des matrices S (Zamolodchikov [20]), on n'utilise pas la relation triangle, ni l'ansatz de Bethe, mais seulement la relation d'inverse et les symétries du modèle. Cette méthode possède donc plusieurs avantages : a) pour des modèles déjà résolus par diagonalisation de la matrice de transfert, elle est plus rapide. b) elle peut être utilisée pour des modèles où l'ansatz de Bethe n'est pas connue, alors que l'on a la relation triangle : c'est le cas du modèle d'hexagones durs de Baxter [32]. c) elle peut être utilisée pour des modèles qui ne possèdent pas la relation triangle : modèles bidimensionnels non planaires ou en champ, en ruban, de percolation (dirigée), tridimensionnels d'Ising ou Potts, etc... Ces avantages deviennent conséquents si l'on cherche à étendre la classe des modèles solubles aux dimensions

supérieures. En effet l'équivalent de la relation triangle, ou relation tétraèdre, y est très difficile à uniformiser, sans parler de la construction de l'équivalent de l'ansatz de Bethe.

REFERENCES

- [1] E.H.Lieb, F.Y.Wu dans Domb et Green "Phase transitions and critical phenomena" Vol.1, Academic Press
- [2] R.J.Baxter, Fundamental Problems in statistical mechanics V ;
Proceedings of the 1980 Enschede summer school E.G.D. Cohen ed.
North Holland Pub.
- [3] R.J.Baxter, Proc.Roy.Soc. (1977)
- [4] R.J.Baxter, Ann.Phys. 70 (1972) 193-228
71 (1973) 1-71
- [5] P.W.Kasteleijn, Fundamental Problems in statistical mechanics III ;
Proceeding of the 1974 Wageningen summer school E.G.D. Cohen ed.
North Holland Pub.
- [6] A.Luther, Physical Review B 14 (1976) 2153
- [7] B.Sutherland, J.Math.Phys. 11, 3183 (1970)
- [8] F.K.Sklyanin, L.A.Takhtadjyan, L.D.Faddeev, Teor.mat.Fiz. 40 (1979) 194
- [9] P.Lax, Comm.Pure Appl.Math. 21, 5 (1968) 467-490
- [10] Ablowitz Kaup Newell Segur, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 125-127
- [11] M.Sato, T.Miwa, M.Jimbo, Publ. RIMS Kyoto Univ. 14 (1978) 223-267,
15 (1979) 201-278
577-629
871-972
- [12] R.Hermann, J.Math.Phys. 22, 6 (1981)
- [13] M.D.Kruskal, Lectures in Appl. Math. Amer.Math.Soc. 15 (1974) 61
- [14] C.N.Yang, 19, 23 Phys.Rev.Lett. (1967)
- [15] F.Calogero, Lett. Nuov.Cim. 13 (1975) 507
- [16] L.A.Takhtadjyan, Sov.Phys.JETP 39, 2 (1974) 228
- [17] A.B.Zamolodchikov, A.B.Zamolodchikov, Annals of Phys. 120 (1979) 253-291
- [18] P.H.Weisz, Phys.Lett. 67B, 2 (1977) 179
- [19] Berezin, Suchko, Sov.Phys. JETP 21, 5 (1965) 865
- [20] A.B.Zamolodchikov, Comm.Math.Phys. 69 (1979) 165-178
- [21] Y.G.Stroganov, Phys.Lett. 74A n°1,2

- [22] R.J.Baxter, HNV Temperley, S.E.Ashley, Proc.Roy.Soc.Lond. A 358 535-559 (1978)
- [23] R.B.Potts, Proc.Comb.Phil.Soc. 48 (1952) 106
- [24] T.Kihara, Y.Midzuno, T.Shizume, Journal of the Phys.Soc.of Japan 9 (1954) 681
- [25] P.Ginsparg, Y.Y.Goldschmidt, J.B.Zuber, Nuclear Physics B (1981) 409
- [26] R.J.Baxter, J.Phys.C 6 (1973) L 445
- [27] H.A.Kramers, G.H.Wannier, Phys.Rev. 60 (1941) 252
- [28] H.A.Bethe, Z.Phys. 71 (1931) 205
- [29] L.Onsager, Phys.Rev. 65 (1944) 117
- [30] E.H.Lieb, Phys.Rev.Lett. 18 (1967) 692, 1046
- [31] C.L.Shultz, Phys.Rev.Lett. 10 (1981) 629
- [32] R.J.Baxter, J.Phys. C 6 (1979) L 445
- [33] R.J.Baxter, M.S.Sykes, M.G.Watts, J.Phys.A, vol.8, 2 (1975) 245.