I. Ekeland

Solutions périodiques des équations de Hamilton

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1979, tome 27
« Conférences de : W.O. Amrein, H. Brezis, T. Damour, R. Flume, B. Gaveau et I. Ekeland », , exp. n° 6, p. 63-73
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1979__27__63_0>

Solutions périodiques des équations de Hamilton

par

I. EKELAND

Centre de Recherches de Mathématiques de la Décision
Université Paris-9 Dauphine.

§ I - Introduction.

On considère dans $R^n \times R^n$ le système d'équations différentielles dit de Hamilton :

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \end{aligned}$$

Point n'est besoin de rappeler que le formalisme hamiltonien de la mécanique consiste à ramener les équations du mouvement d'un système matériel à la forme canonique $(\mathcal{H})$. On interprète alors $x \in R^n$ comme la position, $p \in R^n$ comme l'impulsion, et $H(x,p)$ comme l'énergie. On constate d'ailleurs que H est une intégrale première du mouvement :

$$\frac{d}{dt} H(x(t),p(t)) = 0 .$$

Dans toute la suite, on supposera que la fonction H atteint son minimum à l'origine, avec $H(0,0) = 0$. L'origine est alors un point d'équilibre. On se pose la question de savoir si le système $(\mathcal{H})$ admet des solutions périodiques, en dehors de la solution triviale $x(t) \equiv 0 \equiv p(t)$.

Pour bien comprendre la signification de ce problème, examinons le cas particulier d'un hamiltonien quadratique, $H(x,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2$, tous les coefficients α_i étant strictement positifs. On décrit ainsi le mouvement d'un point matériel de masse m , dans un champ de potentiel $V(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i^2$. Le système $(\mathcal{H})$ est alors linéaire, et se découple en n équations indépendantes :

$$x_i + \alpha_i\, x_i = 0 \ , \ 1 \le i \le n \ .$$

Il y a donc, si les α_i sont deux à deux distincts, n modes fondamentaux de vibration, de périodes $T_i = 2M/\sqrt{\alpha_i}$ la solution générale étant une combinaison linéaire de n solutions périodiques. Si les α_i sont tous égaux, on obtient l'oscillateur harmonique, dont toutes les solutions sont périodiques, de même période.

Dans le cas général, où le Hamiltonien n'est plus quadratique, la recherche des solutions périodiques du système $(\mathcal{H})$ est un problème de <u>vibrations non linéaires</u>. On peut se poser à priori deux types de problèmes :

(1) vibrations d'énergie prescrite. On se donne $h > 0$, et on recherche les solutions périodiques de $(\mathcal{H})$ vérifiant : $H(x(t),p(t)) = h$. Elles seront automatiquement non triviales.

(2) vibrations de période prescrite. On se donne $T > 0$, et on cherche les solutions T-périodiques de $(\mathcal{H})$. Encore faudra-t-il montrer que ces solutions sont non triviales (à moins qu'on n'arrive à montrer que T est leur période minimale).

Le problème (1) remonte à Liapounov lui-même. Disons qu'il y a deux types de résultats :

a) $h > 0$ petit ; si $H''(0,0)$ est non dégénéré, il y a au moins n orbites périodiques distinctes sur le niveau d'énergie $H^{-1}(h)$. Ce résultat est dû à Weinstein ([15]) , améliorant des démonstrations antérieures de Liapounov ([11])

et Horn ([10]) qui supposaient remplie une condition de non-résonance.

b) $h > 0$ quelconque; si l'ensemble où $H \leq h$ est étoilé par rapport à l'origine dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors il existe au moins une orbite périodique sur le niveau d'énergie $H^{-1}(h)$. Ce résultat est dû à Rabinowitz ([12]), qui couronne ainsi des travaux antérieurs de Seifert ([14]), Berger ([2]), Weinstein ([16]).

Le problème (2) est plus récent. Je pense que c'est à Rabinowitz que revient le mérite de l'avoir posé et résolu avec une certaine généralité. Son théorème ([12]) s'énonce ainsi :

<u>Théorème</u> (Rabinowitz). Supposons que H est continûment différentiable et qu'il existe une constante $\theta \in]0,\frac{1}{2}[$ et un nombre r tels que

$$x^2 + p^2 \geq r^2 \Rightarrow H(x,p) \leq \theta\left[x\,\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) + p\frac{\partial H}{\partial p}(x,p)\right]$$

Alors, pour tout $T > 0$, il existe une solution T-périodique non triviale du système $(\mathcal{H})$.

Ce n'est pas le moindre mérite de Rabinowitz que d'avoir montré que le problème (2) contient le problème (1). Plus précisément, il a remarqué que le problème (1), en fait, ne dépend que de la surface de niveau $H^{-1}(h)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et guère de l'allure du hamiltonien H à l'extérieur de cette surface :

<u>Lemme</u> (Rabinowitz). Soit $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et H_1 et H_2 deux hamiltoniens de classe C^1, possédant tous deux S comme surface de niveau :

$$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R} : S = H_1^{-1}(h_1) = H_2^{-1}(h_2)$$

On suppose que ni ∇H_1 ni ∇H_2 ne s'annulent sur S. Alors les trajectoires du système $(\mathcal{H})$ pour les hamiltoniens H_1 et H_2 coincident sur S.

<u>Démonstration</u>. Soit $(x_1(t),p_1(t))$ une courbe tracée sur S et vérifiant

$$(-\dot{p}_1(t),\dot{x}_1(t)) = \nabla H_1(x_1(t),p_1(t)).$$

Comme le gradient de H_1 ne s'annule pas sur S, cette surface est une sous-variété plongée, et en un point tel que $(x_1(t),p_1(t))$, la normale est portée par ∇H_1. De même pour ∇H_2. Finalement :

$$\exists\lambda(t)\neq 0 : \nabla H_2(x_1(t),p_1(t)) = \lambda(t)\, \nabla H_1(x_1(t),p_1(t)) .$$

En reportant ci-dessus, on obtient :

$$(-\lambda(t)\, \dot{p}_1(t),\lambda(t)\, \dot{x}_1(t)) = \nabla H_2(x_1(t),p_1(t)) .$$

On fait alors un changement de paramétrage en temps via l'équation $s(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda(\tau)}$, ce qui est possible puisque $\lambda(t)$ ne s'annule pas. On vérifie alors que :

$$(x_2(t),p_2(t)) = (x_1 \circ s(t)\ ,\ p_1 \circ s(t))$$

est une solution périodique de hamiltonien H_2. Bien entendu, les trajectoires de $(x_1(t),p_1(t))$ et $(x_2(t),p_2(t))$ sont les mêmes.

Bien entendu, si l'un des gradients, ∇H_1 par exemple, s'annule en un point de S, ce point constitue à lui seul une trajectoire (dégénérée) des équations de Hamilton pour H_1.

Dans l'étude du problème (1) (énergie h donnée), on pourra donc remplacer le hamiltonien de départ H par n'importe quel hamiltonien possédant $H^{-1}(h)$ comme surface de niveau. Ceci permet d'utiliser les résultats obtenus en ce qui concerne le problème (2) (période T donnée). Si par exemple l'ensemble C où $H \leq h$ est étoilé par rapport à l'origine dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors la fonction $\overline{H}(x,p) = j(x,p)^4$, où

$$j(x,p) = \operatorname{Inf}\{\lambda > 0 \mid (x,p) \in \lambda\, C\}$$

constitue un nouvel hamiltonien, ayant $H^{-1}(h)$ comme surface de niveau 1. Si l'on dispose du théorème 1, on en déduit que $\overline{H}$ a une trajectoire périodique non triviale. Comme $\overline{H}$ est positivement homogène de degré 4, on peut ramener par homothétie cette trajectoire périodique sur $\overline{H}^{-1}(1) = H^{-1}(h)$.

D'après le lemme, c'est aussi une trajectoire périodique pour H , et l'on a résolu le problème (1).

Voici donc la situation jusqu'à l'année dernière.

§ II - DUALITE .

En 1978 est apparue une idée nouvelle : supposer le hamiltonien convexe par rapport au couple (x,p) pour exploiter dans ce cas les méthodes de dualité classiques en analyse convexe. Rappelons que dans ce cas la transformée de Legendre G de H est une fonction convexe s.c.i. de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui s'écrit :

$$G(y,q) = \operatorname*{Sup}_{(x,p)} \{xy + pq - H(p,q)\} ,$$

et que les trois formules suivantes sont équivalentes :

(a) $(y,q) \in \partial H(x,q)$

(b) $(x,p) \in \partial G(y,q)$

(c) $H(x,p) + G(y,q) = xy + pq$.

Ce sont les formules de Fenchel. Les notations ∂H et ∂G désignent le sous-différentiel de H ou G au sens de l'analyse convexe. On sait qu'en chaque point de continuité de la fonction, son sous-différentiel est un convexe compact non vide, et qu'en chaque point de différentiabilité, il se réduit à la dérivée.

Le premier pas dans cette direction est fait par Aubin et Ekeland. Dans leur article [1] , ils associent au système différentiel $(\mathcal{H})$ une action composite

$$\int_0^T [\dot{p}x + H(x,p)]dt + \int_0^T [-p\dot{x} + G(-\dot{p},\dot{x})]dt$$

que toute solution de $(\mathcal{H})$ sur $[0,T]$ (non nécéssairement périodique) doit minimiser, le minimum étant nul. Le premier terme est l'action usuelle, celle du principe de Maupertuis. Le second terme représente une action "duale".

Un pas décisif a été accompli par Clarke ([4]) , qui le premier s'est servi d'une formulation "duale", pour résoudre le problème (1) (solutions périodiques d'énergie prescrite). Finalement, Clarke et Ekeland ([5]) ont formulé un principe de moindre action, "dual" de celui de Maupertius :

Proposition : Il est équivalent de dire :

(a) (y,q) est une extrémale du problème de calcul des variations :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{ext} \int_0^T [-q\dot{y} + G(-\dot{q},\dot{y})]dt \\ \int_0^T \dot{y}\ dt = 0 = \int_0^T \dot{q}\ dt \end{cases}$$

(b) il y a un translaté (x,p) de (y,q) qui est une solution du système $(\mathcal{H})$ sur $[0,T]$.

Démonstration : On remarque d'abord que l'on peut translater y et q d'une constante sans changer la valeur des intégrales. Modulo quelques difficultés techniques, les extrêmales de $(\mathcal{P})$ doivent vérifier les équations d'Euler-Lagrange :

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} -\dot{q} + \frac{d}{dt} G_2' (-\dot{q},\dot{y}) = 0 \\ \dot{y} - \frac{d}{dt} G_1' (-\dot{q},\dot{y}) = 0 \end{cases}$$

où G_1' désigne la dérivée par rapport aux n premières variables, et G_2' aux secondes. Posons :

$$p = G_2'(-\dot{q},\dot{y})$$
$$x = G_1'(-\dot{q},\dot{y}) \ .$$

Les équations $(\mathcal{E})$ s'écrivent $\dot{q} = \dot{p}$ et $\dot{x} = \dot{y}$, soit $x(t) = y(t) + y_o$ et $p(t) = q(t) + q_o$. Si l'on écrit la définition de p et x sous la forme

$$(x,p) = \nabla G(-\dot{q},\dot{y}) \ ,$$

on s'aperçoit qu'on peut utiliser les formules de Fenchel, qui donnent :

$$(-\dot{q},\dot{y}) = \nabla H(x,p)$$

Comme $(-\dot{q},\dot{y}) = (-\dot{p},\dot{x})$, c'est le résultat désiré.

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, le problème $(\mathcal{P})$ est beaucoup plus maniable que la formulation classique du principe de moindre action :

$$\text{ext} \int_0^T [p\dot{x} + H(x,p)]dt$$

la dérivée $(\dot{x},\dot{p})$ n'intervient que linéairement. Par exemple, les conditions de Legendre (conditions suffisantes du second ordre pour un minimum local) ne seront jamais satisfaites.

§ III - Résultats.

Examinons maintenant les résultats obtenus par cette méthode. Nous les donnons par ordre chronologique, si tant est qu'on puisse parler d'ordre chronologique pour des résultats obtenus sur quatre mois. Notons que (A) et (D) relèvent du problème (1), (B) et (C) du problème (2).

(A) Clarke ([3],[4]) a montré que si l'ensemble où $H \le h$ est un convexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (sans hypothèse de régularité; comparer par exemple à Weinstein [16]) contenant l'origine dans son intérieur, il y a au moins une solution périodique sur $H^{-1}(h)$ des équations de Hamilton, qui s'écrivent ici :

$$(-\dot{p},\dot{x}) \in \partial H(x,p) .$$

(B) Clarke et Ekeland ([5],[6]) ont montré que si la fonction $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ est convexe et vérifie les estimations :

$$H(x,p) \le K(x^2 + p^2) + a \quad \text{pour tout} \quad (x,p)$$
$$H(x,p) \ge k(x^2 + p^2) \qquad \text{pour} \quad x^2 + p^2 \le \eta$$

où a,η, et $k < K$ sont des constantes données, alors, pour tout T vérifiant

$$\frac{2\pi}{K} < T < \frac{2\pi}{k} ,$$

les équations de Hamilton ont au moins une solution de période <u>minimale</u> T. Le niveau d'énergie correspondant h vérifie l'estimation

(1) $$h \leq \alpha T \left(\frac{2\pi}{k} - T\right)^{-1}$$

où α est une constante ne dépendant que de k et η .

(C) Ekeland ([7]) a montré que si la fonction $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ est convexe et vérifie l'estimation :

$$H(\lambda x, \lambda p) \geq \lambda^{1/\theta} H(x,p) \quad \forall \lambda > 0 \quad \text{et} \quad (x,p) \in \mathbb{R}^{2n} ,$$

où $\theta \in]0,\frac{1}{2}[$ est une constante les équations de Hamilton ont une solution non triviale de période T . Le niveau d'énergie correspondant h vérifie l'estimation:

(2) $$\leq h \leq c/T^{(1-2\theta)^{-1}}$$

(D) Ekeland et Lasry ([8],[9]) ont montré que si l'ensemble C où $H \leq h$ est un convexe de $\mathbb{R}^{2n}$, dont le bord est C^2 et de courbure > 0 , et si C peut être compris entre deux boules centrées à l'origine, le rayon de la boule extérieure étant le double du rayon de la boule intérieure :

(3) $$B \subset C \subset 2B$$

alors il y a au moins n trajectoires périodiques distinctes du système $(\mathcal{H})$ sur $H^{-1}(h)$.

Disons quelques mots sur ces résultats. (C) est un cas particulier du théorème de Rabinowitz : son seul mérite est d'avoir une démonstration directe et de conduire à l'estimation (2). (A) n'avait jamais été démontré sans hypothèse de régularité sur $H^{-1}(h)$. Le cas (B) n'avait jamais été envisagé auparavant, et sa démonstration est particulièrement simple, puisqu'on montre que le problème $(\mathcal{P})$ atteint son minimum. Notons aussi que c'est le seul cas connu où l'on sache que la période T est minimale.

Les cas (B) (hamiltoniens sous-quadratiques) et (C) (hamiltoniens super-quadratiques) donnent à eux deux une image assez complète du comportement des systèmes non linéaires. Comme prototypes, nous avons $H(x,p) = (x^2 + p^2)^\alpha$, avec $\alpha < 1$ dans le cas (B) et $\alpha > 1$ dans le cas (C) . De tels systèmes, contrairement aux systèmes linéaires, présentent des vibrations périodiques de période quelconque. Mais dans le cas (B) , les vibrations de période petite se trouvent au voisinage de l'équilibre (h petit), tandis que dans le cas (C) elles se trouvent à l'infini (h grand). La transition est marquée par le cas purement quadratique (système linéaire), où la plupart des périodes disparaissent.

Le cas (D) est la première version globale du théorème de Liapounov et Weinstein. La condition (3) doit être comprise comme une condition de non résonnance. Intuitivement, notre démonstration consiste à isoler les n premiers modes vibratoires; si l'on veut qu'ils correspondent à n orbites distinctes, il faut qu'une même solution ne soit pas comptée deux fois, l'une comme T-périodique, l'autre comme $2T$-périodique. Ceci n'aura pas lieu si les n premières périodes $T_1 < \dots < T_n$ vérifient $T_n < 2\,T_1$.

La démonstration est beaucoup plus compliquée que dans les cas précédents; elle utilise une fonctionnelle plus compliquée que celle du problème $(\mathcal{P})$, et fait appel à la théorie des espaces fibrés en S^1 , particulièrement à l'espace projectif complexe S^{2n}/S^1 (voir [8]).

Pour finir, mentionnons simplement que la méthode décrite ici pour des oscillations libres s'adapte sans grand changement au cas des oscillations entretenues, c'est-à-dire au cas où le Hamiltonien s'écrit $H(x,p) - xf(t)$. On obtient des résultats dont je rendrai compte ailleurs.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] J.P. AUBIN et I. EKELAND : "Second-order evolution équations with convex hamiltonian", 1978, Cahiers CEREMADE n° 7825, to appear.

[2] M. BERGER : "On a family of periodic solutions of Hamiltonian Systems", Journal of Differential Equations 10 (1971) p. 17-26.

[3] F. CLARKE : "Periodic solutions to Hamiltonian inclusions", 1978, to appear.

[4] F. CLARKE : "Solutions périodiques d'inclusions hamiltoniennes", CRAS Paris Série A, 20 novembre 1978.

[5] F. CLARKE et I. EKELAND : "Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period", 1978, Cahiers CEREMADE n° 7822, à paraître aux communications in Pure and Applied Mathematics.

[6] F. CLARKE et I. EKELAND : "Solutions périodiques, de période donnée, des équations de Hamilton", CRAS Paris, série A, 28 novembre 1978.

[7] I. EKELAND : "Periodic solutions of Hamilton's equations and a theorem of P. Rabinowitz", 1978, Cahiers CEREMADE n° 7827, à paraître au Journal of Differential Equations.

[8] I. EKELAND et J.M. LASRY : "Nombre de solutions périodiques des équations de Hamilton", 1979, Cahiers CEREMADE n° 7902, à paraître.

[9] I. EKELAND et J.M. LASRY : "Nombre de solutions périodiques des équations de Hamilton", Note CRAS Paris, 1979, t. 288 n°.3, p.209-211.

[10] HORN : "Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen", Z. Math. Phys. 48, 1903, p.400-434.

[11] LIAPOUNOV : "Problème général de la stabilité du mouvement", Ann. Fac. Sc. Toulouse (2), 1907, p. 203-474.

[12] P. RABINOWITZ : "Periodic solutions of Hamiltonian systems", Comm. Pure and Applied Math 31 (1978), p. 157-184.

[13] P. RABINOWITZ : "A variational method far finding periodic solutions of differential equations", Proc. Symp. Nonlinear Evolution Equations 1977 Madison (Wis), Academic Press.

[14] SEIFERT : "Periodische Bewegungen mekanischer Systemen", Math. Zeit. 51 (1948) p. 197-216.

[15] A. WEINSTEIN : "Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems", Inventiones Mathematicae 20, 1973, p. 47-57.

[16] A. WEINSTEIN : "Periodic orbits for convex Hamiltonian systems", Annals of Math. 1978.

N.B.: Les Cahiers du CEREMADE sont des prépublications qui peuvent être demandées à la Bibliothèque de l'Université Paris-Dauphine, 75 775 Paris Cedex 16.