RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME Nº 25

THIBAUT DAMOUR

Trous noirs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1979, tome 27
« Conférences de : W.O. Amrein, H. Brezis, T. Damour, R. Flume, B. Gaveau et I. Ekeland », , exp. nº 3, p. 37-47
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1979__27__37_0>

TROUS NOIRS.

Thibaut DAMOUR

Le but des notes qui vont suivre est de présenter le concept de "trou noir" et d'en donner, sans démonstrations détaillées, quelques propriétés de base. Nous donnons à la fin une bibliographie permettant d'accéder à la littérature publiée sur le sujet jusqu'en 1977.

Nous signalons aussi, chemin faisant, les quelques points de la théorie qui n'ont pas encore reçu de démonstration mathématique entièrement satisfaisante.

§ 1. Introduction.

Laplace [1795] fut le premier à concevoir la possibilité de "corps obscurs" d'une masse M et d'un rayon R tels que la vitesse de fuite à leur surface ($v = (2GM/R)^{\frac{1}{2}}$) soit plus grande ou égale à la vitesse des corpuscules lumineux de Newton (c). Autrement dit tout astre de rayon inférieur à $2GM/c^2$ devrait être invisible puisque la lumière émise par sa surface ne peut nous parvenir. Cependant de tels "corps obscurs" maintenant appelés "trous noirs" ne peuvent être décrits avec précision que par une théorie de la gravitation qui tienne compte de toutes les interactions possibles entre la lumière et la gravitation. Dorénavant nous exposerons les propriétés qu'ont les trous noirs dans la théorie de la relativité générale d'Einstein [1915].

Des solutions exactes de cette théorie décrivant des trous noirs ont été obtenues par Schwarzschild [1916], Reissner [1916] (trou noir chargé), Kerr [1963] (trou noir en rotation) et Newman et al. [1965] (trou noir tournant et chargé electriquement). Une série de théorèmes dus à Birkhoff [1923], Israel [1967], Carter [1970], Hawking [1972] et Robinson [1975] prouvent, presque complètement, que ces solutions décrivent les seuls trous noirs isolés en théorie d'Einstein. [cf Carter 1977 pour une revue de cette question].

Du point de vue physique, l'inévitabilité de l'existence des trous noirs résulte de la découverte par Chandrasekhar [1931], Landau [1932] et Oppenheimer et Volkoff [1939] qu'une étoile froide (parce qu'ayant épuisé son carburant nucléaire) doit avoir une masse inférieure à une certaine masse critique. Au-delà de cette masse critique Oppenheimer et Snyder [1939] prédirent et décrivirent l'effondrement gravitationnel de l'étoile conduisant à la formation d'un trou noir. Du point de vue mathématique, le cadre permettant de définir un trou noir fut précisé surtout par Penrose [1964] [1968] et Hawking [Hawking et Ellis 1973] .

§ 2 Structure asymptotique de l'espace-temps.

Nous appelons espace-temps une variété $C^\infty : V_4$ qui est supposée connexe, satisfaisant l'axiome de séparabilité de Hausdorff et munie d'une métrique (pseudo) riemannienne g de signature $-+++$. De plus nous supposons satisfaites les équations d'Einstein :

(1) $$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = 8\pi\, T_{ab}$$

où R_{ab} est le tenseur de Ricci $(R^c_{\ acb})$ et T_{ab} le tenseur d'énergie-impulsion. Nous aurons besoin d'imposer dans la suite certaines conditions au tenseur T_{ab} (positivité de l'énergie, etc...). Remarquons enfin que nous utilisons des unités telles que

(2) G (constante de Newton) = c (vitesse de la lumière) = 1 .

Afin de définir un trou noir nous imposons à la variété V_4 d'avoir une structure asymptotique comparable à celle de l'espace-temps de Minkowski M_4 .

Or, la structure métrique de M_4 en coordonnées sphériques usuelles s'écrit :

(3) $$ds^2 = -\,dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \,.$$

Nous pouvons introduire avec Penrose [1964] de nouvelles coordonnées t', r' destinées à "ramener l'infini à distance finie" :

$$(4) \quad \begin{cases} t' = \mathrm{Arctg}(t+r) + \mathrm{Arctg}(t-r) \\ r' = \mathrm{Arctg}(t+r) - \mathrm{Arctg}(t-r) \end{cases}$$

où Arctg est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Alors on peut écrire au lieu de (3) :

$$(5) \quad 4[\cos \mathrm{Arctg}(t+r) \cos \mathrm{Arctg}(t-r)]^2 ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + \sin^2 r'(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) .$$

La métrique de M_4 apparaît aussi comme conforme à la métrique sur un morceau d'un cylindre (Univers d'Einstein) qui est le produit d'une 3 sphère (r', θ, φ) par une droite (t'). Après une telle représentation conforme l'infini de M_4 apparaît comme la réunion de :

- l'hypersurface isotrope $t'+r' = \pi$, notée I^+ : infinité future isotrope.
- l'hypersurface isotrope $t'-r' = -\pi$, notée I^- : infinité passée isotrope.
- le point $t'+r' = t'-r' = \pi$, noté i^+ : infinité future temporelle.
- le point $t'+r' = r'-t' = \pi$, noté i^o : infinité spatiale.
- le point $t'+r' = t'-r' = -\pi$, noté i^- : infinité passée temporelle.

Tenant compte de ces résultats Penrose [1964] définit un espace-temps asymptotiquement simple, cad dont la structure asymptotique est comparable à celle de l'espace temps de Minkowski M_4 :

DEFINITION. L'espace-temps (V,g) est asymptotiquement simple s'il existe une variété $(\tilde{V}, \tilde{g})$ telle que :

- V peut être plongé dans $\tilde{V}$ (avec un bord ∂V)
- $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ dans V
- $\Omega = 0$ et $d\Omega \neq 0$ sur ∂V

- toute géodésique isotrope commence et finit sur ∂V
- les équations d'Einstein sont satisfaites par (V,g) avec un tenseur d'énergie impulsion nul ou purement électromagnétique près de ∂v .

Alors R. Penrose montra que ∂V était la réunion de deux hypersurfaces isotropes I^+ et I^- (infinités futures et passées)

$$\partial V = I^+ \cup I^- . \tag{6}$$

Cependant la définition précédente est trop forte et nous supposerons simplement que l'espace temps (V,g) est faiblement asymptotiquement simple, c'est-à-dire qu'il existe un espace-temps asymptotiquement simple (V',g') isométrique à (V,g) dans un voisinage de I^+ et I^- .

§ 3. Structure causale de l'espace-temps. Définition d'un trou noir.

En plus des suppositions précédentes, nous ferons l'hypothèse que l'espace-temps est temporellement orientable, c'est-à-dire que l'on peut distinguer, de façon continue et globale, la nappe future et la nappe passée du cône de lumière.

Alors on appelle passé causal d'un point p (noté $J^-(p)$) l'ensemble des points q tels qu'il existe une courbe joignant p à q dont la tangente soit toujours dirigée vers le passé (temporel ou isotrope). [On inclut aussi le point $q = p$] . On appelle passé causal d'un ensemble de points P la réunion des passés causaux des points p de P .
Nous sommes maintenant en mesure de définir précisément un trou noir :

Considérons le passé causal de l'infinité future isotrope :

$$J^-(I^+) ,$$

c'est l'ensemble des points d'où l'on peut "télégraphier à l'infini". Alors on appelle trou noir le complémentaire de $J^-(I^+)$ dans V_4 . De même on définit l'horizon du trou noir : H^+ comme la frontière de $J^-(I^+)$

(7) $$H^+ = \partial J^-(I^+) \ .$$

Nous donnons au paragraphe suivant, sans démonstrations détaillées, certaines propriétés générales de l'horizon.

§ 4. Propriétés générales des trous noirs.

Le premier résultat, Penrose [1968], Hawking [1967], est que : H^+ est une variété engendrée par des segments géodésiques isotropes qui peuvent commencer mais non pas se terminer. Remarquons qu'en général H^+ est constitué de plusieurs composantes connexes. Dans ce cas on pourrait parler de plusieurs trous noirs, cependant nous continuerons, selon la définition du § 3, à parler d'un trou noir non connexe.

- Effets de focalisation par le champ gravitationnel.

Soient des géodésiques isotropes ("des rayons lumineux") de vecteur tangent ℓ . Construisons un repère mobile isotrope constitué de deux vecteurs isotropes réels ℓ et n et de deux vecteurs isotropes complexes m et $\bar{m}$ (conjugué de m). On suppose les relations de normalisation des produits scalaires :

(8) $$+1 = m.\bar{m} = -\ell.n \quad \text{et} \quad 0 = \ell.m = n.m \ .$$

Alors le scalaire (le point-virgule dénotant la dérivée covariante) :

(9) $$\rho = -\ell_{a;b}\, m^a \bar{m}^b$$

mesure la convergence des "rayons lumineux" tangents à ℓ , alors que le scalaire

(10) $$\sigma = -\ell_{a;b}\, m^a m^b$$

mesure le cisaillement de ces mêmes rayons.

Utilisant un paramètre affine v le long des rayons $(\ell_{a;b}\ell^b = 0)$ on peut écrire l'équation de focalisation :

(11) $$\frac{d\rho}{dv} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \tfrac{1}{2} R_{ab}\ell^a\ell^b \ .$$

D'après les équations d'Einstein (cf § 2) le dernier terme vaut

$$4\pi \, T_{ab} \, \ell^a \, \ell^b \tag{12}$$

qui sera positif (ou nul) si l'on <u>suppose</u> que la densité d'énergie $(T_{ab}u^a u^b)$ est positive dans tous les repères, c'est-à-dire pour tout vecteur u dirigé dans le temps. Alors on déduit de l'équation de focalisation que :

$$\frac{d\rho}{dv} \geq \rho^2 \quad \text{soit} \quad d(-1/\rho) \geq dv \, . \tag{13}$$

Donc si la convergence ρ est positive sur un rayon, elle devient infinie en un temps affine v fini.

Appliquant ce résultat aux géodésiques isotropes de l'horizon H^+, on trouve [Hawking 1971] que les générateurs de l'horizon doivent être <u>divergents</u> <u>s</u>'ils sont géodésiquement complets dans le futur :

$$\rho \leq 0 \quad \text{partout sur} \quad H^+ \, . \tag{14}$$

(On obtient le même résultat sous des <u>hypothèses</u> de prédictibilité asymptotique cf Hawking-Ellis (1973)).

On déduit par exemple de ce résultat que lors de la fusion de deux composantes d'un trou noir en une seule, la surface totale d'une section spatiale du trou noir ne peut qu'augmenter. En ce sens la surface d'une section spatiale du trou noir est analogue à l'entropie. Cette analogie thermodynamique peut d'ailleurs être étendue fort loin (voir plus bas). De même il est possible de décrire le comportement général de l'horizon par analogie avec le comportement mécanique et électrodynamique d'une "bulle" visqueuse possédant une résistivité électrique (surfacique) égale à 377 ohm (cf Damour (1978) et § 6 plus bas).

Pour clore ce paragraphe et avant de décrire les propriétés des trous noirs stationnaires, insistons sur le fait que l'étude des trous noirs n'a d'intérêt que si l'on admet la validité de la "conjecture de censure cosmique" de R. Penrose. Cette conjecture actuellement <u>non démontrée</u> stipule qu'un effondrement gravitationnel ne crée jamais de singularité nue mais tout au plus une singularité cachée derrière un horizon régulier.

§ 5. Trous noirs stationnaires.

Par stationnarité nous entendons l'existence d'un vecteur de Killing k orienté dans le temps à l'infini.

On normalise alors k de sorte que k^2 tende vers -1 à l'infini. En revanche k ne sera pas orienté dans le temps partout ne serait-ce que parce que k, devant laisser invariant l'horizon H^+ sera tangent à H^+ et sera par conséquent dirigé dans l'espace, ou isotrope, sur H^+.

Hawking [1973] a montré que toute section spatiale d'une composante connexe d'un tel horizon stationnaire avait la topologie d'une sphère. On admettra qu'un trou noir stationnaire est connexe, mais ceci reste indémontré.

Si l'on se restreint à étudier les trous noirs sans sources extérieures (gravitationnelles ou électro-magnétiques) une suite de résultats dus à Israel [1967], Carter [1970], Hawking [1972] et Robinson [1975] prouve, presque complètement, que de tels trous noirs sont décrits par une solution de Kerr-Newman (Newman et al [1965]). Une revue de ces théorèmes d'unicité a été donnée par Carter [1977], nous nous contenterons ici de signaler quelques points et quelques problèmes non encore résolus.

D'après ce que nous signalons au début de ce paragraphe, nous pouvons distinguer deux cas selon le comportement du vecteur de Killing k sur l'horizon :

a) k est isotrope sur H^+ (trou noir "non tournant"). Alors si l'on suppose, ce qui reste indémontré, que k est dirigé dans le temps à l'extérieur du trou noir, on peut montrer qu'un tel trou noir "non tournant" est une solution de Reissner [1916] et donc de Schwarzschild [1916] en l'absence de charge électrique.

b) k est orienté dans l'espace sur H^+ (trou noir "tournant"). Alors un théorème de Hawking [1972] [1973] prouve que l'espace-temps est axisymétrique.

Combinant ceci avec les résultats de B. Carter, Robinson [1975] a montré qu'un trou noir "tournant" non chargé était forcément une solution de Kerr [1963]. La généralisation de ce résultat en présence de charges électriques dans le trou noir est incomplète.

De même l'"unicité" des trous noirs "colorés" par des champs de Yang-Mills n'est pas complètement démontrée.

§ 6. Mécanique, électrodynamique et thermodynamique des trous noirs.

Carter [1973] avait montré que l'état stationnaire d'un trou noir était analogue à l'état d'équilibre d'un corps tournant possédant une viscosité et une résistivité électrique finie. Cependant ce n'est que récemment qu'il a été montré que le comportement général (non stationnaire) de l'horizon d'un trou noir pouvait s'interpréter en détail en considérant que les générateurs de l'horizon décrivaient le mouvement des particules d'une "bulle" fluide (Damour [1978]). Cette "bulle" possède une pression interne et est munie d'une viscosité de cisaillement $((16\pi)^{-1})$ et d'une viscosité de dilatation $(-(16\pi)^{-1})$ (Damour [1978]). De plus cette bulle peut être parcourue par des courants électriques superficiels satisfaisant à la loi d'Ohm [Damour 1977a] et à la loi de Joule (Znajek [1977]). Il faut pour cela munir le trou noir d'une résistivité électrique superficielle égale à $4\pi = 377$ ohm .

Enfin la dissipation visqueuse et l'effet Joule ont tendance à augmenter la surface S_H d'une section spatiale du trou noir. Ceci confirme l'idée, introduite par les travaux de Christodoulou [1970], Hawking [1971] et Bekenstein [1973], qu'un certain multiple de S_H représente l'entropie du trou noir. La valeur exacte de ce multiple a été obtenue par Hawking [1975]. En étudiant certains effets quantiques associés aux trous noirs, il a montré qu'un trou noir était le siège d'un phénomène d'évaporation thermique. La température associée à un trou noir étant ainsi fixée, il en déduisit que l'entropie associée à un trou noir était égale à

$$S_H / 4\hbar$$

où $\hbar$ est la constante de Planck (divisée par 2π).

§ 7. Effets quantiques des trous noirs.

L'étude de champs quantifiés se propageant dans la métrique de fond d'un trou noir stationnaire est intéressante à plus d'un titre :

- D'un point de vue mathématique elle pose de façon encore plus aiguë que d'habitude le problème de la décomposition en "fréquences" positives et négatives, c'est-à-dire le problème de la définition des particules et des antiparticules dans un champ extérieur. Ce problème n'a pas encore reçu de solution générale.

- D'un point de vue physique elle prédit de nouveaux effets : décharge quantique d'un trou noir, existence d'états quantiques instables, évaporation thermique.

Pour une revue de ces résultats, y compris un calcul simple de la température d'un trou noir cf Damour [1977b].

B I B L I O G R A P H I E

L'exposé le plus complet des propriétés mathématiques des trous noirs se trouve dans le livre

S.W. HAWKING et G.F.R. ELLIS [1973] "The large scale structure of space-time" Cambridge University Press, Cambridge.

Les propriétés mathématiques et physiques des trous noirs découvertes avant 1973 sont exposées dans les livres :

C. et B. DE WITT [1973] Ed. "Black Holes" Gordon and Breach, New-York.

C.W. MISNER, K.S. THORNE et J.A. WHEELER [1973] "Gravitation" W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Les résultats découverts plus récemment sont exposés dans :

B. CARTER [1978] Einstein Centenary Contribution dans "General Relativity" édité par S.W. Hawking et W. Israel. Cambridge University Press, Cambridge (sous presse, devant paraître en 1979).

T. DAMOUR [1978] "Propriétés mécaniques, électromagnétiques, thermodynamiques et quantiques des trous noirs" Thèse de doctorat d'Etat en Physique Théorique, Université P. et M. Curie (Paris VI).

- liste de références aux travaux originaux :

J.D. BEKENSTEIN [1973] Phys. Rev. D 7, 2333.

G.D. BIRKHOFF [1923] "Relativity and Modern Physics" Harvard University Press, Cambridge, Mass.

B. CARTER [1970] Phys. Rev. Lett. 26, 331.

B. CARTER [1973] in C. et B. DE WITT voir livres plus haut.

B. CARTER [1977] in "Marcel Grossmann Meeting on General Relativity". Edité par R. Ruffini North-Holland, Amsterdam.

B. CARTER [1978] Einstein Centenary Contribution (voir plus haut).

S. CHANDRASEKHAR [1931] Astrophys. J. 74, 81.

D. CHRISTODOULOU [1970] Phys. Rev. Letters 25, 1596.

T. DAMOUR [1977a] "Black hole eddy currents" Phys. Rev. D (sous presse).

T. DAMOUR [1977b] in "Marcel Grossmann Meeting on General Relativity". Edité par R. Ruffini, North. Holland, Amsterdam p. 459-482.

T. DAMOUR [1978] Thèse de Doctorat d'Etat (voir plus haut).

A. EINSTEIN [1915] Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber p. 778, p. 799, p. 831 et p. 844.

S.W. HAWKING [1967] Proc. Roy. Soc. A 300, 187.

S.W. HAWKING [1971] Phys. Rev. Lett. 26, 1344.

S.W. HAWKING [1972] Commun. Math. Phys. 25, 152.

S.W. HAWKING [1973] in C. et B. DE WITT (voir plus haut).

S.W. HAWKING et G.F.R. ELLIS [1973] (voir plus haut).

W. ISRAEL [1967] Phys. Rev. 164, 1776.

R.P. KERR [1963] Phys. Rev. Lett. 11, 237.

L.D. LANDAU [1932] Phys. Z. Sowjetunion I, 285.

P.S. LAPLACE [1795] "Le Système du Monde" vol II Paris cf le livre de Misner, Thorne et Whaler et l'appendice A du livre de Hawking et Ellis.

E.T. Newman et al. [1965] J. Math. Phys. 6, 918.

J.R. OPPENHEIMER et H. SNYDER [1939] Phys. Rev. 56, 455.

J.R. OPPENHEIMER et G. VOLKOFF [1939] Phys. Rev. 55, 374.

R. PENROSE [1964] in "Relativity, Groups and Topology" C. et B. DE WITT, éd., Gordon and Breach, New-York.

R. PENROSE [1968] in "Battelle Rencontres 1967" C. DE WITT et J.A. WHEELER éd., W.A. Benjamin, New-York.

H. REISSNER [1916] An. Phys. (Germany) 50, 106.

D.C. ROBINSON [1975] Phys. Rev. Lett. 34, 905.

K. SCHWARZSCHILD [1916] Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech. 189-196.

R.L. ZNAJEK [1977] "Black hole electric and magnetic conductivity" preprint Institute of Astronomy, Cambridge.

OBSERVATOIRE DE PARIS

92190 MEUDON