

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

WERNER O. AMREIN

## **La section efficace dans le problème à 2 et à 3 corps en mécanique quantique**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1979, tome 27*  
« Conférences de : W.O. Amrein, H. Brezis, T. Damour, R. Flume, B. Gaveau et I. Ekeland », , exp. n° 1, p. 1-30

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1979\\_\\_27\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1979__27__1_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*La Section efficace dans le problème à 2  
et à 3 corps en mécanique quantique*

*par*

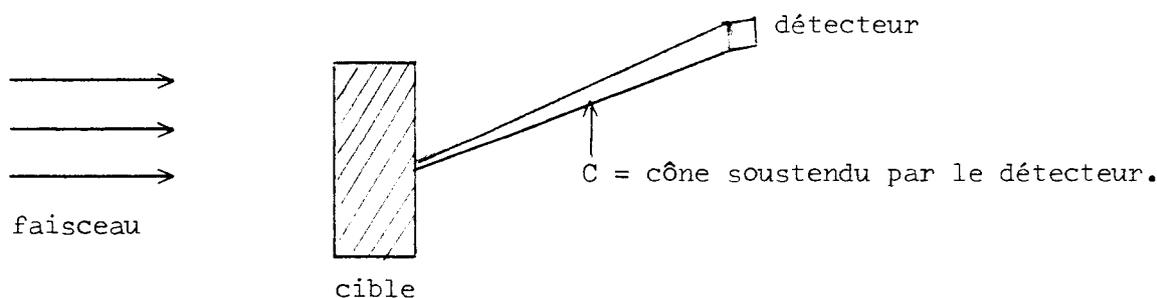
*Werner O. AMREIN*

*Département de Physique Théorique*

*Université de Genève*

1. - INTRODUCTION

Nous commençons par quelques généralités, puis nous indiquons l'organisation de la suite. Dans une expérience de diffusion, on envoie sur une cible un faisceau de particules vérifiant des conditions initiales bien précises et l'on observe l'état des particules diffusées à l'aide de détecteurs placés à divers endroits de l'espace.



La théorie devrait fournir les propriétés du taux de détection en fonction des conditions initiales, en supposant connue l'interaction entre le faisceau et la cible. Le taux de détection est appelé la section efficace. Une définition plus précise sera donnée plus loin. Les conditions initiales comprendront entre autres l'énergie cinétique  $\lambda$  et la direction de propagation  $\omega_0$  des particules du faisceau.

Pour obtenir une description théorique, on divise la question en deux problèmes bien distincts. Pour cela, on remarque que le faisceau est constitué d'un grand nombre de particules identiques (par exemple un faisceau de protons). De même la cible est composée d'un grand nombre de centres de diffusion identiques, par exemple certains noyaux atomiques. Les deux problèmes sont alors les suivants :

- (I) Etudier la diffusion d'une seule particule du faisceau par un seul centre de diffusion,
- (II) en utilisant les résultats de (I), donner une description statistique de la situation réelle.

Les particules constituant le faisceau et la cible peuvent être élémentaires ou composées de systèmes dits élémentaires. Par exemple un proton sera d'habitude considéré comme élémentaire, tandis qu'un noyau atomique sera considéré comme étant composé de protons et de neutrons, ces derniers étant élémentaires. On peut donc supposer que chaque particule du faisceau est constituée de  $n_f$  parties élémentaires et chaque centre de diffusion de  $n_c$  parties élémentaires. On parle alors d'un problème à  $n$  corps, où  $n = n_f + n_c$ .

Exemples :

(i)  $n_f = n_c = 1$  ;  $n = 2$ . Les constituants du faisceau et de la cible sont élémentaires.

(ii)  $n_f = 1$ ,  $n_c = 2$  ou  $n_f = 2$ ,  $n_c = 1$  ;  $n = 3$ . Un constituant est élémentaire, l'autre est composé de deux parties élémentaires.

Il faut remarquer que le nombre  $n$  est le nombre de systèmes élémentaires intervenant dans le problème (I) et n'a rien à voir par exemple avec le nombre de particules dans le faisceau.

Nous donnons maintenant la définition de la section efficace pour  $n = 2$ . Soit  $C$  le cône sous-tendu par un détecteur. On suppose qu'on a un flux constant du faisceau, donc une situation stationnaire, et que le faisceau est spatialement homogène.

On suppose que  $C$  ne contient pas la direction de propagation  $\omega_0$  du faisceau, pour être sûr que le détecteur n'enregistre que des particules qui ont réellement été diffusées. On pose alors :

$$\sigma(C) = \frac{N_{\text{diff}}(C)}{N_{\text{inc}}} , \quad (1)$$

où  $N_{\text{diff}}(C)$  est le nombre de particules diffusées dans  $C$  par unité de temps et  $N_{\text{inc}}$  le nombre de particules incidentes par unité de surface et unité de temps.

$\sigma$  est une fonction de  $C$  ainsi que des conditions initiales du faisceau et de la cible. On peut considérer que  $\sigma$  définit une mesure borélienne sur  $S^{(2)} \setminus \omega_0$  (en admettant que les valeurs de  $N_{\text{diff}}(C)$  et  $N_{\text{inc}}$  peuvent être non-entières). On définit alors :

Section efficace différentielle  $\frac{d\sigma}{d\omega}(\omega)$  = dérivée de Radon-Nikodym de  $\sigma$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $S^{(2)}$ , où  $\omega \in S^{(2)}$  désigne la variable sur la sphère et  $d\omega$  la mesure de Lebesgue. Donc

$$\sigma(C) = \int_C \frac{d\sigma}{d\omega}(\omega) d\omega . \quad (2)$$

Section efficace totale :

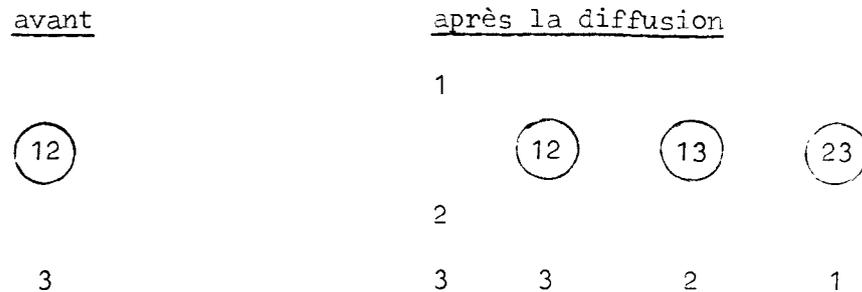
$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma(S^{(2)} \setminus \omega_0) = \int_{S^{(2)}} \frac{d\sigma}{d\omega}(\omega) d\omega . \quad (3)$$

Cette dernière grandeur peut être infinie, puisque  $\frac{d\sigma}{d\omega} \in L^1_{\text{loc}}$  sur  $S^{(2)} \setminus \omega_0$  mais pas nécessairement au point  $\omega_0$ .

La désignation "section efficace" s'explique comme suit : si l'on calcule en mécanique classique la grandeur  $\sigma_{\text{tot}}$  pour la diffusion d'une particule ponctuelle par un potentiel à symétrie sphérique  $V(|x|)$ , alors  $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$ , où  $R$  est le plus petit nombre réel tel que  $V(r) = 0$ , pour tout  $r > R$ . Dans ce cas  $\sigma_{\text{tot}}$  est simplement la surface dans un plan présentée comme obstacle au passage de la particule par le potentiel.

Dans le problème à trois corps la situation est plus complexe, puisqu'un des deux systèmes participant à la diffusion est composé. Sous l'influence de l'interaction, ce système composé peut éventuellement se désintégrer, ce qui donnerait trois systèmes élémentaires après la diffusion. Une autre possibilité est la formation d'un nouveau système composé par échange d'un composant.

Symboliquement :



On a donc quatre voies de diffusion. La première sera désignée par un index 0, pour les autres on utilisera des lettres latines minuscules a, b, c, d. a peut prendre trois valeurs et il est commode de convenir que ce sont les paires (1,2), (1,3) et (2,3).

Les trois dernières voies de diffusion sont encore subdivisées en ce que l'on appelle les canaux de diffusion. Ceci se fait en spécifiant l'état interne du système composé. Pour le moment nous supposons que l'état interne est entièrement spécifié par l'énergie de liaison. Nous utilisons des lettres grecques  $\alpha, \beta, \gamma$  pour désigner les canaux. Nous utilisons la notation  $\alpha \sim d$  pour indiquer qu'un canal  $\alpha$  correspond à la voie d. L'énergie de liaison du système composé dans le canal  $\alpha$  sera désignée par  $\lambda_\alpha$ . La voie 0 est parfois aussi appelée canal.

La diffusion est initiée dans un canal  $\alpha$  associé à une des trois dernières voies. On aura une section efficace  $\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}$  pour chaque  $\beta$ , essentiellement définie comme auparavant. Pour un canal  $\beta$  à deux fragments, on observe par exemple le fragment composé, et on posera alors

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(C) = \frac{N_{\text{diff}}^{\beta}(C)}{N_{\text{inc}}^{\alpha}}, \quad (4)$$

où  $N_{\text{diff}}^{\beta}(C)$  est le nombre de particules composées avec énergie de liaison  $\lambda_{\beta}$  diffusées dans  $C$  et  $N_{\text{inc}}^{\alpha}$  le nombre de particules incidentes par unité de surface. Si  $\beta = 0$ , on observe la direction de deux des trois systèmes élémentaires sortants ainsi que la fraction d'impulsion emportée par le centre de masse de ces deux systèmes.  $\sigma_{\alpha \rightarrow 0}(\Sigma)$  est alors défini comme dans les autres cas, la seule différence étant que  $\Sigma$  est un sous-ensemble d'une variété à 5 dimensions  $\mathcal{E}^{(5)}$  et non plus à 2 dimensions.  $\mathcal{E}^{(5)}$  sera spécifiée plus tard.

On peut alors définir les sections efficaces différentielles partielles  $d\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}/d.$  et les sections efficaces totales partielles comme auparavant :

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{tot}} = \int_{S^{(2)} \text{ ou } \mathcal{E}^{(5)}} \frac{d\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\cdot)}{d.} d. \quad (5)$$

On pose encore 
$$\sigma_{\alpha}^{\text{tot}} = \sum_{\beta} \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{tot}}. \quad (6)$$

Quelles sont les questions qui se posent ?

(a) Obtenir une expression pour  $\sigma$  en termes d'objets associés à l'espace de Hilbert correspondant au problème à 2 ou à 3 corps.

(b) Est-ce que  $\sigma_{\text{tot}}$  est finie ou non ?

(c) Discussion de  $d\sigma/d.$  et  $\sigma_{\text{tot}}$  comme fonction des conditions initiales (par exemple la continuité de ces fonctions) .

(d) Comportement de  $\sigma$  à très haute et très basse énergie, et aux seuils dans le problème à 3 corps.

(e) Maxima de  $\sigma_{\text{tot}}$  .

La méthode qui donne les réponses les plus complètes à ces questions est la méthode dite stationnaire, basée sur l'étude de la résolvante  $(H - z)^{-1}$

de l'hamiltonien  $H$  au voisinage de l'axe réel. Cette méthode est au point pour  $n = 2$  et  $n = 3$  mais présente encore d'énormes difficultés pour  $n > 3$ . Quelques travaux consacrés explicitement au problème de la section efficace pour le cas  $n = 2$  se trouvent dans la littérature de physique [1-3], tandis que dans la littérature mathématique on étudie plutôt les propriétés de la matrice de diffusion (voir par exemple [4-8]). Une approche stationnaire purement hilbertienne traitant les quatre premières questions en détail pour  $n = 2$  et partiellement pour  $n = 3$  est donnée dans [9], et notre exposé est basé sur ce texte. Finalement, il faut mentionner les travaux [10,11] utilisant la théorie des opérateurs nucléaires ainsi qu'une approche dépendante du temps assez simple qui fût développée à la suite de cet exposé [12]. Cette dernière méthode est applicable au problème à  $n$  corps pour  $n$  quelconque [13] et donne des bornes sur  $\int h(\lambda) \sigma_{\text{tot}}(\lambda) d\lambda$ , où  $h$  appartient à une classe de fonctions lisses.

Voici un aperçu de la suite :

- A. Résumé de la théorie de la diffusion, donnant le cadre mathématique de la théorie. Nous définirons en particulier la matrice de diffusion qui est l'objet central de la théorie.
- B. Description statistique. Nous indiquons la solution du problème (II) en faisant certaines hypothèses sur la matrice de diffusion.
- C. Propriétés de la matrice de diffusion, décrivant la méthode stationnaire pour vérifier ces hypothèses.

## 2. - RESUME DE LA THEORIE DE LA DIFFUSION.

L'espace de Hilbert pour  $n$  particules est  $L^2(\mathbb{R}^{3n}) \otimes \mathbb{C}^l$ . Nous prenons ici le cas où les particules se déplacent dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  à trois dimensions. La généralisation des résultats principaux à  $\nu > 3$  dimensions est obtenue assez facilement. Les variables  $x_1, \dots, x_n$  ( $x_i \in \mathbb{R}^3$ ) décrivent les positions des

Particules, le facteur  $\mathcal{C}^l$  les spins. Nous posons  $l = 0$ .

L'hamiltonien est un opérateur différentiel autoadjoint de la forme

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{-\Delta_k}{2m_k} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} V_{jk}(x_j - x_k) . \quad (7)$$

L'équation du mouvement dans l'espace de Hilbert est

$$i \frac{df(t)}{dt} = H f(t) , \quad f(t) \in D(H) , \quad (8)$$

ou sous forme intégrée :

$$f(t) = e^{-iHt} f(0) . \quad (9)$$

Comme l'interaction ne dépend que des positions relatives, l'évolution du centre de masse est triviale. On factorise  $L^2(\mathbb{R}^{3n}) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^{3n-3})$ , où la variable dans le premier facteur est la position du centre de masse et on ne regarde que le mouvement relatif des  $n$  particules décrit dans  $L^2(\mathbb{R}^{3n-3})$ . On obtient après cette réduction :

$$\begin{aligned} \underline{n = 2} : \quad \mathfrak{H} &= L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{avec } x = x_1 - x_2 . \\ H &= - \frac{\Delta}{2\mu} + V(x) = \frac{p^2}{2\mu} + V \equiv H_0 + V . \end{aligned} \quad (10)$$

Ici  $P = -i \text{ grad}$ , et nous poserons  $2\mu = 1$  dans la suite.

$$\underline{n = 3} : \quad \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^6) .$$

Ici il y a plusieurs façons de choisir des coordonnées relatives. Nous utiliserons trois systèmes de telles coordonnées. Si  $c$  désigne une paire de particules :

$x_c$  = distance relative entre cette paire,  
 $y_c$  = distance entre la troisième particule et le centre de masse de la paire.

$$\begin{aligned} \text{Nous posons} \quad P_c &= -i \text{ grad}_{x_c} \\ K_c &= -i \text{ grad}_{y_c} . \end{aligned}$$

On obtient alors pour tout  $c$  :

$$H = \gamma_c P_c^2 + \eta_c K_c^2 + \sum_b V_b \equiv H_o + V . \quad (11)$$

Ici  $\gamma_c$  et  $\eta_c$  sont des constantes qui dépendent des masses  $m_k$  et  $V$  est la somme des trois potentiels à deux corps. Il est essentiel pour la suite de remarquer que chaque  $V_b$  ne dépend que de trois des six variables.

Hypothèses sur les potentiels : nous supposons que

$$\begin{aligned} & V, V_b \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \\ \text{et} \quad & \left. \begin{aligned} V(x) &= O(|x|^{-\theta}) \\ V_b(x) &= O(|x|^{-\theta_b}) \end{aligned} \right\} \text{ pour } |x| \rightarrow \infty . \quad (12) \end{aligned}$$

Ces conditions ne sont pas optimales, mais ce qui nous intéresse le plus, c'est la dépendance des résultats de la décroissance à l'infini, c'est-à-dire des nombres  $\theta$ . Par exemple pour  $n = 2$  et  $V$  à symétrie sphérique, les textes de mécanique quantique indiquent que, pour avoir  $\sigma_{tot} < \infty$ , il faut que  $\theta > 2$ . Des potentiels ayant de fortes singularités locales sont traités dans [3] et [12].

On introduit encore les hamiltoniens partiels qui contiennent seulement l'interaction entre une paire de particules :

$$H_d = H_o + V_d = (\gamma_d P_d^2 + V_d) + \eta_d K_d^2 . \quad (13)$$

A ce point il est utile d'écrire  $L^2(\mathbb{R}^6)$  comme produit tensoriel

$$L^2(\mathbb{R}^6) = L_{x_d}^2(\mathbb{R}^3) \otimes L_{y_d}^2(\mathbb{R}^3) , \quad (14)$$

ce qui donne

$$H_d = (-\gamma_d \Delta_{x_d} + V_d) \otimes I + I \otimes \eta_d K_d^2 . \quad (15)$$

Nous posons  $h_d = -\gamma_d \Delta_{x_d} + V_d$  en tant qu'opérateur dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .  $h_d$  est donc un hamiltonien à 2 corps. On regarde sa décomposition spectrale.

Plus particulièrement, soit  $\mathcal{M}_p(h_d)$  le sous-espace de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  engendré par tous les vecteurs propres de  $h_d$ . Sous les hypothèses faites, on sait que la partie de  $h_d$  dans  $\mathcal{M}_p(h_d)^\perp$  est absolument continue, c'est-à-dire  $\mathcal{M}_p(h_d)^\perp = \mathcal{M}_{ac}(h_d)$ . Les vecteurs dans  $\mathcal{M}_{ac}(h_d)$  sont appelés les états de diffusion de  $h_d$ , puisqu'on peut montrer que

$$f \in \mathcal{M}_{ac}(h_d) \Leftrightarrow \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{|x_d| \leq r} dx_d |(e^{-ih_d t} f)(x_d)|^2 = 0 \quad \forall r < \infty,$$

c'est-à-dire la distance relative tend vers infini pour des temps très grands.

Les vecteurs dans  $\mathcal{M}_p(h_d)$  sont les états liés de  $h_d$ , puisque

$$f \in \mathcal{M}_p(h_d) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{|x_d| \geq r} dx_d |(e^{-ih_d t} f)(x_d)|^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour tout temps, la possibilité pour que la distance relative soit plus grande que  $r$  reste aussi petite que l'on veut, pourvu que  $r$  soit suffisamment grand. Voir [9, chapitre 7-1].

Le sous-espace  $\mathcal{M}_p(h_d)$  des états liés de  $h_d$  sert à définir la voie de diffusion où la paire  $d$  est liée. Ceci sera le cas pour tous les vecteurs de  $L^2(\mathbb{R}^6)$  dans le sous-espace.

$$\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_p(h_d) \otimes L^2(\mathbb{R}^3), \quad (16)$$

qui est invariant sous la groupe d'évolution  $\{\exp(-iH_d t)\}$ .

Nous écrivons  $E_d$  pour la projecteur orthogonal sur  $\mathcal{M}_d$ .

Pour décrire les canaux associés à la paire  $d$ , on fixe une base orthonormée de vecteurs propres  $\{e_\alpha\}$  de  $h_d$  dans  $\mathcal{M}_p(h_d)$ . A chaque vecteur propre correspond un canal ainsi qu'un sous-espace de  $\mathcal{M}_d$ , à savoir

$$\mathcal{M}_\alpha = e_\alpha \otimes L^2(\mathbb{R}^3). \quad (17)$$

On a donc

$$\mathcal{M}_d = \bigoplus_{\alpha \sim d} \mathcal{M}_\alpha \quad \text{ou} \quad E_d = \sum_{\alpha \sim d} E_\alpha. \quad (18)$$

Si  $f = e_\alpha \otimes g \in \mathcal{M}_\alpha$ , la paire  $d$  est liée dans l'état  $e_\alpha(x_d)$  avec énergie de liaison  $\lambda_\alpha$  ( $h_\alpha e_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$ ), tandis que l'état de la troisième particule est arbitraire (donné ici par la fonction  $g(y_\alpha)$ ).

Notons encore que la restriction de  $H_d$  à  $\mathcal{M}_\alpha$  est simplement

$$H_d|_{\mathcal{M}_\alpha} \equiv H_\alpha = \eta_d K_d^2 + \lambda_\alpha. \quad (19)$$

Nous formulons maintenant la condition asymptotique qui est le postulat de base de la théorie de la diffusion. Pour  $n = 2$  : soit  $f \in \mathcal{M}_{ac}(H)$  un état de diffusion pour l'hamiltonien  $H = H_0 + V$ . On demande qu'il existe deux états  $f_\pm \in L^2(\mathbb{R}^3)$  tels que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \| e^{-iHt} f - e^{-iH_0 t} f_\pm \| = 0, \quad (20)$$

donc que l'état  $f$  se comporte asymptotiquement comme un état libre ( $H_0$  est appelé l'hamiltonien libre, puisqu'il ne contient pas le potentiel  $V$ ).

L'application  $f_- \mapsto f_+$  est appelée l'opérateur de diffusion  $S$ .  $S$  décrit le changement des états dû à l'interaction :  $f_-$  est interprété comme un état initial au temps  $t = 0$ ,  $f_+$  comme l'état final correspondant.

Mathématiquement la condition asymptotique est formulée d'habitude de la façon suivante :

$$(i) \text{ Il existe } s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \equiv \Omega_\pm. \quad (A 1)$$

$\Omega_\pm$  sont appelés les opérateurs d'onde.

(ii) Complétude asymptotique :

$$\Omega_+ \mathfrak{H} = \Omega_- \mathfrak{H} = \mathcal{M}_{ac}(H) = \mathcal{M}_p(H)^\perp. \quad (A 2)$$

Il est immédiat de ces hypothèses que :

$$\Omega_\pm \text{ sont isométriques,} \quad (21)$$

$$e^{-iHt} \Omega_\pm = \Omega_\pm e^{-iH_0 t}, \quad (22)$$

$$S \equiv \Omega_+^* \Omega_- \text{ est unitaire,} \quad (23)$$

$$e^{-iH_0 t} S = S e^{-iH_0 t}. \quad (24)$$

Matrice de diffusion  $S(\lambda)$

On diagonalise  $H_0$ , c'est-à-dire on écrit  $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2((0, \infty), L^2(S^{(2)}))$ . Ceci se fait en prenant des coordonnées sphériques dans l'espace des impulsions, c'est-à-dire en identifiant

$$f \longleftrightarrow \{f_\lambda(\omega)\}, \lambda \in (0, \infty), \omega \in S^{(2)}$$

où 
$$f_\lambda(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{\frac{1}{4}} \tilde{f}(\lambda^{\frac{1}{2}}\omega) . \quad (25)$$

On a

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty d\lambda \int_{S^{(2)}} d\omega |f_\lambda(\omega)|^2 \quad (26)$$

et

$$H_0 f \longleftrightarrow \{\lambda f_\lambda\} .$$

Comme  $S$  commute avec  $H_0$ , il est décomposable dans cette représentation, c'est-à-dire il existe une application mesurable  $\lambda \mapsto S(\lambda) \in \{\text{opérateurs unitaires dans } L^2(S^{(2)})\}$  telle que

$$Sf \longleftrightarrow \{S(\lambda)f_\lambda\} .$$

$S(\lambda)$  est appelé la matrice de diffusion à énergie  $\lambda$ .

Regardons l'analogie dans le cas  $n = 3$ . Les opérateurs d'onde sont définis pour chaque canal  $\alpha$  par

$$(i) \quad \Omega_\pm^\alpha = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_\alpha t} E_\alpha \quad (B 1)$$

La présence du projecteur  $E_\alpha$  sur le sous-espace  $\mathcal{M}_\alpha$  s'explique par le fait que les états de diffusion asymptotiques pour un canal  $\alpha$  doivent être précisément les états dans  $\mathcal{M}_\alpha$ . (Pour  $\alpha = 0$ ,  $E_\alpha$  est l'opérateur identité  $I$ ).

$\Omega_\pm^\alpha$  sont des isométries partielles, et nous notons  $F_\pm^\alpha \equiv \Omega_\pm^\alpha \Omega_\pm^{\alpha*}$  le projecteur orthogonal avec image  $\Omega_\pm^\alpha \mathcal{H} : F_\pm^\alpha \mathcal{H} = \Omega_\pm^\alpha \mathcal{H}$ .

(ii) Unicité de la décomposition asymptotique :

$$\Omega_+^\alpha \mathcal{H} \perp \Omega_+^\beta \mathcal{H}, \Omega_-^\alpha \mathcal{H} \perp \Omega_-^\beta \mathcal{H} \quad \forall \alpha \neq \beta . \quad (B 2)$$

Si  $f \in \Omega_+^\alpha \mathbb{H}$ , alors  $e^{-iHt} f$  sera asymptotique pour  $t \rightarrow +\infty$  à un état dans le canal  $\alpha$ . Si  $g$  est un état de diffusion de  $H$  quelconque, on peut écrire

$$g = \sum_{\alpha} F_+^{\alpha} g + h .$$

$F_+^{\alpha} g$  représente la composante de  $g$  qui sera asymptotiquement dans le canal  $\alpha$ , et l'hypothèse (B 2) garantit que cette décomposition est unique. La dernière condition, la complétude asymptotique, implique que  $h = 0$  :

$$(iii) \quad \bigoplus_{\alpha} F_+^{\alpha} \mathbb{H} = \bigoplus_{\alpha} F_-^{\alpha} \mathbb{H} = \mathcal{M}_{ac}(H) . \quad (B 3)$$

Les postulats (B<sub>1</sub>) (existence de  $\Omega_{\pm}^{\alpha}$ ) ; (B 2) et (B 3) expriment la condition asymptotique pour le cas  $n = 3$ .

Opérateurs de diffusion : il y a un opérateur de diffusion  $S_{\beta\alpha}$  pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  :

$$S_{\beta\alpha} = \Omega_+^{\beta*} \Omega_-^{\alpha} . \quad (27)$$

Son interprétation est la suivante : si  $f \in \mathcal{M}_{\alpha}$  est un état initial dans le canal  $\alpha$ , alors  $S_{\beta\alpha} f$ , qui appartient à  $\mathcal{M}_{\beta}$ , est la partie de l'état final dans le canal  $\beta$ . On a

$$e^{-iH_{\beta}t} S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha} e^{-iH_{\alpha}t} . \quad (28)$$

On diagonalise  $H_{\alpha}$  comme auparavant :

$$\alpha \neq 0 : \mathcal{M}_{\alpha} = L^2((\lambda_{\alpha}, \infty), L^2(S^{(2)})) , \quad (29)$$

$$\alpha = 0 : \mathcal{M}_0 = L^2((0, \infty), L^2(\mathcal{E}^{(5)})) , \quad (30)$$

où  $\mathcal{E}^{(5)}$  est l'ellipsoïde à cinq dimensions :

$$\mathcal{E}^{(5)} = \{ (p_a, k_a) \in \mathbb{R}^6 \mid \gamma_a p_a^2 + \eta_a k_a^2 = 1 \} . \quad (31)$$

Nous posons  $G_{\alpha} = L^2(S^{(2)})$  pour  $\alpha \neq 0$  et  $G_0 = L^2(\mathcal{E}^{(5)})$ . On aura

$$\begin{aligned} \text{si} \quad & \mathcal{M}_{\alpha} \ni f \longleftrightarrow \{f_{\lambda}\} , \quad (f_{\lambda} \in G_{\alpha}) \\ \text{alors} \quad & S_{\beta\alpha} f \longleftrightarrow \{S_{\beta\alpha}(\lambda) f_{\lambda}\} \end{aligned} \quad (32)$$

où  $\{S_{\beta\alpha}(\lambda)\}$  est une famille mesurable d'applications  $G_\alpha \rightarrow G_\beta$ .

La condition asymptotique est vérifiée :

$n = 2$  : si  $\theta > 1$ .

(si  $\theta \leq 1$ , les opérateurs d'onde n'existent en général pas).

$n = 3$  : (B 1) et (B 2) pour  $\theta_b > 1$ , (B 3) pour  $\theta_b > 2$ .

Pour  $1 < \theta_b < 2$ , (B 3) n'a été démontré que pour certains cas particuliers [14]. La difficulté est la suivante : si  $\theta_b > 2$ , l'opérateur  $h_b = -\Delta + V_b$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, strictement négatives, ce qui entraîne en particulier la finitude du nombre de canaux. Si  $\theta_b < 2$ , les valeurs propres de  $h_b$  peuvent s'accumuler au point  $\lambda = 0$ , et dans toutes les méthodes développées pour traiter le problème à 3 corps il est essentiel de pouvoir séparer par un ouvert le spectre ponctuel de  $h_b$  de son spectre continu.

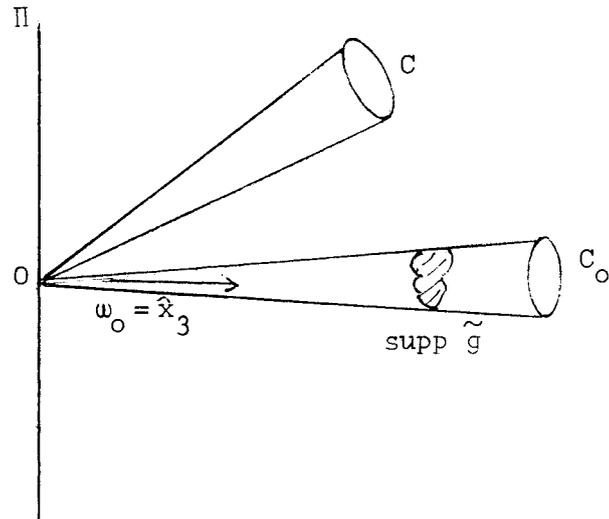
### 3. - LA SECTION EFFICACE.

Nous traitons ici le problème (II). Cette partie de la théorie est relativement simple. Nous décrivons le cas  $n = 2$ . Le cas  $n = 3$  est tout à fait analogue. Nous suivons [9, chapitre 7-3].

On suppose qu'on a un faisceau uniforme de particules sans corrélation et on prend d'abord un seul centre de diffusion. Le faisceau est décrit comme suit : on se donne une fonction d'onde  $g \leftrightarrow \{g_\lambda\}$  telle que

$$\text{supp } \{g_\lambda(\omega)\} \subseteq \Delta \times C_0, \quad |g_\lambda(\omega)| \leq M < \infty, \quad \|g\| = 1, \quad (33)$$

où  $\Delta$  est un compact dans  $(0, \infty)$  et  $C_0$  un cône fermé contenu dans un demi-espace.



On fixe un  $\omega_0 \in C_0 \cap S^{(2)}$ . On prend la direction  $x_3$  le long de  $\omega_0$  et désigne par  $\Pi$  le plan  $\{x_1/x_2\}$ .

On considère un ensemble statistique d'états  $g_q$  :

$$g_q(x) = g(x-q), \text{ ou } \tilde{g}_q(k) = e^{iK \cdot q} \tilde{g}(k), \quad (34)$$

où les valeurs de  $q$  sont distribuées de façon uniforme dans  $\Pi$  (c'est-à-dire  $g_q$  est obtenu de  $g$  par une translation de  $g$  dans le plan  $\Pi$ ).

Soit  $C$  un cône fermé tel que  $C \cap C_0 = \{0\}$ . Soit  $P(g_q, C)$  la probabilité que l'état de diffusion associé à  $g_q$ , c'est-à-dire l'état  $\Omega_- g_q$ , se trouve dans  $C$  au temps  $t = +\infty$  :

$$P(g_q, C) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_C dx |(e^{-iHt} \Omega_- g_q)(x)|^2. \quad (35)$$

THEOREME (DOLLARD [15]) :

$$P(g_q, C) = \int_C dk |(\tilde{S}g_q)(k)|^2. \quad (36)$$

Le théorème dit que  $P(g_q, C)$  n'est rien d'autre que la probabilité pour que l'impulsion de l'état final  $Sg_q$  se trouve dans  $C$ , en parfait accord avec l'intuition.

Pour la démonstration, on remarque que  $\exp(-iHt) \Omega_- g_q \approx \exp(-iH_0 t) Sg_q$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , et le résultat exprime alors une propriété élémentaire du groupe

d'évolution associé à  $H_0 = -\Delta$ . Dans le cas  $n = 3$ , on obtient un théorème analogue (c'est le seul endroit dans cette partie où le cas  $n = 3$  est passablement plus compliqué que le cas  $n = 2$ , parce qu'il faut tenir compte de la structure des canaux).

Soit  $R = S - I$ . Puisque  $\tilde{g}(k) = 0$  pour  $k \in C$  :

$$P(g_q, C) = \int_C dk |(\widetilde{Rg}_q)(k)|^2 = \int_0^\infty d\lambda \int_{C \cap S^{(2)}} d\omega |(R(\lambda)g_{q\lambda})(\omega)|^2. \quad (37)$$

Nous savons que  $S(\lambda)$  est unitaire, et nous verrons que son spectre s'accumule au point  $z = 1$ . Le spectre de  $R(\lambda)$  va donc s'accumuler au point  $z = 0$ . Il n'est donc pas déraisonnable de faire l'hypothèse suivante :

Soit  $F_C$  le projecteur suivant dans  $L^2(S^{(2)})$  :

$$(F_C f)(\omega) = \chi_C(\omega) f(\omega), \quad (38)$$

où  $\chi_C$  est la fonction caractéristique de  $C \cap S^{(2)}$ .

(H 1)  $\lambda \mapsto F_C R(\lambda) F_{C_0}$  est continu de  $\Delta$  dans  $\mathfrak{B}_2$  si  $C \cap C_0 = \{0\}$ .

$\mathfrak{B}_2$  désigne la classe de Hilbert-Schmidt munie de la norme de Hilbert-Schmidt  $\|\cdot\|_{HS}$ . (H 1) implique qu'il existe un noyau  $R(\lambda; \omega, \omega')$  défini pour  $\omega' \in C_0$ ,  $\omega \notin C_0$  tel que

$$(F_C R(\lambda) F_{C_0} g)(\omega) = \int_{C_0} d\omega' R(\lambda; \omega, \omega') g(\omega') \quad (39)$$

et

$$R(\lambda; \dots) \in L^2(C \times C_0) \text{ si } C \cap C_0 = \{0\}. \quad (40)$$

Considérons maintenant le faisceau décrit plus haut. Nous supposons que les états  $g_q$  sont sans corrélation, donc diffusés de façon indépendante. Ceci veut dire que nous pouvons simplement additionner les probabilités individuelles pour obtenir le "nombre de particules diffusées dans  $C$ " :

$$\sigma(g, C) = \frac{1}{N_0} \sum_q P(g_q, C) = \sum_q (\Delta_q) P(g_q, C), \quad (41)$$

où  $N_0$  est le nombre de points  $q$  par unité de surface de  $\Pi$  et  $\Delta q = N_0^{-1}$ .

Dans la limite où la distribution des points  $q$  devient continue, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma(g, C) &= \int_{\Pi} dq P(g_q, C) \\ &= \int_{\Pi} dq \int_{\Delta} d\lambda \int_{C \cap S^{(2)}} d\omega \left| \int_{C_0} d\omega' R(\lambda; \omega, \omega') e^{i\sqrt{\lambda} \omega' \cdot q} g_{\lambda}(\omega') \right|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Sous l'hypothèse faite sur  $R(\lambda)$ , on peut permuter les trois premières intégrales et utiliser l'identité de Parseval pour évaluer l'intégrale sur  $dq$ , ce qui donne

$$\sigma(g, C) = (2\pi)^2 \int_{C \cap S^{(2)}} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \int_{C_0} d\omega' |R(\lambda; \omega, \omega')|^2 |g_{\lambda}(\omega')|^2 \frac{1}{\lambda \cos \theta'} \quad (43)$$

où  $\theta'$  est l'angle entre  $\omega_0$  et  $\omega'$ . Le dernier facteur provient d'un Jacobien, puisque pour appliquer l'identité de Parseval il faut remplacer la variable  $\omega'$  qui varie sur un morceau de  $S^{(2)}$  par une variable dans le plan tangent.

Fixons  $\lambda_0 \in \Delta$  et écrivons

$$|R(\lambda; \omega, \omega')|^2 = |R(\lambda_0; \omega, \omega_0)|^2 + \text{reste}. \quad (44)$$

Ceci entraîne que

$$\sigma(g, C) = (2\pi)^2 \int_{C \cap S^{(2)}} d\omega \underbrace{\int_{\Delta} d\lambda \int_{C_0} d\omega' |g_{\lambda}(\omega')|^2 |R(\lambda_0; \omega, \omega_0)|^2}_{1} \frac{1}{\lambda} + \text{reste} \quad (45)$$

Le reste ne dépend pas de la forme de  $\tilde{g}(k)$  mais seulement de son support. Il peut être rendu arbitrairement petit en choisissant  $\Delta$  et  $C_0$  suffisamment petits, pourvu que

$$(H 2) \quad \Delta \times C_0 \ni (\lambda, \omega') \mapsto \int_{C \cap S^{(2)}} d\omega |R(\lambda; \omega, \omega')|^2 \text{ soit continue.}$$

Dans le cas général, on peut obtenir la section efficace différentielle de (43);

elle dépend de l'état  $g$ . Sous l'hypothèse (H 2), on peut interpréter

$(2\pi)^2 \lambda^{-1} |R(\lambda; \omega, \omega')|^2$  comme  $d\sigma/d\omega(\lambda; \omega' \rightarrow \omega)$ , la section efficace différentielle pour la diffusion à énergie  $\lambda$  de la direction initiale  $\omega'$  dans la direction finale  $\omega$ .

Il est usuel d'appeler

$$f(\lambda; \omega' \rightarrow \omega) = - \frac{2\pi i}{\sqrt{\lambda}} R(\lambda; \omega, \omega') \quad (46)$$

l'amplitude de diffusion. On remarque que la section efficace différentielle est simplement son carré absolu.

Pour  $n = 3$ , on aura les mêmes résultats pour  $\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}$  pourvu que  $R_{\beta\alpha}(\lambda) = S_{\beta\alpha}(\lambda) - \delta_{\alpha\beta}$  vérifie l'analogie des hypothèses (H 1) et (H 2).

Pour finir cette partie, nous regardons encore la section efficace totale

$$\sigma_{t \circ t}(\lambda; \omega') = \int d\omega \frac{d\sigma}{d\omega}(\lambda; \omega' \rightarrow \omega) . \quad (47)$$

Il est utile de la moyenner sur la direction initiale :

$$\bar{\sigma}_{t \circ t}(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int d\omega' \sigma_{t \circ t}(\lambda; \omega') = \frac{\pi}{\lambda} \|R(\lambda)\|_{HS}^2 \quad (48)$$

Nous voyons que

$$\bar{\sigma}_{t \circ t}(\lambda) < \infty \Leftrightarrow (H 3a) \quad R(\lambda) \in \mathfrak{B}_2 .$$

$$\bar{\sigma}_{t \circ t}(\cdot) \text{ est continue } \Leftrightarrow (H 3b) \quad \lambda \mapsto R(\lambda) \text{ est continue par rapport } \\ \text{à } \|\cdot\|_{HS} .$$

Pour  $n = 3$  :

$$\overline{\sigma_{\alpha}^{t \circ t}}(\lambda) = \sum_{\beta} \overline{\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}^{t \circ t}}(\lambda) < \infty \Leftrightarrow (H 3c) \quad R_{\beta\alpha}(\lambda) \in \mathfrak{B}_2$$

pour tout  $\beta$  et (H 4) le nombre de canaux est fini.

Il reste à étudier (H 1) - (H 4). Pour cela, on dérivera une expression pour  $R(\lambda)$ . (H 4) est une propriété spectrale des opérateurs de Schrödinger à 2 corps. Nous avons déjà mentionné que  $\theta > 2$  implique (H 4) [16]. Avant de continuer avec la discussion de  $R(\lambda)$ , nous citons brièvement les résultats concernant (H 1) - (H 4).

Résumé des principaux résultats :

$n = 2$  : a)  $\theta > 2 \Rightarrow (H 1)$ , (H 2), (H 3 a,b),

b) si  $1 < \theta < 2$ , (H 3) n'est pas vrai. Dans ce cas,  $R(\lambda) \in \mathcal{B}_p$  pour tout  $p > 2/(\theta - 1)$ , où  $\mathcal{B}_p$  sont les classes de Schatten-von Neumann d'opérateurs compacts. (H 1) et (H 2) sont vrais sous des hypothèses convenables sur les dérivées du potentiel [17, 18].

$n = 3$  : Si  $\theta_b > 5/2$ , on a (H 1), (H 3c) et (H 4), tandis que (H 2) n'a pas été étudié ([19] et [9, chapitre 16]). Le résultat peut être étendu à  $\theta_b > 2$  [20], mais pour cela il faut modifier les équations utilisées dans [19].

La vérification de (H 1) et (H 3) se fait à partir de la formule pour  $R(\lambda)$ . La vérification de (H 2) et plus généralement des propriétés de continuité de l'amplitude de diffusion  $f(\lambda; \omega' \rightarrow \omega)$  nécessite l'étude préalable des fonctions propres de l'opérateur  $-\Delta + V$ .

Comme nous le verrons, des résultats du type (H 1) - (H 3) seront généralement vrais pour  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$ , où  $\Gamma$  est un ensemble fermé de mesure nulle.  $\Gamma$  contient le spectre singulier de l'opérateur  $-\Delta + V$  en question. Pour la classe de potentiels considérée ici, une étude spectrale plus poussée montre qu'en effet  $\Gamma \cap (0, \infty) = \emptyset$ .

Nos expressions pour la section efficace sont valables pour le cas d'un seul centre de diffusion. Si la cible contient  $N$  centres de diffusion, on peut simplement multiplier toutes les expressions par  $N$ , pourvu que ces centres soient distribués de façon aléatoire dans la cible. Dans le cas contraire (par exemple si la cible a une structure cristalline), il peut y avoir des effets d'interférence et notre dérivation n'est alors pas valable.

#### 4. - LA MATRICE DE DIFFUSION.

Nous passons maintenant à l'étude de la matrice de diffusion que nous ferons d'abord pour  $n = 2$ . Cette étude peut être divisée en trois parties :

- a) Théorie de la diffusion stationnaire.
- b) Etude de la résolvante de  $H$ .

c) Opérateurs de passage  $L^2(\mathbb{R}^3) \cong L^2(S^{(2)})$ , appelés "traces".

Les opérateurs de passage sont importants puisque  $S(\lambda)$  agit dans  $L^2(S^{(2)})$ , tandis que tous les autres opérateurs de la théorie étaient définis dans  $L^2(\mathbb{F}^3)$ .

a) Théorie de la diffusion stationnaire

Nous serons brefs sur ce point. La théorie stationnaire donne des expressions pour  $\Omega_{\pm}$  et  $S$  en termes de la résolvante et la famille spectrale des Hamiltoniens  $H$  et  $H_0$ .

Notation :  $R_z = (H - z)^{-1}$ ,  $R_z^0 = (H_0 - z)^{-1}$ ,

$\{E_{\lambda}^0\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  : famille de projecteurs spectraux de l'opérateur autoadjoint  $H_0$ .

En utilisant le théorème spectral, on obtient

$$\begin{aligned} \Omega_{+} &= s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \\ &= s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t} e^{iHt} e^{-iH_0 t} dt \\ &= s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \int_0^{\infty} dt e^{-\epsilon t} e^{iHt} \int e^{-i\lambda t} dE_{\lambda}^0 \\ &= s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow +0} i\epsilon \int R_{\lambda - i\epsilon} dE_{\lambda}^0, \end{aligned} \tag{49}$$

où le changement de l'ordre d'intégration dans le dernier pas peut être justifié. Les intégrales sont des intégrales de Riemann dans la topologie forte de  $\mathcal{B}(H)$ .

En utilisant la deuxième équation de la résolvante :

$$R_z = R_z^0 - R_z V R_z^0, \tag{50}$$

(49) peut être transformé en

$$\Omega_{+} = I - s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int R_{\lambda - i\epsilon} V dE_{\lambda}^0. \tag{51}$$

Cette équation porte le nom d'équation de Lippmann-Schwinger.

La dérivation rigoureuse de l'équation stationnaire pour l'opérateur de diffusion est passablement plus longue. On obtient

$$S - I = (\Omega_+^* - \Omega_-^*)M_- = s\text{-lim}_{\epsilon \rightarrow +0} s\text{-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int (R_{\lambda - i\epsilon}^0 - R_{\lambda + i\epsilon}^0)(V - VR_{\lambda + i\delta}V)dE_\lambda^0, \quad (52)$$

et au cours de la dérivation l'hypothèse de la complétude asymptotique est utilisée.

C'est à partir de l'équation (52) que nous allons obtenir une expression pour  $S(\lambda)$ . On voit qu'il faut posséder de l'information sur le comportement de la résolvante de  $H$  au voisinage de l'axe réel, c'est-à-dire au voisinage du spectre de  $H$ . Ceci nous amène au point b).

b) La résolvante de  $H$ .

On utilise ici une combinaison du théorème analytique de Fredholm avec un lemme sur les valeurs au bord de fonctions analytiques. Nous donnons d'abord ce dernier :

LEMME 1. Soit  $D$  le disque  $\{z \mid |z| < 1\}$ ,  $\bar{D}$  sa fermeture. Soit  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et continue sur  $\bar{D}$  et  $F(z) \neq 0$  pour un  $z \in D$ . Définissons  $\Gamma \equiv \{z \in S^{(1)} \mid F(z) = 0\}$ . Alors  $\Gamma$  est de mesure de Lebesgue nulle sur  $S^{(1)}$  et fermé.

Généralisation : Soit  $F : D \rightarrow \mathfrak{B}_\infty$  (classe des opérateurs compacts dans  $\mathfrak{H}$ , munie de la norme  $\|\cdot\|$ ).

Supposons  $F$  holomorphe et continue sur  $\bar{D}$ , et qu'il existe  $[I + F(z)]^{-1}$  pour un  $z \in D$ . Soit  $\Gamma = \{z \in S^{(1)} \mid [I + F(z)]^{-1} \text{ n'existe pas}\}$ . Alors  $\Gamma$  est de mesure nulle et fermé.

Le même résultat est vrai si l'on remplace  $D$  par le demi-plan  $\{z \mid \text{Im } z > 0\}$  et  $S^{(1)}$  par l'axe réel (il faut passer par une application conforme pour le démontrer).

Application : On factorise  $V(x) = A(x) B(x)$  et on prend

$$F(z) = B(H_0 - z)^{-1}A, \quad \text{Im } z > 0. \quad (53)$$

Exemples : i)  $A(x) = |V(x)|^{\frac{1}{2}}, \quad (54)$

$$\text{ii) } \quad A(x) = (1 + |x|)^{-\nu} \quad (\nu \leq \theta - \frac{1}{2}) . \quad (55)$$

Dans ces exemples la compacité de  $F(z)$  est facile à vérifier. Pour l'inversibilité, on remarque qu'en vertu de (50) ,

$$(I - BR_z A)(I + BR_z^{\circ} A) = I - B(R_z - R_z^{\circ} + R_z A B R_z^{\circ}) A = I .$$

On aura donc pour tout  $z$  avec  $\text{Im } z > 0$  :

$$(I + BR_z^{\circ} A)^{-1} = I - BR_z A . \quad (56)$$

La question de l'existence de la limite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(\lambda + i\epsilon)$  est plus délicate. Il y a plusieurs méthodes pour l'aborder. La plupart d'entre elles sont basées sur une méthode d'interpolation complexe (inégalité de Sobolev ou de Hausdorff-Young). Une méthode particulièrement simple à 3 dimensions est de remarquer que  $F(z)$  est un opérateur intégral dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  de noyau

$$\frac{1}{4\pi} B(x) \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{|x-y|} A(y) . \quad (57)$$

Si par exemple  $\theta > 2$  et si on prend la factorisation (55) , on peut, par des estimations élémentaires d'intégrales, montrer que c'est un noyau de Hilbert-Schmidt et que la limite de  $F(\lambda + i\epsilon)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  existe uniformément en  $\lambda$  [9, Lemma 9.13] .

Dans ces conditions, il existe  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  fermé et de mesure nulle tel que  $(I + BR_z^{\circ} A)^{-1}$  est continu dans  $\{z | \text{Im } z \geq 0\} \setminus \Gamma$  , donc  $I - BR_z A$  est continu dans ce domaine. Remarquons que

$$V - VR_z V = A(I + BR_z^{\circ} A)B = A(I + BR_z^{\circ} A)^{-1}B \quad (58)$$

est précisément l'expression qui apparaît dans l'équation stationnaire (52) pour  $S$  . Si on se restreint à un intervalle spectral  $\Delta$  fermé dans le complément de  $\Gamma$  (c'est-à-dire  $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$ ) , on peut tirer la limite  $\delta \rightarrow +0$  sous l'intégrale dans (52) . Plus précisément, avec la notation symbolique  $BR_{\lambda+i0}^{\circ} A$  pour  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} BR_{\lambda+i\epsilon}^{\circ} A$  , on montre que

$$(f, RE_{\Delta}^{\circ} g) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\Delta} (f, (R_{\lambda-i\epsilon}^{\circ} - R_{\lambda+i\epsilon}^{\circ}) A [I + BR_{\lambda+i0}^{\circ} A]^{-1} B dE_{\lambda}^{\circ} g) . \quad (59)$$

c) Les traces.

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda > 0$ . On définit  $M_{\varphi}(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(S^{(2)})$  comme la fermeture de l'opérateur suivant :

$$M_{\varphi}(\lambda)f = (\varphi f)_{\lambda} , \quad f \in \mathcal{S} , \quad (60)$$

c'est-à-dire

$$(M_{\varphi}(\lambda)f)(\omega) = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{1/4} (\widetilde{\varphi f})(\sqrt{\lambda}\omega) . \quad (61)$$

$M_{\varphi}(\lambda)$  est un opérateur intégral de noyau

$$(16\pi^3)^{-1/2} \lambda^{1/4} e^{-i\sqrt{\lambda}\omega \cdot x} \varphi(x) . \quad (62)$$

Propriétés de  $M_{\varphi}(\lambda)$  :

(M 1) Si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , alors  $M_{\varphi}(\lambda) \in \mathcal{B}_2$  et  $\lambda \mapsto M_{\varphi}(\lambda)$  est continu de  $(0, \infty)$  dans  $\mathcal{B}_2$ .

(M 2) Si  $\varphi(x) \leq c(1+|x|)^{-\alpha}$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ , alors  $M_{\varphi}(\lambda) \in \mathcal{B}_{\infty}$  et  $\lambda \mapsto M_{\varphi}(\lambda)$  est continu en norme sur  $(0, \infty)$  (c'est un résultat bien connu dans la théorie des espaces de Sobolev).

Adjoint  $M_{\varphi}(\lambda)^* : L^2(S^{(2)}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  .

En plus des propriétés (M 1) et (M 2) que  $M_{\varphi}(\lambda)^*$  hérite en tant qu'adjoint, il vérifie (sous l'une ou l'autre des hypothèses sur  $\varphi$ ) :

(M 3) Soit  $g \in \mathcal{S}$ ,  $g \longleftrightarrow \{g_{\lambda}\}$ . Alors

i) Si  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est continue,

$$\varphi \psi(H_0)g = \int_0^{\infty} \psi(\lambda) M_{\varphi}(\lambda)^* g_{\lambda} d\lambda , \quad (63)$$

ii) Si  $\Delta = [a, b] \subset (0, \infty)$  :

$$\varphi E_{\Delta}^{\circ} g = \int_{\Delta} M_{\varphi}(\lambda)^* g_{\lambda} d\lambda . \quad (64)$$

Cette propriété découle immédiatement de la définition de l'adjoint. Les intégrales sont des intégrales dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

(M 4) Si  $h : \Delta \rightarrow \mathfrak{H}$  est continue et  $g \in \mathfrak{S}$ , alors

$$\int_{\Delta} (h(\lambda), M_{\varphi}(\lambda)^* g_{\lambda}) d\lambda = \int_{\Delta} (h(\lambda), \varphi dE_{\lambda}^{\circ} g) .$$

(M 5) Si  $g \in \mathfrak{S}$ ,  $f \in \mathfrak{H}$ , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\varphi(R_{\mu+i\epsilon}^{\circ} - R_{\mu-i\epsilon}^{\circ})g, f) = -2\pi i (M_{\varphi}(\mu)^* g_{\mu}, f) ,$$

ce qui est essentiellement une conséquence de (M 3) et du fait que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \{(\lambda - \mu - i\epsilon)^{-1} - (\lambda - \mu + i\epsilon)^{-1}\} = 2\pi i \delta(\lambda - \mu) .$$

Nous pouvons maintenant compléter la transformation de l'équation stationnaire pour  $S$ . En utilisant d'abord (58), (M 3) et (M 4) et ensuite (M 5) dans (52), nous obtenons pour  $f, g \in \mathfrak{S}$ :

$$(f, RE_{\Delta}^{\circ} g) = -2\pi i \int_{\Delta} (M_A(\lambda)^* f_{\lambda}, [I + BR_{\lambda+i0}^{\circ} A]^{-1} M_B(\lambda)^* g_{\lambda}) d\lambda ,$$

et puisque

$$(f, RE_{\Delta}^{\circ} g) = \int_{\Delta} (f_{\lambda}, R(\lambda) g_{\lambda}) d\lambda ,$$

nous arrivons à l'expression

$$R(\lambda) = -2\pi i M_A(\lambda) [I + BR_{\lambda+i0}^{\circ} A]^{-1} M_B(\lambda)^* \text{ p.p. sur } (0, \infty) \setminus \Gamma . \quad (65)$$

$M_A(\lambda)$  et  $M_B(\lambda)$  sont les opérateurs de passage associés aux deux facteurs du potentiel. L'opérateur du milieu agit dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et est la limite de  $I + BR_{\lambda+i\epsilon}^{\circ} A$  dont nous avons démontré l'existence. L'expression (65) est due à KURODA [6].

Si par exemple  $A(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $M_B(\lambda)$  est borné, nous aurons  $M_A(\lambda) \in \mathfrak{B}_2$ , donc  $R(\lambda) \in \mathfrak{B}_2$ , et  $\lambda \mapsto R(\lambda)$  sera continu en norme de Hilbert-Schmidt. Ces hypothèses sont vérifiées si nous prenons  $\theta > 2$  et  $A(x) = (1 + |x|)^{-\theta + \frac{1}{2} + \epsilon}$  avec  $\epsilon < \theta - 2$ .

Regardons maintenant le cas  $n = 3$ . Nous nous bornons à expliquer les analogies et les différences avec  $n = 2$  sans écrire explicitement toutes les formules.

La dérivation des équations stationnaires se fait exactement comme pour  $n = 2$ . Sous l'hypothèse (B 3) de la complétude asymptotique, on obtient pour  $R_{\beta\alpha}$  une formule tout à fait analogue au cas  $n = 2$  :

$$R_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^{-1} \delta_{\alpha\beta}$$

$$= w\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow +0} s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \int E_{\beta} (R_{\lambda-i\epsilon}^{\beta} - R_{\lambda+i\epsilon}^{\beta}) (V^{\alpha} - V_{R_{\lambda+i\delta}^{\beta}}^{\beta} V^{\alpha}) E_{\alpha} dE_{\lambda}^{\alpha}. \quad (66)$$

Ici  $R_z^{\beta} = (H_{\beta} - z)^{-1}$ ,  $\{E_{\lambda}^{\alpha}\}$  est la famille spectrale de  $H_{\alpha}$ , et

$$V^{\alpha} = \begin{cases} \sum_{b \neq c} V_b & \text{si } \alpha \sim c \\ \sum_b V_b = V & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

La seule différence avec  $n = 2$  est que la première limite n'est plus qu'une limite faible.

Les deux autres questions sont passablement plus délicates. La difficulté provient essentiellement du fait suivant : pour  $n = 2$ ,  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  et le potentiel  $V(x)$  était une fonction des trois variables de  $\mathbb{R}^3$ , tandis que pour  $n = 3$ ,  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^6)$ , mais chaque potentiel à 2 corps  $V_b$  ne dépend que de trois variables sur les six en jeu. C'est exactement cette propriété qui nous a permis de définir les canaux de diffusion. A présent, si nous prenons par exemple un terme de la forme  $V_b R_z V_d$ , alors les fonctions de  $x$  de chaque côté de la résolvante ne dépendent chacune que de trois variables, et on ne peut pas simplement transcrire la méthode développée pour  $n = 2$  à un nombre plus élevé de dimensions.

Le problème des valeurs au bord de la résolvante a été résolu par FADDEEV [21] en 1962 dans un formalisme non-hilbertien. Une formulation purement hilbertienne a été donnée il y a quelques années par GINIBRE et MOULIN [19, 22].

On essaye d'abord de procéder exactement comme pour  $n = 2$ . On factorise  $V_b = A_b B_b$  et on utilise l'équation de la résolvante

$$R_z = R_z^0 - \sum_b R_z V_b R_z^0 \quad (67)$$

pour obtenir

$$B_c R_z A_d = B_c R_z^0 A_d - \sum_b (B_c R_z A_b)(B_b R_z^0 A_d) . \quad (68)$$

Nous posons  $Q_z^{cd} = B_c R_z A_d, W_z^{cd} = B_c R_z^0 A_d$ . Comme les indices prennent trois valeurs, on peut écrire l'équation précédente de façon plus compacte en introduisant l'espace  $\mathcal{K} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  et en regardant  $Q_z = \{Q_z^{cd}\}$  et  $W_z = \{W_z^{cd}\}$  comme des matrices dans  $\mathcal{K}$ . Donc

$$Q_z = W_z - Q_z W_z \text{ dans } \mathcal{K} . \quad (69)$$

$W_z$  a toutes les propriétés de  $F(z)$  dans la généralisation du Lemme 1 (avec  $D$  le demi-plan) sauf une. En effet les éléments diagonaux de  $W_z$  ne sont pas compacts. Un tel élément a la forme

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) [-\Delta^{(6)} - z]^{-1} \psi(x_1, x_2, x_3) ,$$

où  $\Delta^{(6)}$  désigne le Laplacien à 6 dimensions, et un tel opérateur ne peut être compact que si  $\varphi = 0$  ou  $\psi = 0$ .

On peut obtenir une équation où  $W_z$  est remplacé par un opérateur semblable sans éléments diagonaux. Pour cela on utilise l'équation de la résolvante entre  $H$  et  $H_d$  :

$$R_z = R_z^d - R_z \sum_{b \neq d} V_b R_z^d \quad (\text{où } \sum_{b \neq d} V_b = H - H_d) . \quad (70)$$

En posant  $X_z^{cd} = B_c R_z^d A_d$ , ceci mène comme auparavant à une équation

$$Q_z = X_z - Q_z X_z^{\text{non-diag.}} , \quad (71)$$

donc formellement

$$Q_z = X_z [I + X_z^{\text{non-diag.}}]^{-1} \quad (72)$$

$X_z^{\text{non-diag.}}$  est compact mais contient maintenant la résolvante de  $H_d$  au lieu de celle de  $H_0$ , ce qui entraîne des ennuis lorsque  $z$  devient réel. En effet, on a

$$B_c R_z^d A_d = B_c E_d R_z^d A_d + B_c (I - E_d) R_z^d A_d . \quad (73)$$

Le sous-espace  $(I - E_d)\mathbb{H} = \mathcal{M}_{ac}(h_d) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$  correspond à la partie absolument continue de  $h_d$ , et le deuxième terme est analogue à  $B_c R_z^0 A_d$  et possède des valeurs au bord sur l'axe réel (c'est ici qu'il importe de savoir qu'on peut séparer par un ouvert le spectre continu de  $h_d$  de son spectre ponctuel).

D'autre part  $E_d = \sum_{\alpha \sim d} E_\alpha$ , et

$$\begin{aligned} B_c E_\alpha R_z^d A_d &= B_c E_\alpha (\eta_d K_d^2 + \lambda_\alpha - z)^{-1} A_d \\ &= B_c E_\alpha A_d (\eta_d K_d^2 + \lambda_\alpha - z)^{-1} , \end{aligned} \quad (74)$$

puisque  $A_d$  commute avec  $K_d$ . On voit de la dernière expression que cet opérateur devient non-borné lorsque  $z \rightarrow \lambda + i0$ , pour tout  $\lambda \geq \lambda_\alpha$ , donc il ne peut pas avoir de limite dans  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$  sur  $(\lambda_\alpha, \infty)$ .

La partie absolument continue de l'opérateur  $h_d$  pourrait donc être traitée, mais dès qu'au moins un des trois opérateurs  $h_d$  possède une valeur propre, le premier terme n'a pas de valeurs au bord. On remarque que la valeur au bord existerait (pour  $c \neq d$ ) si au lieu de  $A_d$ , qui est une fonction de  $x_d$ , on mettait une fonction de  $y_d$ . La solution de GINIBRE et MOULIN exploite cette observation de la façon suivante :

On sépare les deux parties dans (73) en dédoublant l'espace de Hilbert, c'est-à-dire en introduisant  $\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ , pour traiter essentiellement chaque partie dans un des deux sous-espaces. On peut définir dans  $\hat{\mathcal{K}}$  un opérateur  $F(z)$ , construit à partir de  $B_c (I - E_d) R_z^d A_d$  et  $B_c E_d R_z^d \psi(y_d)$ , où  $\psi$  est une fonction judicieusement choisie (par exemple  $\psi(y) = (1 + |y|)^{-\nu}$ ).  $F(z)$  vérifie toutes

les hypothèses de la généralisation du Lemme 1 , donc  $(I+F(z))^{-1}$  a des valeurs au bord sur l'axe réel sauf sur un ensemble  $\Gamma$  fermé de mesure nulle. De plus il existe des opérateurs  $K_z : \mathbb{K} \rightarrow \hat{\mathbb{K}}$  et  $J_z : \hat{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}$  tels que  $Q_z = J_z(I+F(z))^{-1}K_z \cdot K_z$  et  $J_z$  contiennent des opérateurs du type  $B_d E_d R_z^d \psi(y_d)$  et  $B_c(I-E_c)R_z^c A_d$ , c'est-à-dire seulement la résolvante des hamiltoniens partiels. Leur dépendance de  $z$  peut donc être contrôlée en utilisant les résultats obtenus pour le problème à 2 corps.

On peut maintenant insérer l'expression obtenue pour  $Q_z^{cd} = B_c R_z A_d$  dans l'expression stationnaire pour  $R_{\beta\alpha}$ . Pour obtenir  $R_{\beta\alpha}(\lambda)$ , il faut encore définir les opérateurs de passage  $M_\varphi^\alpha(\lambda)$ .

Si  $\alpha \neq 0$ ,  $M_\varphi^\alpha(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^6) \rightarrow L^2(S^{(2)})$  peut être défini comme pour  $n = 2$  en prenant d'abord la projection sur  $\mathfrak{M}_\alpha$  et il aura les mêmes propriétés que dans le cas  $n = 2$ , c'est-à-dire l'analogue de (M 1) - (M 5). Plus précisément, si  $\alpha \sim d$ , le noyau de  $M_\varphi^\alpha(\lambda)$  sera :

$$\text{const}(\lambda - \lambda_\alpha)^{\frac{1}{4}} \overline{\epsilon_\alpha(x_d)} \varphi(x_d, y_d) \exp[-i(\lambda - \lambda_\alpha)^{\frac{1}{2}} \omega \cdot y_d] .$$

Cette expression comprend une transformation de Fourier dans la variable  $y_d$ ,  $\varphi$  peut être une fonction de trois ou de six variables mais qui doit avoir une dépendance non-triviale (explicite ou implicite) de la variable  $y_d$ , et il y a un déplacement du zéro d'énergie.

L'opérateur  $M_\varphi^0(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^6) \rightarrow L^2(\mathcal{E}^{(5)})$  est aussi défini de cette façon :

$$M_\varphi^0(\lambda)f = (\varphi f)_\lambda \in L^2(\mathcal{E}^{(5)}) .$$

Dans les applications (c'est-à-dire dans l'expression pour  $R_{\alpha\alpha}(\lambda)$ ),  $\varphi$  ne dépend que de trois variables. C'est pourquoi certaines propriétés de  $M_\varphi^0(\lambda)$  sont différentes. En effet, si par exemple  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , alors  $M_\varphi^0(\lambda)$  est borné et défini partout mais pas compact, et l'application  $\lambda \mapsto M_\varphi^0(\lambda)$  est seulement fortement continue. Par contre l'adjoint  $M_\varphi^0(\lambda)^*$  vérifie (M 3), (M 4) et (M 5).

Pour assurer que  $R_{\alpha\alpha}(\lambda) \in \mathfrak{B}_2$ , il faut, vu la non-compacité de  $M_{\varphi}^{\circ}(\lambda)$ , choisir une factorisation des potentiels  $V_b$  telle que  $M_{B_b}^{\alpha}(\lambda)$  appartienne à  $\mathfrak{B}_2$ , ce qui nécessite (si l'on veut travailler avec les équations de GINIBRE et MOULIN) la condition  $\theta_b > 5/2$  que nous avons déjà indiquée. Le fait que  $M_{\varphi}^{\circ}(\lambda)$  n'est que fortement continu n'a pas d'effet sur la continuité de la section efficace  $\overline{\sigma_{\alpha \rightarrow \alpha}^{\text{tot}}}(\lambda)$ . En effet, le lemme suivant assure la continuité en  $\lambda$  de cette grandeur.

LEMME 2. Soit  $T : \Delta \rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{H})$  fortement continu et  $N : \Delta \rightarrow \mathfrak{B}_2$  continu. Alors  $\lambda \mapsto T(\lambda)N(\lambda)$  est continu de  $\Delta$  dans  $\mathfrak{B}_2$ .

Remarque finale : Dans ce qui précède, nous avons esquissé une théorie de la section efficace totale. Pour obtenir les propriétés de la section efficace différentielle ou de l'amplitude de diffusion, il faut aller plus loin et étudier les fonctions propres de l'opérateur différentiel  $-\Delta + V$ . Des détails sont donnés par exemple dans [9, chapitre 10] et dans [23].

B I B L I O G R A P H I E

- [1] GREEN , T.A. et LANFORD, O.E. : J. Math. Phys. 1 , 139 (1960)
- [2] MISRA B. , SPEISER D. et TARGONSKI G. : Helv. Phys. Acta 36 , 963 (1963) .
- [3] VILLARROEL D. : Nuovo Cim. 70 A , 175 (1970) .
- [4] IKEBE T. : Pacific J. Math. 15, 511 (1965) .
- [5] BIRMAN M.S. et ENTINA S.B. : Math. USSR Izvestija (English translation) 1 , 391 (1967) .
- [6] KURODA S.T. : J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I , 17 , 315 (1970) .
- [7] KATO T. et KURODA S.T. : Rocky Mountain J. Math. 1 , 127 (1971) .
- [8] KURODA S.T. : J. Math. Soc. Japan 25, 222 (1973) .
- [9] AMREIN W.O. JAUCH J.M. et SINHA K.B. : "Scattering Theory in quantum Mechanics" Benjamin, Reading (1977) .
- [10] JAUCH J.M. et SINHA K.B. : Helv. Phys. Acta 45 , 580 (1972) .
- [11] MARTIN, Ph. et MISRA B. : J. Math. Phys. 14, 997 (1973) .
- [12] AMREIN W.O. et PEARSON D.P. : A time - dependent approach to the total scattering cross section, preprint.
- [13] AMREIN W.O., PEARSON D.B. et SINHA K.B. : Bounds on the total scattering cross section for N- body systems, à paraître .
- [14] MOURRE E. : Ann. Inst. Henri Poincaré 26, 219 (1977) .
- [15] DOLLARD J.D. : Comm. Math. Phys. 12, 193 (1969) and J. Math. Phys. 14 , 708 (1973) .

- [16] REED M. et SIMON B. : "Methods of Modern Mathematical Physics IV : Analysis of Operators" , Academic Press, New York (1978) .
- [17] AGMON Sh. : Lectures given at the Regional Conference of Mathematics , Utah , 1978 .
- [18] AMREIN W.O. et PEARSON D.B. The scattering cross section for slowly decreasing potentials, à paraître.
- [19] GINIBRE J. et MOULIN M. : Ann. Inst. Henri Poincaré, sec. A , 21 , 97 (1974) .
- [20] AMREIN W.O. et SINHA K.B. : The scattering cross section for 3 - body systems, en préparation .
- [21] FADDEEV L.D. : Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in quantum Scattering Theory" Israel program of scientific translations, Jerusalem (1965) .
- [22] GINIBRE J. dans "The Schrodinger Equation" , W. Thirring et P. Urban, eds., Springer, Vienne (1977) .
- [23] AGMON Sh. : Ann. Scuola Normale Sup. Pisa , Serie IV , 2 , 151 (1975) .