

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

ALDO ANDREOTTI

MAURO NACINOVICH

Domaines de régularité pour les opérateurs elliptiques à coefficients constants (une fonction inconnue)

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 26
« Conférences de : A. Andreotti, A. Koranyi, J.L. Lebowitz, L. Michel et R. Teman », ,
exp. n° 1, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__26__1_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DOMAINES DE REGULARITE POUR LES OPERATEURS
ELLIPTIQUES A COEFFICIENTS CONSTANTS (une fonction inconnue)

par

Aldo ANDREOTTI et Mauro NACINOVICH
(Université de Pise, Italie)

1. Préliminaires et rappels.

a) Soit $A_0(D)$ $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ une matrice $p \times q$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur \mathbb{R}^n :

$$A_0(D) : \mathcal{E}^q(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^p(\Omega)$$

$\forall \Omega$ ouvert dans \mathbb{R}^n . $\mathcal{E}(\Omega) =$ fonctions C^∞ sur Ω .

Nous ferons l'hypothèse que A_0 est un opérateur elliptique c'est-à-dire $\forall \Omega$ ouvert de \mathbb{R}^n $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)^q$ (1) telle que $A_0(D)u = 0$; on a $u \in \mathcal{G}(\Omega)^q$, où $\mathcal{G}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions analytiques réelles (à valeurs complexes) sur Ω .

De l'exposé précédent, nous savons que $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ on peut parler de son enveloppe de régularité $\tilde{\Omega} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$. Ceci est un domaine étalé sur \mathbb{R}^n et contenant Ω , le plus grand possible sur lequel toutes les solutions de $A_0 u = 0$ dans Ω peuvent s'étendre.

Rappelons aussi la caractérisation des domaines Ω qui coïncident avec leurs enveloppes de régularité au moyen du théorème (analogue du théorème de) Cartan Thullen :

(1) $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .

Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ coïncide avec son enveloppe si et seulement si : pour \forall suite $\{x_\nu\} \subset \Omega$, dont la distance au bord tend vers zéro, il existe $u \in \mathcal{G}(\Omega)^q$ avec $A_\circ u = 0$ et telles que :

$$\sup |u(x_\nu)| = \infty .$$

b) Rappelons aussi que si l'on envisage le plongement naturel $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (où $z_j = x_j + iy_j$ sont les coordonnées holomorphes, de sorte que $\mathbb{R}^n = \{\text{Im } z_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n\}$), on peut considérer l'opérateur $\bar{\partial}$ -suspendu $A = A_\circ \oplus \bar{\partial}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & A_\circ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) & \\
 e^q(\tilde{\Omega}) & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} e^p(\tilde{\Omega}) \\ \oplus \\ (e^{o1}(\Omega))^q \end{array}
 \end{array}
 \quad \forall \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{C}^n$$

C'est l'opérateur obtenu en adjoignant aux équations précédentes dans \mathbb{C}^n les équations de Cauchy-Riemann. On a vu que, étant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage ouvert U de Ω dans \mathbb{C}^n Ω -connexe et tel que si

$$\mathfrak{H}(U) = \{ u \in \mathcal{E}^q(U) \mid Au = 0 \}$$

$$\mathfrak{H}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{E}^q(\Omega) \mid A_\circ u = 0 \}$$

l'application naturelle de restriction

$$\tau_\Omega^U : \mathfrak{H}(U) \rightarrow \mathfrak{H}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

Soit $\tilde{U} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{C}^n$ l'enveloppe de régularité de U pour l'opérateur suspendu A . Soit $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\pi}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ la partie de \tilde{U} au-dessus de \mathbb{R}^n et $F_{\mathfrak{H}(\Omega)} : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}_1$ la section naturelle donnée par les fonctions de $\mathfrak{H}(\Omega)$. Si $\tilde{\Omega}$ est la composante connexe de $F_{\mathfrak{H}(\Omega)}(\Omega)$ dans $\tilde{\Omega}_1$ alors $\tilde{\Omega} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$, $\pi = \tilde{\pi}|_{\tilde{\Omega}}$, avec la section naturelle $F_{\mathfrak{H}(\Omega)} : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ est l'enveloppe de régularité de Ω par rapport à A_\circ .

Il s'en suit que l'étude des domaines de régularité de A_0 se réduit à l'étude des domaines de régularité pour l'opérateur $\bar{\partial}$ -suspendu $A = A_0 \oplus \bar{\partial}$.

Remarquons qu'un opérateur $\bar{\partial}$ -suspendu A est forcément elliptique (même si l'opérateur de départ ne l'est pas).

Dans la suite nous nous bornerons pourtant à considérer seulement des opérateurs $\bar{\partial}$ -suspendu.

c) Soit donc A un opérateur différentiel à coefficients constants $\bar{\partial}$ -suspendu.

On a vu qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine de régularité (c'est-à-dire coïncide avec son enveloppe) si et seulement si \forall suite $\{z_\nu\} \subset \Omega$ divergente et dont la distance au bord tend vers zéro, il existe $u \in C(\Omega)^q$, $Au = 0$, telle que

$$\sup |u(z_\nu)| = \infty.$$

Un tel domaine est pourtant un domaine d'holomorphie au sens usuel du mot mais de nature particulière.

= Nous nous proposons d'investiguer les particularités que présente un domaine de régularité pour A par rapport aux domaines d'holomorphie généraux.

= Nous nous bornerons à l'étude des opérateurs A agissant sur une seule fonction inconnue u i.e. tels que $q = 1$. Les équations $Au = 0$ ont donc la forme

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0 \\ \dots \\ \psi_l \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0 \\ \bar{\partial} u = 0 \end{array} \right.$$

où les $\psi_i(\xi_1 \dots \xi_n)$ sont des polynômes et où $\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$.

2. Systèmes surdéterminés à une seule fonction inconnue.

a) Généralités. Soit donc donné le système (*) de tout à l'heure dans C^n .

Soit $\mathfrak{b} = C[\xi_1, \dots, \xi_n](\psi_1(\xi), \dots, \psi_\ell(\xi))$ l'idéal engendré par les polynômes ψ_j $1 \leq j \leq \ell$, sur l'anneau $C[\xi_1, \dots, \xi_n]$.

Soit

$$V(\mathfrak{b}) = \{\xi \in C^n \mid \psi_1(\xi) = \dots = \psi_\ell(\xi) = 0\}$$

la variété des zéros de l'idéal \mathfrak{b} (Variété caractéristique).

A côté de l'idéal \mathfrak{b} envisageons l'idéal homogène \mathfrak{a} dans l'anneau gradué $C_0[\xi_1, \dots, \xi_n]$ des polynômes homogènes à n variables constitué par les parties homogènes $\neq 0$ de degré maximal des éléments de \mathfrak{b} .

Nous appellerons \mathfrak{a} l'idéal asymptotique de \mathfrak{b} et sa variété de zéros

$$V(\mathfrak{a}) = \{\xi \in C^n \mid g(\xi) = 0 \quad \forall g \in \mathfrak{a}\}$$

la variété asymptotique de la variété caractéristique $V(\mathfrak{b})$. Cette variété n'est rien d'autre que le cône projectant de l'origine la variété $W(\mathfrak{a})$ des points à l'infini de $V(\mathfrak{b})$; c'est bien le cône des droites asymptotiques à $V(\mathfrak{b})$ issues de l'origine. A remarquer que

$$\dim_C V(\mathfrak{b}) = \dim_C V(\mathfrak{a}) = \dim_C W(\mathfrak{a}) + 1.$$

b) Le Cas homogène à variété caractéristique de dimension 1. Le cas plus simple et en même temps non banal est le cas d'un idéal \mathfrak{b} homogène coïncidant avec son radical et à variété caractéristique de dimension un :

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}, \quad \dim_C V(\mathfrak{a}) = 1.$$

Dans ce cas, la variété $V(\mathfrak{a})$ est un cône projetant de l'origine un nombre fini de points $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ dans l'hyperplan à l'infini

$\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) : W(\alpha) = a^{(1)} \cup \dots \cup a^{(k)} \subset \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Pour chacun des points $a^{(s)} \in W(\alpha)$ envisageons la projection

$$\pi_s : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

donnée par

$$\pi_s(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n a_i^{(s)} \xi_i$$

et soit $\mathcal{O}_s = \pi_s^* \mathcal{O}$ l'image réciproque par π_s , sur \mathbb{C}^n du faisceau \mathcal{O} des germes de fonctions holomorphes sur \mathbb{C} .

Un raisonnement de nature algébrique simple démontre le théorème suivant :

THEOREME. Soit \mathcal{H} le faisceau des germes des solutions du système (*) sous les hypothèses spécifiés plus haut. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow W \rightarrow \coprod_s \mathcal{O}_s \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

où $\alpha(f_1 \oplus \dots \oplus f_k) = \sum f_i$ et où W est un faisceau localement isomorphe à une somme finie du faisceau constant $\mathbb{C} : W = \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}$.

Par exemple : le système d'équations dans \mathbb{C}^2

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} u = 0 \\ \bar{\partial} u = 0 \end{array} \right.$$

donne la suite exacte.

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

où \mathcal{O}_i est le faisceau des germes de fonction holomorphes en z_i ($i = 1, 2$) seulement.

A noter que le système (*) envisagé à moins d'une transformation linéaire dans \mathbb{C}^2 peut être considéré aussi comme la $\bar{\partial}$ -suspension de l'équation de Laplace en deux variables.

COROLLAIRE 1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^n convexe et simplement connexe (par exemple soit Ω convexe) . Alors

a) son enveloppe de régularité est le domaine

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_{s=1}^k \pi_s^{-1} \pi_s(\Omega)$$

(donc si Ω est convexe $\tilde{\Omega}$ est aussi convexe)

b) tout domaine de la forme précédente est un domaine de régularité.

COROLLAIRE 2. Pour $\forall z_0 \in \tilde{\Omega}$ il existe un compact $K = K(z_0) \subset \Omega$ et une constante $c(z_0) > 0$, tels que $\forall u \in \mathcal{H}(\Omega) \simeq \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ on a

$$|u(z_0)| \leq c(z_0) \|u\|_K$$

(L'application $\mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega)$ étant surjective et continue est ouverte, donc un isomorphisme topologique) .

Exercice : soit $\Omega = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$. Soit Δ l'opérateur de Laplace en deux variables. Soit u définie sur Ω et harmonique, $\Delta u = 0$. Démontrer que u s'étend en une fonction de \mathbb{C}^2 holomorphe dans la région

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 < 2(1 - x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

(lentille de Lie) ,

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 < 2(1 + x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

où $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ sont les coordonnées holomorphes sur \mathbb{C}^2 .

c) Le Cas général. Pour raisons de simplicité on va supposer que Ω est un ouvert convexe de \mathbb{C}^n . Nous cherchons son enveloppe de régularité par

rapport au système (*). La conjecture naturelle est la suivante.

Pour $\forall a \in V(\Omega) - \{0\}$ ($V(a)$ = variété asymptotique) envisageons la projection $\pi_a : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\pi_a(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$$

Soit

$$\tilde{\Omega} = \overbrace{\cap \pi_a^{-1} \pi_a(\Omega)}^{\circ} \quad (\text{donc } \tilde{\Omega} \text{ est aussi convexe})$$

Si \mathcal{H} est le faisceau de germes de solution du système (*) alors on a que la restriction naturelle

$$\mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$$

est un isomorphisme et que $\tilde{\Omega}$ est l'enveloppe de régularité de Ω par rapport au système (*). La démonstration de ce fait s'obtient par les considérations suivantes :

α) Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^n à frontière de classe C^2 :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \Phi(z) < 0\},$$

où $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et $d\Phi \neq 0$ sur $\partial\Omega$.

Pour tout point $z_0 \in \partial\Omega$ envisageons le gradient complexe de Φ

$$\text{grad}_z \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}(z_0), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial z_n}(z_0) \right)$$

on obtient une application

$$\tau_\Phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$$

On définit l'ensemble caractéristique de $\partial\Omega$ comme l'ensemble

$$\tau_\Phi^{-1}(V(a))$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de la fonction Φ définissant Ω ni du choix des coordonnées locales holomorphes.

β) Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^n et $a \in \partial\Omega$ un point de la frontière de Ω où elle est de classe C^2 .

Si a est non caractéristique il existe un voisinage $V(a)$ de a dans \mathbb{C}^n tels que la restriction

$$\mathcal{H}(\Omega \cup V(a)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

La preuve de ce fait fondamental s'obtient des remarques suivantes :

(i) Le fait que $a \in \partial\Omega$ est non caractéristique reflète le fait que dans l'idéal \mathfrak{b} il existe un polynôme p de Cauchy-Kowalewska en la direction $\text{grad}_z \Phi(a)$: cela veut dire qu'en prenant a à l'origine, $\mathbb{C} \text{ grad}_z \Phi(a)$ comme axe t , et désignant par z_1, \dots, z_{n-1} les autres variables, p est de la forme

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ |\alpha| \leq m \\ \beta < m}} C_{\alpha\beta} \frac{\partial^{|\alpha|+\beta} u}{\partial z^\alpha \partial t^\beta}.$$

On peut supposer que $t = 0$ est l'espace analytique tangent à $\partial\Omega$ au point $a = 0$ de sorte que Ω se trouve, au moins en partie, du côté $\text{Re } t < 0$.

(ii) Etant donnée une équation de Cauchy-Kowalewska

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \beta < m}} C_{\alpha\beta} \frac{\partial^{|\alpha|+\beta} u}{\partial z^\alpha \partial t^\beta} + f(z, t),$$

où f est holomorphe pour $\|z\| < 1$ $|t| < 1$; étant données des conditions initiales

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right|_{t=0} = v_s(z) \quad 1 \leq s \leq m-1$$

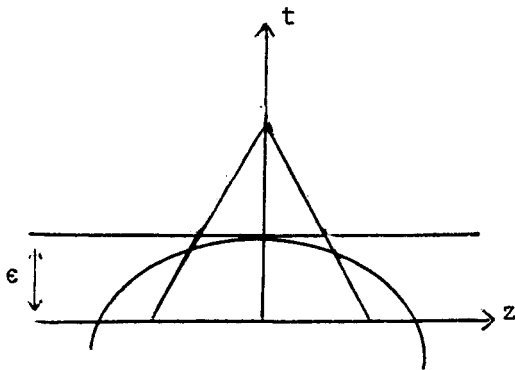
holomorphes dans un polycylindre $\|z\| < R < 1$; alors il existe une solution

unique de l'équation donnée satisfaisant aux conditions initiales et holomorphes dans la région

$$|t| < c (R - \|z\|)$$

où $0 < c < 1$ est une constante qui dépend seulement de $\sup |C_{\alpha\beta}|$ (et non de f).

(iii) Translatons la polynôme p en remplaçant t par $t' = t + \epsilon$ de sorte que $t' = 0$ coupe Ω dans une région ouverte non vide et contenant un



z -polycylindre $\|z\| < R(\epsilon)$.

On vérifie facilement que

$$R(\epsilon) = O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (1)$$

de sorte que pour ϵ suffisamment petit le domaine d'existence de la solution couvre le point $(t = 0, z = 0)$.

De là le fait énoncé en β) se déduit immédiatement.

γ) Avant de terminer la preuve, on remarque que la condition $\Phi \in C^2$ au point $a \in \partial\Omega$ peut être affaiblie dans ce qui précède avec la condition

(i) $\Phi \in C^1$ au voisinage de a

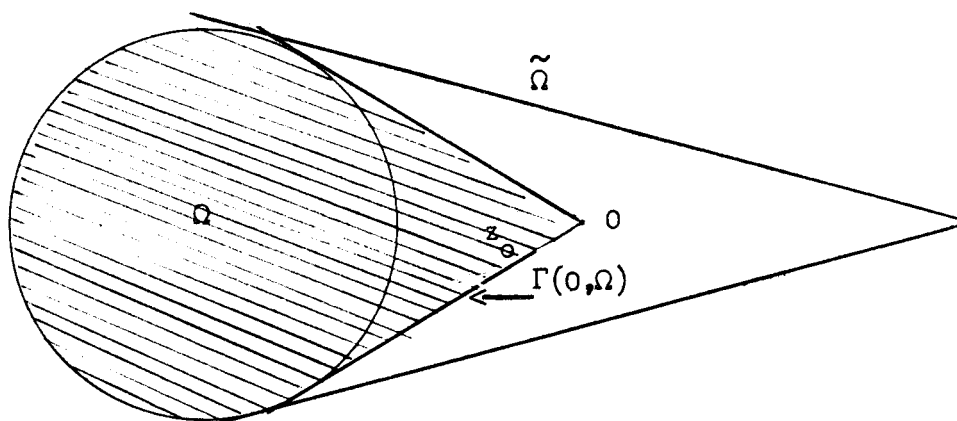
(ii) dans un voisinage de a il existe un nombre fini de fonctions de classe C^2 Φ_1, \dots, Φ_l telles que $\Phi = \sup(\Phi_1, \dots, \Phi_l)$.

δ) Soit donc Ω un ouvert convexe de C^n et supposons d'abord $\partial\Omega$ de classe C^2 . Soit

$$\tilde{\Omega} = \text{Intérieur de } \left(\bigcap_{a \in V(\alpha) - \{0\}} \pi_a^{-1} \pi_a(\Omega) \right)$$

Alors $\tilde{\Omega}$ est aussi convexe et pour $z_0 \in \tilde{\Omega}$ donné, on peut trouver un point $0 \in \tilde{\Omega}$ près de z_0 tel que l'enveloppe convexe $\Gamma(0, \Omega)$ de 0 et Ω contient z_0 et soit contenue dans Ω : $\Gamma(0, \Omega) \subset \tilde{\Omega}$. On peut supposer que 0 est l'origine de C^n .

(1) C'est ici qu'on utilise l'hypothèse que Φ est de classe C^2 ; pour les autres considérations Φ de classe C^1 suffit.



Soit alors $\Omega(\mu) = \bigcup_{\lambda \leq \mu} \lambda \Omega$ pour $0 < \mu < 1$. Si μ est suffisamment petit alors $\Omega(\mu)$ contient z_0 à l'intérieur. De plus

(i) la partie de $\partial\Omega \subset$ Intérieur de $\Gamma(0, \Omega)$ est non caractéristique (car chaque point de cette partie admet un voisinage sphérique $\subset \Gamma(0, \Omega) \subset \tilde{\Omega}$).

(ii) $\forall \mu_0, 0 < \mu_0 < 1$ il existe $\epsilon > 0, 0 < \mu - \epsilon$ tel que, si $|\mu - \mu_0| < \epsilon$,

$$\mathfrak{H}(\Omega(\mu - \epsilon)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}(\Omega(\mu))$$

car $\partial\Omega(\mu)$ est C^1 et satisfait aux conditions spécifiées dans (v) et donc on peut appliquer le principe établi en (b).

On a donc

$$\mathfrak{H}(\Omega(0)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}(\Omega)$$

et donc dans le cas envisagé on a bien un isomorphisme

$$(**) \quad \mathfrak{H}(\tilde{\Omega}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}(\Omega)$$

e) Si on laisse tomber l'hypothèse $\partial\Omega \subset C^2$ on conclut avec l'isomorphisme

(**) par un argument d'approximation de Ω de son intérieur par des ouverts convexes à bord C^∞ .

ξ) Il reste à démontrer que $\tilde{\Omega}$ et l'enveloppe de régularité de Ω coïncident.

Pour cela, il suffit de prouver que $\forall z_0 \in \partial\tilde{\Omega}$ on peut construire une fonction $u \in \mathcal{H}(\Omega) \simeq \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ qui ne peut pas se prolonger analytiquement au-dessus de z_0 . Ceci se fait avec un argument classique de construction de "nullsolution" d'un problème de Cauchy (cf le livre de Hörmander, page 121)

L'argument précédent nous donne un certain nombre de conséquences intéressantes que nous formulons comme corollaires.

COROLLAIRES 1. Soit Ω un domaine de régularité et Φ une fonction définissant le bord de Ω et qui soit de classe C^2 sur une portion $\Sigma \subset \partial\Omega$.

Alors $\forall g \in \sqrt{g}$ (l'idéal asymptotique) on a

$$g(\text{grad}_z \Phi(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma$$

c'est-à-dire Σ est toute de point caractéristique.

COROLLAIRE 2. Si Ω est un domaine de régularité borné, alors $\partial\Omega$ ne peut pas être de classe C^2 partout que dans le cas où $g = 0$, c'est-à-dire dans le cas du (seul) système d'équation, de Cauchy-Riemann.

COROLLAIRE 3. Soit Ω ouvert convexe et $\tilde{\Omega}$ comme tout à l'heure, alors $\forall z_0 \in \tilde{\Omega}$ il existe un compact $K = K(z_0)$ dans Ω et une constante $c(z_0) > 0$ tels que $\forall u \in \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ on a

$$|u(z_0)| \leq c(z_0) \|u\|_K.$$

3. La distance au bord dans un domaine de régularité.

a) Soit

$$\|z\| = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme euclidienne dans \mathbb{C}^n et soit $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ la boule unité. Envisageons son enveloppe de régularité

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \bigcap_{a \in V(\mathfrak{a}) - \{0\}} \text{Int.} \pi_a^{-1} \pi_a(B) \\ &= \text{Int}\{z \in \mathbb{C}^n \mid |\sum a_i z_i| \leq \|a\|, \forall a \in V(\mathfrak{a})\} \end{aligned}$$

On remarque alors que si $z_0 \in \partial \tilde{B} \cap \partial B$ alors forcément $\bar{z}_0 \in V(\mathfrak{a})$ et $\|z_0\| = 1$.

b) Soit à présent Ω un ouvert de régularité pour le système (*).

Pour tout $z \in \Omega$ posons

$$d(z, \partial\Omega) = \inf_{w \in \partial\Omega} \|z - w\|$$

Alors $d(z, \partial\Omega)$ est une fonction continue et lipschitzienne (de constante de Lipschitz = 1). Donc elle admet des dérivées partielles presque partout dans Ω et elle est presque partout différentiable (th. de H. Rademacher), et celles-ci coïncident avec ses dérivées au sens des distributions.

Soit $z_0 \in \Omega$ et $r = d(z_0, \partial\Omega)$ ceci signifie que $z_0 + rB \subset \Omega$. Comme Ω est un ouvert de régularité, il en découle que $z_0 + r\tilde{B} \subset \Omega$. Il existe donc un point $w \in \partial\Omega$ tel que $\frac{w - z_0}{r} \in \partial \tilde{B} \cap \partial B$ donc $\overline{w - z_0} \in V(\mathfrak{a})$.

Si au point z_0 $d(z, \partial\Omega)$ admet des dérivées partielles, alors on doit avoir

$$\text{grad}_z d(z_0, \partial\Omega) \in V(\mathfrak{a})$$

On a donc démontré le théorème suivant :

THEOREME. Soit Ω un domaine de régularité. La distance $d(z) = d(z, \partial\Omega)$ d'un point z de Ω du bord de Ω est une fonction lipchitzienne (de constante de Lipschitz = 1). Elle admet des dérivées partielles presque partout et $\forall g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ on doit avoir

$$g(\text{grad}_z d) \equiv 0.$$

Remarque : On peut remplacer $d(z)$ avec la fonction $-\log d(z) = \delta(z)$ et on a les mêmes conclusions.

Ceci nous montre bien les particularités que présentent les domaines de régularité de (*) par rapport aux domaines d'holomorphic généraux.

c) Supposons que, au voisinage d'un point $z_0 \in \Omega$ la fonction $d(z)$ soit de classe C^2 . Ceci est par exemple le cas en dehors d'un ensemble maigre de Ω si $\partial\Omega$ est différentiable par morceaux. Alors on a le théorème suivant :

THEOREME. Soit Ω un domaine de régularité.

Soit $\delta(z) = -\log d(z)$ de classe C^2 au voisinage d'un point $z_0 \in \Omega$.

Soit $L = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_{\alpha}} (\text{grad}_z \delta(z_0)) \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^n \mu_{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\beta}}$ avec $g \in \sqrt{a}$ et

$\mu_{\beta} \in \mathbb{C} \quad 1 \leq \beta \leq n$. Alors $L\bar{L}$ est un opérateur différentiel à coefficient constant du second ordre. On a $\forall g \in \sqrt{a}, \forall \mu \in \mathbb{C}^n$

$$(L\bar{L}\delta)(z_0) \geq 0,$$

Preuve : Des relations

$$g\left(\frac{\partial \delta(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \delta(z)}{\partial z_n}\right) \equiv 0 \quad \forall g \in \sqrt{a}$$

on déduit par différentiation les relations

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_{\alpha}} \left(\frac{\partial \delta}{\partial z}(z_0)\right) \frac{\partial^2 \delta(z_0)}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\gamma}} = 0 \quad 1 \leq \gamma \leq n$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_{\alpha}} \left(\frac{\partial \delta}{\partial z}(z_0)\right) \frac{\partial^2 \delta(z_0)}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\gamma}} = 0 \quad 1 \leq \gamma \leq n.$$

Il en résulte que $(L\bar{L}\rho)(z_0) = \sum \mu_{\alpha} \bar{\mu}_{\beta} \frac{\partial^2 \delta(z_0)}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}}$. Mais ceci est ≥ 0 car

Ω est un domaine d'holomorphic et que le logarithme de la distance au bord, changé de signe, est une fonction plurisousharmonique.

On reconnaît ici une forme renforcée de la plurisousharmonicité du $-\log$ de la distance au bord.