Adam Koranyi

Comportement à la frontière des fonctions holomorphes et harmoniques sur un tube

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 26
« Conférences de : A. Andreotti, A. Koranyi, J.L. Lebowitz, L. Michel et R. Teman », ,
exp. nº 2, p. 15-29
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__26__15_0>

COMPORTEMENT A LA FRONTIERE DES FONCTIONS HOLOMORPHES ET HARMONIQUES SUR UN TUBE

par

Adam KORANYI

On utilisera les notations $z = (z_1,\ldots,z_n)'$, $z_k = x_k + iy_k)$, $(1 \geq k \geq n)$, $z = x+iy$ (z est donc un élément de C^n écrit comme vecteur colonne) , et on étudiera le domaine

$$D = \{ z = x+iy \mid y_i > (y_2^2 + \ldots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} \} .$$

Sur D on étudiera la classe des fonctions holomorphes, et certaines classes plus générales, définies par des équations différentielles. Pour les fonctions bornées dans ces classes (et aussi pour les fonctions qui ne sont que bornées en moyenne dans un certain sens), on trouvera des résultats assez précis sur le comportement à la frontière.

Tout ce qu'on fera ici sera d'expliciter un peu certains résultats généraux qui sont valables pour tout espace hermitien symétrique, la plupart même pour tout espace riemannien symétrique. Les démonstrations sont données, pour le cas général , dans [4] et [5] .

Pour faire entrer D dans le cadre de la théorie générale, il faut d'abord le représenter comme espace homogène d'un groupe de Lie semisimple. Pour cela, on considère l'espace projectif complexe CP^{n+1} , c'est-à-dire les classes d'équivalence $\dot{\zeta}$ des vecteurs $\zeta = (\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1})' \in C^{n+2} - \{0\}$ pour la relation d'équivalence $\zeta \sim \alpha\,\zeta$ $(\alpha \in \mathbb{C} - \{0\})$. Le groupe $GL(n+2,\mathbb{C})$ opère sur $\mathbb{C}P^{n+1}$ de manière naturelle.

Soit H une matrice $(n+2) \times (n+2)$ réelle symétrique ayant deux valeurs propres négatives et n valeurs propres positives. (Alors $H = U' I_{2,k} U$ avec U réelle non-singulière ; en général on note $I_{p,q}$ la matrice diagonale avec p coefficients -1 et q coefficients $+1$) . Soit $Q \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ l'hypersurface définie par l'équation quadratique

$$\zeta' H \zeta = 0 . \tag{1}$$

Soit enfin M la sous-ensemble de Q défini par

$$\bar{\zeta}' H \zeta > 0 . \tag{2}$$

Le groupe

$$G = \{g \in SL(n+2,\mathbb{R}) \,|\, g' H g = H\} ,$$

(qui est évidemment isomorphe à $SO(2,n)$ par l'application $g \longmapsto U g U^{-1}$) opère alors sur M .

En posant

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ \hline & I_{1,n-1} & \\ \hline 1 & & \end{array}\right)$$

On voit facilement (cf. [8]) que l'application

$$\dot{\zeta} \longmapsto z , \quad z_k = \frac{\zeta_k}{\zeta_0} \quad (1 \leq k \leq n)$$

est une bijection holomorphe de M sur l'ensemble $\{z = x+iy \,|\, y_1^2 > y_2^2 + \ldots + y_n^2\}$. Cet ensemble a deux composantes connexes $(y_1 > 0$ ou $y_1 < 0 \ldots)$, dont l'une est égale à D . G étant connexe, on voit que G opère sur D .

Pour voir que G opère transitivement, on introduit le sous-groupe

$$P_1 = \{g \in G \,|\, g\dot{\omega} = \dot{\omega}\}$$

où $\dot{\omega} \in CP^{n+1}$ est défini par $\omega_o = 1$, $\omega_1 = \ldots = \omega_{n+1} = 0$ (il peut être interprété comme un "point à l'infini" adhérent à D) . On voit tout de suite que $g\dot{\omega} = \dot{\omega}$ implique que certains coefficients de g soient nuls, et on calcule sans difficulté que P_1 opère sur D exactement par toutes les transformations de la forme

$$z \longmapsto pAz + a \tag{3}$$

où $p > 0$, $A \in SO(1,n-1)$ (i.e. $A'I_{1,n-1}A = I_{1,n-1}$) , et $a \in R^n$. Donc P_1 est déjà transitif sur D .

On choisit $ie_1 = (i,0,\ldots,0)' \in D$ comme point de base, et on note K son groupe de stabilité dans G . ie_1 est l'image du point $(1,i,0,\ldots,0,1)'$ dans M ; un calcul montre que K est isomorphe à $SO(2) \times SO(n)$, c'est un sous-groupe compact maximal de G . (il est peut-être plus facile de faire ce calcul sur la réalisation bornée $\mathcal{D}$, qu'on va introduire dans quelques instants). On a alors l'identification $D \simeq G/K$.

Sur D il y a une métrique Riemannien invariante par G . Cette métrique est unique à une constante près, par des principes généraux [1] chap. VIII) ; elle est hermitienne et proportionnelle à la métrique de Bergman. En utilisant les propriétés l'invariance par G du noyau de Bergman, on montre sans difficultés que, posant $\beta(y) = y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2$, elle est égale à

$$ds^2 = \frac{n}{2\beta(y)^2}\left[\beta(y)(-|dz_1|^2+|dz_2|^2+\ldots+|dz_n|^2)+2|-y_1dz_1+y_2dz_2+\ldots+y_ndz_n|^2\right] . \tag{4}$$

D a aussi une réalisation comme domaine borné. En posant dans (1) et (2), $H = I_{n,2}$ et puis

$$w_k = \frac{\zeta_k}{\zeta_{n+1} + i\,\zeta_{n+2}} \quad (1 \le k \le n)$$

on voit que chacune des composantes connexes de M , et donc D , est en bijection holomorphe avec le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{ w \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} |w'.w|^2 - 2\bar{w}'.w + 1 > 0 \\ |w'.w| < 1 \end{array} \right\}$$

La bijection entre D et $\mathcal{D}$ est une généralisation de la transformation de Cayley qui établit la correspondance entre le demi-plan et le disque unité dans $\mathbb{C}$. Elle peut être décrite explicitement [7] comme suit :

$$(5) \qquad \begin{aligned} z_1 + i &= 2\,\frac{w_1 - i}{W} \\ z_k &= -\,2i\,\frac{w_k}{W} \quad (2 \le k \le n) \end{aligned}$$

où

$$W = (w_1 - i)^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 \ .$$

La transformation inverse est

$$(6) \qquad \begin{aligned} w_1 - i &= -2\,\frac{z_1 + i}{Z} \\ w_k &= -2i\,\frac{z_u}{Z} \quad (2 \le k \le n) \end{aligned}$$

avec

$$Z = -\,(z_1 + i)^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \ \left(= \frac{-4}{W} \right) .$$

Cette transformation fait correspondre 0 au point $ie_1 \in D$. K est maintenant le stabilisateur de 0 , il opère sur $\mathcal{D}$ par les transformations linéaires

$$w \longmapsto \epsilon A w \quad (|\epsilon| = 1 \ , \ A \in SO(n)) \ .$$

Un autre avantage de $\mathcal{D}$ est que sa frontière dans $\mathbb{C}^n$ est encore en bijection holomorphe avec la frontière de M dans Q , ce qui cesse d'être vrai dans le cas de D pour une petite partie de la frontière. (Déjà dans le cas d'une variable, la frontière $\mathbb{R}$ du demi-plan correspond par la transformation de Cayley au cercle avec un point enlevé !) . D'autre part D a l'avantage de la simplicité de sa structure géométrique et du fait que P_1 opère linéairement sur D .

On étudie maintenant la frontière de $\mathcal{D}$ et de D . La "frontière de Bergman-Chilov" $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{D}$ est par définition la plus petite partie fermée de $\bar{\mathcal{D}}$ (adhérence de $\mathcal{D}$) telle que toute fonction continue sur $\bar{\mathcal{D}}$ et holomorphe sur $\mathcal{D}$ atteint son maximum en module sur $\mathfrak{B}$. On vérifie que

$$\mathfrak{B} = \{\epsilon x \mid \epsilon \in \mathbf{C} \ , \ |\epsilon| = 1 \ ; \ x \in \mathbf{R}^n \ , \ x'.x = 1\} \ .$$

G et K opèrent sur $\mathfrak{B}$ transitivement et on a $\mathfrak{B} \simeq G/P_1 \simeq K/K \cap P_1$.
La transformation (5) a un sens sur $\mathfrak{B}$ sauf sur une sous-variété de dimension inférieure ; son image est

$$B = \{x + iy \mid y = 0\} \quad (= \mathbf{R}^n) \ .$$

On appelle B la frontière de Bergman-Chilov de D , elle est caractérisée par une propriété analogue à celle de $\mathfrak{B}$ (pour les fonctions F continues holomorphes et bornées, on a $\sup_D |F| = \sup_B |F|$) .

Le reste de la frontière de $\mathcal{D}$ est rempli d'une famille de copies du disque unité de $\mathbf{C}$: l'ensemble

$$\{(\tfrac{1-\zeta}{2i} , \tfrac{1+\zeta}{2} , 0,\dots,0)' \mid |\zeta| < 1 \}$$

et ses images par G . (En fait, les images par K donnent déjà tous ces disques) . Dans $\bar{D}$ ils y correspondent par (5), (6) le demi-plan

$$\{(\zeta,\zeta,0,\dots,0) \mid \operatorname{Im}\zeta > 0\} \tag{8}$$

et ses images par G , en d'autres mots les ensembles

$$H_{x,y} = \{x+\zeta y \mid \operatorname{Im}\zeta > 0\} \tag{9}$$

où y est un point fixe tel que $(y_2^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} = y_1 = 1$ i.e. un point de la sphère S^{n-2} , et $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $x \perp y$. [Pour ces calculs, il est préférable d'introduire les nouvelles coordonnées w_1' , w_2' par $w_1 = \frac{1}{2i}(w_1' - w_2')$, $w_2 = \frac{1}{2}(w_1' + w_2')$ et leurs analogues dans l'espace z . Alors l'intersection

$\mathcal{D} \cap \{w \in \mathbb{C}^n | w_3 = \ldots = w_n = 0\}$ est le produit des disques $|w_1'|, |w_2'| < 1$, sur lesquels (5) devient une transformation de Cayley ordinaire, l'image étant un produit de demi-plans] .

On appelle les disques et demi-plans ainsi obtenus des composantes de la frontière de $\mathcal{D}$ et de D . On convient de dire que chacun des points de $\mathcal{B}$ (et de B) forme aussi, à lui seul, une composante de la frontière. Il est facile de voir que la transformation (5) a un sens pour les composantes de tous les deux types, sauf sur une variété de dimension inférieure. Dans les résultats qui suivent, il s'agira toujours de "presque toutes" les composantes, on peut donc parler indifféremment de $\mathcal{D}$ ou de D sans changer le contenu des énoncés. On va expliciter les résultats seulement pour D .

Concernant les fonctions holomorphes, on peut énoncer brièvement les résultats comme suit.

Si F est holomorphe bornée (ou bien si $\sup_y \int |F(x+iy)|^p dx_1 \ldots dx_n < \infty$ avec un $p \geq 1$, ou bien si F satisfait à une condition L^p analogue sur $\mathcal{D}$) , alors sur presque toutes les composantes de la frontière F a des valeurs limite, qui forment des fonctions holomorphes sur ces composantes. (Pour une composante formée par un seul point de B , "fonction holomorphe" veut dire simplement une valeur constante) .

Pour rendre cela précis, il faut dire en quel sens les limites en question existent. Dans le cas classique du demi-plan dans $\mathbb{C}$, on sait que si Φ est holomorphe et bornée, alors pour presque tout $x^o \in \mathbb{R}$, Φ a une limite non-tangentielle, c'est-à-dire $\lim \Phi(z)$ existe si $z = x+iy$ tend vers x^o en restant dans un domaine $\Gamma_M(x^o) = \{x+iy| \, |x-x_o| < My\}$. (Pour $z \longrightarrow x^o$ sans restriction, $\Phi(z)$ n'a pas de limite en général) .

Dans notre cas, il faut donc trouver les analogues des $\Gamma_M(x^o)$; on les appellera des "voisinages admissibles" des points de la frontière.

On considère les sous-groupes à un paramètre de G définis par

$$\exp tH_1 : z \longmapsto e^{-t}z$$

$$\exp tH_2 : z \longmapsto (z_1\cosh t + z_2\sinh t, z_1\sinh t + z_2\cosh t, z_3, \dots, z_n)$$

(Pour les calculs, il est préférable d'utiliser les coordonnées $z_1' = z_1 + z_2$, $z_2' = z_1 - z_2$; alors $\exp tH_2$ opère simplement par $z_1' \longmapsto e^t z_1', z_2' \longmapsto e^{-t} z_2'$) .

On définit les voisinages admissibles du point $0 \in B$ comme suit : avec c un ensemble compact dans D et τ un nombre réel, soit

$$\Gamma_c^\tau = \{\exp tH_1 \cdot z \mid z \in c, t \geq \tau\} . \tag{11}$$

On définit les voisinages des autres points de B en prenant les translations des Γ_c^τ par les éléments de G . On peut montrer que n'importe quel élément de G qui transporte 0 en $b \in B$ donne la même notion de convergence admissible à b .

Le résultat sur les limites des fonctions holomorphes est alors valable, pour presque tous les points de B , dans le sens de la convergence admissible définie à l'aide des Γ_c^τ . De manière équivalente, on peut dire que pour presque tout $x^0 \in B$ la limite

$$f(x^0) = \lim_{\substack{z \longrightarrow x^0 \\ \|x-x^0\| < My_1 \\ y_2^2+\dots+y_n^2 < \alpha y_1}} F(z) \tag{12}$$

existe pour n'importe quel $M > 0$ et $1 > \alpha > 0$. On peut encore exprimer cela en disant que $z \longrightarrow x^0$ avec $\|z - x^0\| < Md(z)$, où l'on note $d(z)$ la distance de z du bord de D .

Pour la description de la convergence vers la composante (8) , on utilise le groupe à un paramètre $\exp t(H_1 + H_2)$. L'ensemble

$$\{\zeta\,(1,1,0,\dots,0)' + i\,(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, \dots, 0) \mid \mathrm{Im}\ \ > 0\}$$

est une sous-variété totalement géodésique dans D , qui passe par ie_1 et est orthogonale à la ligne géodésique $\{\exp t(H_1 + H_2) \cdot ie_1\}$. Le groupe $\exp t(H_1 + H_2)$

la déplace parallèlement, et pour $t \longrightarrow \infty$ la fait tendre vers (8). En appliquant des rotations autour de l'axe des z_1, et des translations réelles, on a une notion de convergence vers les autres $H_{x,y}$.

Si F est holomorphe et bornée par presque tout $H_{x,y}$, la limite

$$\Phi(x+\zeta y) = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x+\zeta y+\frac{\varepsilon}{2}\tilde{y}) \tag{13}$$

(on a noté $\tilde{y} = (y_1, -y_2, \ldots, -y_n)'$) existe uniformément pour ζ dans n'importe quel compact du demi-plan de $\mathbb{C}$; elle est donc une fonction holomorphe sur $H_{x,y}$. En calculant les analogues des Γ_M (définis en général dans [4]) on trouve un résultat plus fort qui peut être énoncé sous la forme suivante [5] : pour presque tout (x,y) on a $\lim F(z) = \Phi(u)$ pour tout $u \in H_{x,y}$ quand z tend vers u assujetti aux conditions $\|\pi_1(z-u)\|^2 < M\, d(z)$, $\|\pi_2(z-u)\| < M\, d(z)$ avec n'importe quel $M > 0$; on a noté ici π_1 une projection dont le noyau est l'espace tangent de $H_{x,y}$ (identifié avec un sous-espace de $\mathbb{C}^n$), et π_2 une projection dont le noyau est le plus grand sous-espace complexe de l'espace tangent du bord de D au point u.

Il y a deux méthodes pour démontrer ces résultats. Dans la première on place des cônes polygonaux dans l'intérieur de $(y_2^2 + \ldots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} < y_1$ de telle manière qu'on puisse utiliser des résultats sur les fonctions holomorphes sur des produits de demi-plans. La deuxième méthode a l'avantage de conduire directement à l'étude de certaines classes plus générales et très intéressantes sur D. Cette méthode utilise la théorie des fonctions harmoniques et des intégrales de Poisson sur D.

On dit que la fonction F sur D est faiblement harmonique si $\Delta F = 0$, où

$$\Delta = \beta(y)\left(-\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}\right) + 2 \sum_{j,k=2}^{n} y_j y_k \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$$

est l'opérateur de Laplace-Beltrami pour la métrique (4).

On dit que F est <u>harmonique</u> si $TF = 0$ pour tout opérateur différentiel T qui commute aux éléments de G et qui est sans terme constante.
Puisque Δ commute à G , toute fonction harmonique est aussi faiblement harmonique. D'après un théorème de Berezine et de Furstenberg, si F est faiblement harmonique et bornée, alors elle est harmonique ; pour F non bornée, ce n'est pas vrai en général. Par un résultat de Godement, les fonctions harmoniques sont aussi caractérisées par une certaine propriété de la moyenne.

On dit que F est <u>Hua-harmonique</u> si elle satisfait à un certain système de $1+n(n-1)/2$ équations différentielles d'ordre 2 ; ce système est l'analogue pour D du système défini dans [2] , p. 117 pour un autre type de domaine symétrique. Toute fonction Hua-harmonique est harmonique ; d'autre part, toute fonction holomorphe est Hua-harmonique.

Soit A le groupe (commutatif) engendré par $\{\exp t H_1\}$ et $\{\exp t H_2\}$. Soit P_o le groupe engendré par le centralisateur de A dans G et par les éléments de G dont la matrice est triangulaire supérieure par rapport aux coordonnées $z_1', z_2', z_3, \dots, z_n$ (comme on a remarqué plus haut, A opère par des matrices diagonales dans ce système). P_o , ainsi que chacun de ses conjugués, est appelé un <u>sous-groupe parabolique minimal</u> de G . Un <u>sous-groupe parabolique</u> de G est défini comme un sous-groupe qui contient un sous-groupe parabolique minimal. On peut montrer qu'il n'y a que deux sous-groupes dans G qui contiennent P_o . Ce sont P_1 , qui a été défini au début (il est d'ailleurs le sous-groupe engendré par le centralisateur de $\{\exp t H_1\}$ et par les matrices triangulaires supérieures) et P_2 , engendré par le centralisateur de $\{\exp t (H_1 + H_2)\}$ et par les matrices triangulaires.

Si P est un sous-groupe parabolique, l'espace homogène G/P est appelé une <u>frontière</u> de D . On peut montrer que K opère transitivement sur G/P , il existe donc une mesure m invariante par K et ayant masse un sur G/P .

Si f est une fonction intégrable sur G/P , on définit <u>l'intégrale de Poisson</u> F de f par

$$(14) \qquad F(g.ie_1) = \int_{G/P} f(g.u)\ dm(u)$$

pour tout $g \in G$. F est alors une fonction harmonique sur D . Evidemment deux sous-groupes paraboliques conjugués donnent les mêmes intégrales de Poisson, à isomorphisme près il n'y a donc que trois frontières : G/P_o ("frontière maximale de Furstenberg"), G/P_1 dont on sait qu'elle est isomorphe à $\mathcal{B}$, et G/P_2 . On a les résultats précis suivants :

L'intégrale de Poisson $f \longmapsto F$ établit une correspondance biunivoque entre $L^\infty(G/P_o)$ (fonctions bornées mesurables-m) et les fonctions harmoniques bornées sur D , ainsi que entre $L^\infty(G/P_1)$ et les fonctions Hua-harmoniques bornées sur D . Il y a une correspondance analogue entre les mesures positives sur G/P_o (resp. G/P_1) et les fonctions positives harmoniques (resp. Hua-harmoniques) sur D .

Tous les résultats sur les fonctions holomorphes qu'on a exposés plus haut restent valables pour les fonctions Hua-harmoniques. On peut les démontrer en représentant la fonction comme intégrale de Poisson, et en étudiant le comportement asymptotique de cette intégrale exactement comme au cas du théorème classique de Fatou dans le disque unité ou dans le demi-plan.

De manière analogue on peut aussi étudier le comportement des intégrales de Poisson des fonctions sur G/P_o . (En fait, la meilleure façon de démontrer même les résultats sur G/P_1 est de les réduire au cas G/P_o en regardant G/P_o comme un espace fibré sur G/P_1 , et les fonctions sur G/P_1 comme des fonctions sur G/P_o qui sont constantes sur les fibres). On peut identifier les points de G/P_o , sauf une variété à dimension inférieure, aux couples (x,y) où $x \in B\ (= \mathbb{R}^n)$ et $y_2^2 + \dots + y_n^2 = y_1 = 1$ (donc y détermine une génératrice du cône dans l'espace $i\mathbb{R}$) . Convergence vers (x,y) , d'une courbe dans D par exemple, signifie alors convergence vers $x \in \mathcal{B}$ de telle manière que la partie imaginaire devient tangente au vecteur y au point x. En effet, par la théorie générale [4] les voisinages admissibles de $(0,y^o)$, où $y^o = (1,1,0,\dots,0)'$, sont de la forme $\Gamma_C^T = \exp T.\exp \mathfrak{a}^+.C$, avec $\mathfrak{a}^+ = \{t_1H_1+t_2H_2 \mid t_1 > t_2 > 0\}$, $T \in \mathfrak{a}^+$ et $C \subset D$ compact. En calculant avec $C = \{ie_1\}$ on obtient alors le résultat suivant.

Si F est harmonique et bornée, alors pour presque tout (x,y) la limite

$$(15) \qquad f(x,y) = \lim_{r,s\to o} F(x+is(y+r\tilde{y}))$$

existe (et F est l'intégrale de Poisson de f).

Si F est l'intégrale de Poisson d'une fonction $f \in L^1(G/P_o)$, mais pas nécessairement bornée, ce résultat devient faux, mais pour n'importe quel $q > 0$ fixé et presque tout (x,y) on a toujours [9]

$$(16) \qquad f(x,y) = \lim_{s\to o} F(x+is(y+s^q\tilde{y})) .$$

Ce résultat correspond à la définition de "voisinage admissible restreint" de $(0,y^o)$ comme $\{\exp tH\cdot z \mid z \in C , t \geq T\}$ avec $C \subset D$ compact et $H \in \mathfrak{a}^+$ choisi une fois pour toutes (q dépend du choix de H). Ici, comme dans le résultat précédent, on a choisi $C = \{ie_1\}$, donc on n'a pas explicité la forme la plus forte possible.

On peut aussi regarder le comportement d'une fonction harmonique F, intégrale de Poisson de $f \in L^p(G/P_o)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, suivant les groupes à un paramètre $\{\exp tH_1\}$ et $\{\exp t(H_1+H_2)\}$. (H_1 et H_1+H_2 sont sur la frontière de $\mathfrak{a}^+$). Pour H_1+H_2 on trouve le même résultat que dans le cas des fonctions holomorphes, i.e. on a (13) avec la modification évidente que Φ est maintenant une fonction harmonique, pas nécessairement holomorphe sur $H_{x,y}$. Mais pour H_1 la limite (12) n'existera pas, et on aura un phénomène nouveau. L'hyperboloïde donnée par les équations $x = 0$, $y_1^2 - y_2^2 \dots\dots y_n^2 = 1$, est une sous-variété totalement géodésique dans D ; avec la métrique induite par (4) elle est un espace réel hyperbolique à $n-1$ dimensions. Elle est orthogonale à la ligne géodésique $\{\exp t(H_1+H_2)\cdot ie_1\}$, et est déplacée parallèlement par le groupe $\{\exp t(H_1+H_2)\}$.

C'est la restriction de F à ces sous-variétés qui aura pour limite avec $t\to\infty$ une fonction harmonique sur l'espace hyperbolique, plus exactement, cela sera vrai, après des translations réelles, pour presque tout $x^o\in B$. En utilisant que la projection $y \longmapsto (y_2,\dots,y_n)$ est une isométrie de l'hyperboloïde sur la boule unité B_{n-1} dans $\mathbb{R}_{n-1}$ regardée comme modèle de Klein de l'espace hyperbolique, et calculant plus précisément les voisinages admissibles, on trouve que pour presque tout $x^o \in B$ et tout $M>0$,

$$\varphi_{x^o}(y_2,\dots,y_n) = \lim_{\substack{\|x-x^o\|<Ms\\ s\to o}} F(x+si(1,y_2,\dots,y_n)')$$

existe uniformément sur tout compact de B_{n-1}, et φ_{x^o} est harmonique par rapport à la métrique de Klein. On remarque que la transformation

$$y_j = \frac{2\eta_j}{1+\eta_2^2+\dots+\eta_n^2} \quad (2\le j\le n)$$

transforme φ_{x^o} en une fonction sur B_{n-1} qui est harmonique par rapport à la métrique de Poincaré, $ds^2=(1-|\eta|^2)^{-2}d\eta^2$.

On a beaucoup parlé ici des fonctions harmoniques ; c'est en effet la classe la plus intéressante du point de vue de l'analyse harmonique sur les groupes semi-simples. On ne fera que quelques remarques sur les fonctions faiblement harmoniques.

Dans ce cas, on ne peut pas se borner à regarder les fonctions bornées, puisque celles-ci sont automatiquement fortement harmoniques et ne donnent rien de nouveau.

La fait principal, découvert par Karpelevič (cf. [3] p. 410), est que les fonctions positives faiblement harmoniques F admettent une représentation intégrale à l'aide de mesures positives μ sur un espace fibré sur G/P_o, le fibre étant une intervalle. (Ce fibré est essentiellement la frontière de Martin. F est harmonique si et seulement si le support de μ contient au plus un certain point de chaque fibre).

Au moins dans le cas où la mesure μ a une densité bornée φ, (ce qui n'entraîne pas que F soit bornée), on peut retrouver les valeurs de φ en étudiant le comportement asymptotique de $F(x+is(y+s^q\tilde{y}))$ pour $s \to 0$, en analogie avec (16). En ce cas φ sera une fonction de (x,y), qui correspond à un point de G/P_o, et du nombre positif q qui est le paramètre du fibre [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. HELGASON — Differential Geometry and Symetric Spaces, Academic Press, New York 1962.

[2] L.K. HUA — Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Amer. Math. Soc. Translations of Mathematical Monographs, 1963.

[3] A. KORANYI — Harmonic Functions on Symetric Spaces. In : Boothby and Weiss (eds), Symmetric Spaces, M. Dekker, New York 1972.

[4] A. KORANYI — Poisson integrals and boundary components of symmetric spaces, Inventiones Math. 34 (1976) , 19-35.

[5] A. KORANYI — Boundary behaviour of holomorphic functions functions on bounded symmetric domains. In : Several Complex Variables, Amer. Math. Soc. Symposia in Pure Mathematics, 1976.

[6] O. LINDEN — Fatou Theorems for Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami Operator, Thesis, Yeshiva University, New York 1977.

[7] D. LOWDENSLAGER — Potential theory in bounded symmetric homogeneous domains, Ann. of Math. 67 (1958) , 358-378.

[8] I.I. PIATETSKY-CHAPIRO — Géometrie des domaines classiques et théorie des fonctions automorphes, Dunod, Paris 1966.

[9] E.M. STEIN, Maximal functions : Poisson integrals on symmetric spaces, Proc. Math. Acad. Sci. USA 73 (1976) , 2547-2549.

Adam KORANYI
Yeshiva Universty
Belfer Grad School of Sciences
NEW YORK , NY 10033 (U. S. A.)