Recherche Coopérative sur Programme n° 25

Jean Leray

Chapitre III Équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, pour l'atome à un électron, dans un champ magnétique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 25
« Analyse lagrangienne et mécanique quantique par Jean Leray », , exp. n° 5, p. 187-266
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__25__187_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CHAPITRE III

Équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, pour l'atome à un électron, dans un champ magnétique.

INTRODUCTION . - Sommaire . - Les problèmes les plus intéressants de la théorie des équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, sont les problèmes de valeurs propres ; leur caractère essentiel est de n'avoir de solution qu'exceptionnellement. Ce chapitre III donne des exemples de problèmes lagrangiens ayant ce même caractère ; ces problèmes supposent :

$$\ell = 3 \quad ; \quad Z(3) = X \oplus X^* \quad ; \quad X = X^* = E^3 \quad \text{(espace euclidien)} \; ;$$

ils concernent l'opérateur lagrangien a associé à un hamiltonien H , de type approprié : le système d'Hamilton qu'il définit possède deux intégrales premières définies sur $Z(3)$: la longueur L et l'une des composantes M du vecteur $x \wedge p$ de E^3 .

Cet hamiltonien peut être celui de l'électron, non-relativiste ou relativiste, soumis à l'action simultanée du champ électrique d'un noyau atomique fixe et d'un champ magnétique constant (effet Zeeman) ; alors H dépend d'un paramètre : le niveau d'énergie E de l'électron ; a est l'opérateur de Schrödinger ou (cas relativiste) celui de Klein-Gordon ; les niveaux d'énergie pour lesquels nos problèmes lagrangiens ont une solution coïncident avec ceux que définissent les problèmes qu'il est classique d'étudier à propos de ces opérateurs.

L'intérêt du point de vue lagrangien est sa simplicité : par application du théorème 7.1 (Chap. II, § 3), le § 1 obtient ces niveaux d'énergie par une quadrature ; elle se calcule aisément par la méthode des résidus dans les cas Schrödinger et Klein-Gordon.

Le § 1 cherche les solutions, définies mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne compacte, du système lagrangien :

$$(1) \qquad a\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = (a_M - \text{const.})\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2 \; ,$$

où a_{L^2} et a_M sont les opérateurs lagrangiens associés aux intégrales premières L^2 et M : il applique le théorème 7.1. Les équations possédant des solutions (en particulier les niveaux d'énergie) et ces solutions sont caractérisées par 3 entiers, qu'introduit la quantification de Maslov :

$$\ell \ , \ m \ , \ n \qquad \text{tels que} \quad |m| \leq \ell < n \ ;$$

ce sont les 3 nombres quantiques de Schrödinger ; les variétés lagrangiennes sur lesquelles ces solutions sont définies sont <u>des tores</u> $T(\ell,m,n)$ de dimension 3 (cf. théorème 7.1, 2°)), d'équations

$$T(\ell,m,n) : \quad H(x,p) = L^2(x,p) - \text{const.} = M - \text{const.} = 0 \ ,$$

ces constantes ayant les mêmes valeurs que dans (1) et dépendant de (ℓ,m,n) .

Le § 2 cherche <u>les solutions</u>, <u>définies</u> mod. $1/\nu$ <u>sur une variété lagrangienne compacte</u> V <u>et à amplitude lagrangienne</u> > 0 , <u>de l'équation lagrangienne</u>

$$(2) \qquad a\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \ .$$

Il s'agit donc d'un problème formellement analogue au problème aux limites qu'il est classique d'étudier à propos de l'équation de Schrödinger, la condition d'allure à l'infini de ce problème classique étant remplacée par la condition que V est compacte. En général, la condition d'existence est la même : un triplet d'entiers quantiques la définit ; mais la solution correspondant à ce triplet n'est plus nécessairement unique.

Le § 3 cherche <u>les solutions, définies sur une variété lagrangienne compacte</u>, du système lagrangien

$$(3) \qquad a\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = (a_M - \text{const.})\,U = 0 \ ,$$

les constantes étant des nombres formels, réels mod. $1/\nu^2$, H <u>étant l'hamiltonien de l'électron</u>, relativiste ou non ; alors a , a_{L^2} , <u>et</u> a_M <u>commutent</u> ; le théorème 7.2 s'applique ; les solutions sont encore caractérisées par le triplet d'entiers quantiques (ℓ, m, n) ; les solutions du problème (1) sont, mod. $1/\nu$, celles du problème (3).

Le § 4 rappelle <u>le problème qu'il est classique de se poser à propos des équations de Schrödinger et Klein-Gordon</u> : trouver une fonction

$$u : E^3 \to \mathbb{C}$$

de carré sommable ainsi que son gradient, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

(4) $$a\,u = 0 \quad ;$$

le § 3 rappelle la résolution de ce problème, pour montrer qu'elle diffère essentiellement de celle des problèmes précédents : nous constatons, sans l'expliquer, que tous ces problèmes définissent les mêmes niveaux d'énergie.

Les difficultés que rencontre le § 2 et la longueur des calculs qu'emploie le § 3 contrastent avec la simplicité du § 1 ; ce § 1 justifie la conclusion suivante :

CONCLUSION . - Appliquée à l'atome à un électron, placé dans un champ magnétique constant, la quantification de Maslov (Chap. II, § 3, n° 6 et 7) donne aux grandeurs observables (c'est-à-dire aux niveaux d'énergie) les mêmes valeurs que la mécanique ondulatoire ; mais cette quantification de Maslov est directement apparentée à la mécanique corpusculaire, donc, à la première théorie quantique ; néanmoins elle n'en a pas les défauts : elle a une justification logique (Chap. I et II) ; elle n'exige pas la détermination des trajectoires de l'électron non-quantifié, mais seulement la connaissance des intégrales premières classiques, L et M, du système d'Hamilton définissant ces trajectoires.

L'interprétation probabiliste de cette quantification est la suivante : dans l'état défini par un choix du triplet d'entiers quantiques (ℓ, m, n), le point (x,p) représentant à la fois la position x et la quantité de mouvement p de l'électron appartient à un tore $T(\ell, m, n)$ à 3 dimensions de l'espace à 6 dimensions : $Z(3) = E^3 \oplus E^3$; la probabilité que (x,p) appartienne à une partie de $T(\ell, m, n)$ est définie par la mesure invariante η de ce tore $T(\ell, m, n)$ (cf. § 1).

Note . - Soient 2 triplets distincts d'entiers quantiques :

$$(\ell, m, n) \neq (\ell', m', n') \quad ;$$

ils définissent (§ 1) des tores dont l'intersection est vide :

$$T(\ell, m, n) \cap T(\ell', m', n') = \emptyset \quad ;$$

soient U et U' deux fonctions lagrangiennes définies respectivement sur

$$T(\ell, m, n) \quad \text{et} \quad T(\ell', m', n') \quad ;$$

leur produit scalaire est donc (Chap. II, § 2, théorème 3.2, 3°)) :

$$(U/U') = 0 \quad .$$

Historique . - V.P. Maslov n'a pas explicité cet emploi de sa quantification ; il n'a étudié que le cas de nombres quantiques tendant vers l'infini, c'est-à-dire "le principe de correspondance" de la mécanique quantique.

§ 1. Un hamiltonien H, auquel s'applique commodément le théorème 7.1(Ch. II, § 3). Les niveaux d'énergie, avec effet Zeeman, de l'atome à un électron.

Le théorème 7.1 du chap. II, § 3 suppose données, sur $\Omega \subset Z(\ell)$, ℓ fonctions, 2 à 2 en involution. Ce chapitre III choisit $\ell = 3$ et un triplet classique de telles fonctions.

1. QUATRE FONCTIONS, DONT TOUS LES COUPLES, SAUF UN, SONT EN INVOLUTION SUR $E^3 \oplus E^3$. -

Notons $X = X^* = E^3$ l'espace euclidien de dimension 3 ; appliquons le chapitre II à

$$\ell = 3 \quad , \quad Z(3) = E^3 \oplus E^3 \quad ,$$

un repère R_o de Z étant donc choisi : le théorème 5 du chap. II, § 3 nous évite d'en employer d'autre.

Par contre, dans E^3, nous employons non seulement un repère orthonormé fixe (I_1, I_2, I_3), mais aussi un repère orthonormé mobile. Notons :

$$x \in X = E^3 \quad , \quad p \in X^* = E^3 \quad ,$$

(x_1, x_2, x_3) et (p_1, p_2, p_3) les coordonnées de x et p dans (I_1, I_2, I_3) :

$$x = \sum_{j=1}^{3} x_j I_j \quad , \quad p = \sum_{j=1}^{3} p_j I_j \quad .$$

Définissons par

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} &R(x) = |x| \quad , \quad P(p) = |p| \quad , \quad Q(x,p) = \langle p,x \rangle \quad , \quad L(x,p) = |x \wedge p| \quad , \\ &M(x,p) = x_1 p_2 - x_2 p_1 \quad \text{(troisième composante de } x \wedge p) \quad , \end{aligned}$$

cinq fonctions de (x,p), évidemment liées par les relations

$$(1.2) \qquad L^2 + Q^2 = P^2 R^2 \quad ; \quad |M| \leqq L \quad ; \quad 0 \leqq P \quad ; \quad 0 \leqq R \quad .$$

Le vecteur I_3 a donc un rôle priviligié ; (ce sera, par exemple, la direction du champ magnétique produisant l'effet Zeeman).

Dans $E^3 \oplus E^3$, le système caractéristique de $d\langle p,dx \rangle$ est

$$dx = dp = 0 \quad :$$

toute fonction $E^3 \oplus E^3 \to R$ en est intégrale première ; la parenthèse de Poisson $(\, . \, , \, . \,)$ (définition 2 du chap. II, § 3) de deux telles fonctions

est donc définie; vu la formule (2.5) (ibid.)

(1.3) $(L,M) = (L,Q) = (L,R) = (M,Q) = (M,R) = 0 \quad , \quad (Q,R) = R \quad .$

D'après le théorème 2 (E. Cartan) du chap. II, § 3, une quadrature définit localement sur $E^3 \oplus E^3$ quatre fonctions numériques réelles

$$f_o \quad , \quad f_1 \quad , \quad f_3 \quad , \quad f_5$$

telles que :

(1.4) $$< p,dx > = df_o + f_1\, dL + f_3\, dM + f_5\, dR \quad .$$

Explicitons ces fonctions f_j . Notons (J_1 , J_2 , J_3) le repère mobile orthonormé, défini pour $L \neq 0$, tel que :

(1.5) $$x = R\, J_1 \quad , \quad x \wedge p = L\, J_3 \quad ,$$

ce qui implique :

(1.6) $$p = QR^{-1}\, J_1 + LR^{-1}\, J_2 \quad , \quad P \neq 0 \quad , \quad R \neq 0 \quad .$$

Notons $\omega_1 , \omega_2 , \omega_3$ les composantes infinitésimales du déplacement relatif de ce repère (G. Darboux -E. Cartan) ; ce sont les formes de Pfaff

$$\omega_1 = < J_3 , dJ_2 > = - < J_2 , dJ_3 > \quad , \quad \omega_2 = < J_1 , dJ_3 > \quad , \quad \omega_3 = < J_2 , dJ_1 >$$

telles que :

(1.7) $$dJ_1 = \omega_3\, J_2 - \omega_2\, J_3 \quad , \quad dJ_2 = \omega_1\, J_3 - \omega_3\, J_1 \quad , \quad dJ_3 = \omega_2\, J_1 - \omega_1\, J_2 \quad ;$$

rappelons que la différentiation extérieure de ces relations donne les équations (qui sont les équations de structure du groupe orthogonal) :

(1.8) $$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2 \quad , \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 \quad , \quad d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1 \quad .$$

La différentiation de $(1.5)_1$ donne, vu (1.7) :

(1.9) $$dx = (dR)\, J_1 + R\, \omega_3\, J_2 - R\, \omega_2\, J_3 \quad ;$$

d'où, vu (1.6)

(1.10) $$< p,dx > = QR^{-1}\, dR + L\, \omega_3 \quad .$$

Pour transformer cette formule en une formule du type (1.4), introduisons les angles d'Euler Φ , Ψ , Θ ; ce sont les paramètres du repère (J_1 , J_2 , J_3) définis comme suit, pour

$$J_3 \neq \pm I_3 \quad , \quad \text{c'est-à-dire :} \quad |M| < L \quad :$$

Θ est l'angle de I_3 et J_3 ; $o < \Theta < \pi$;

une rotation de Φ autour de I_3 transforme (I_1, I_2, I_3) en (I'_1, I'_2, I_3) tels que

$$I'_2 \sin \Theta = I_3 \wedge J_3 ;$$

une rotation de Θ autour de I'_2 transforme (I'_1, I'_2, I_3) en (I''_1, I'_2, J_3) ;

une rotation de Ψ autour de J_3 transforme (I''_1, I'_2, J_3) en (J_1, J_2, J_3).

Evidemment :

$$M = L \cos \Theta ; \tag{1.11}$$

Φ et Ψ sont définis mod. 2π. On a les formules classiques :

$$\begin{aligned} J_1 &= (\cos \Phi \cos \Psi \cos \Theta - \sin \Phi \sin \Psi) I_1 + \\ &\quad + (\sin \Phi \cos \Psi \cos \Theta + \cos \Phi \sin \Psi) I_2 - \cos \Psi \sin \Theta I_3 ; \\ J_2 &= (-\cos \Phi \sin \Psi \cos \Theta - \sin \Phi \cos \Psi) I_1 + \\ &\quad + (-\sin \Phi \sin \Psi \cos \Theta + \cos \Phi \cos \Psi) I_2 + \sin \Psi \sin \Theta I_3 \\ J_3 &= \cos \Phi \sin \Theta I_1 + \sin \Phi \sin \Theta I_2 + \cos \Theta I_3 . \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\cos \Psi \sin \Theta \, d\Phi + \sin \Psi \, d\Theta ; \\ \omega_2 &= \sin \Psi \sin \Theta \, d\Phi + \cos \Psi \, d\Theta ; \\ \omega_3 &= \cos \Theta \, d\Phi + d\Psi . \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'expression explicite de la formule (1.10) est, vu (1.11) et $(1.13)_3$:

$$< p, dx > = Q \frac{dR}{R} + L \, d\Psi + M \, d\Phi ; \tag{1.14}$$

cette formule fondamentale est du type (1.4), <u>conformément au théorème d'E. Cartan</u> qui nous guide.

<u>Formules complémentaires</u> . - La différentiation de (1.6) donne, vu (1.7) :

$$dp = [d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3]J_1 + [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3]J_2 + [LR^{-1}\omega_1 - QR^{-1}\omega_2]J_3 . \tag{1.15}$$

Vu (1.9) $d^3x = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ vaut :

(1.16) $$d^3x = R^2(dR) \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ;$$

D'où, vu (1.15) :

$$d^3x \wedge d^3p = L\,\frac{dR}{R} \wedge dQ \wedge dL \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ,$$

c'est-à-dire, en substituant aux ω_j leurs expressions (1.13) et en éliminant Θ grâce à (1.11) :

(1.17) $$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dQ \wedge \frac{dR}{R} \wedge d\Phi \wedge d\Psi \quad .$$

Notons Ω^6 <u>une partie ouverte de</u> $Z(3) = E^3 \oplus E^3$ sur laquelle :

$$|M| < L \quad ;$$

sur Ω^6 nous pouvons donc employer les coordonnées

$$L \ , \ M \ , \ Q \ , \ R \ , \ \Phi \ , \ \Psi \quad ,$$

Φ et Ψ étant définis mod. 2π .

<u>Note</u> 1 . - Sur Ω^6 , $L \neq 0$; donc, vu $(1.2)_1$: $P \neq 0$, $R \neq 0$.

LEMME 1 . - Soit V une variété lagrangienne de Ω^6 ; $(\dim V = 3)$; remplaçons chacune des fonctions et des formes différentielles précédentes par sa restriction à V .

1°) <u>Le contour apparent</u> Σ_{R_o} <u>de</u> V est la surface de V où :

(1.18) $$\Sigma_{R_o} \ : \ dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0 \quad \text{sur} \quad V \quad .$$

2°) au voisinage d'un point de Σ_{R_o} , il existe sur V une forme différentielle $\overline{\omega}$ de degré 3 , nulle part nulle, telle que sur Σ_{R_o} :

(1.19) $$dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} \geqq 0 \quad ; \quad dL \wedge dR \wedge \omega_2 / \overline{\omega} \geqq 0 \quad ; \quad dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 / \overline{\omega} \geqq 0 \quad ,$$

les trois premiers membres étant trois fonctions non simultanément nulles ; il existe une constante c telle que, au voisinage de ce point de V , l'indice de Maslov m_{R_o} de V ait la valeur :

(1.20) $$\begin{aligned} m_{R_o} &= c \quad \text{pour} \quad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} < 0 \quad , \\ &= 1 + c \ \text{pour} \quad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} > 0 \quad . \end{aligned}$$

<u>Preuve de</u> 1°) . - L'expression (1.16) de d^3x .

<u>Preuve de</u> 2°) .- Calculons le saut de m_{R_o} à travers Σ_{R_o} en appliquant le théorème 3.2 du chap. I, § 3. Vu (1.9), (1.15), et (1.18), les composantes d_jx et d_jp de dx et dp dans le repère (J_1, J_2, J_3) vérifient sur V en les points de Σ_{R_o} :

$$d_1p \wedge d_2x \wedge d_3x = R^2[d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = R\, dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ;$$

$$d_1x \wedge d_2p \wedge d_3x = - R\, dR \wedge [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 = dL \wedge dR \wedge \omega_2 \quad ;$$

$$d_1x \wedge d_2x \wedge d_3p = (dR) \wedge \omega_3 \wedge [L\,\omega_1 - Q\,\omega_2] = L\, dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 \quad .$$

D'où, vu ce théorème 3.2 (chap. I, § 3), l'existence de $\overline{\omega}$ vérifiant (1.19) et (1.20).

2. CHOIX D'UN HAMILTONIEN H . - Soit une fonction indéfiniment différentiable

$$H : \Omega^6 \to R \quad ;$$

<u>en involution avec</u> L <u>et</u> M , c'est-à-dire, vu (1.14) , fonction composée des fonctions L , M , Q , R :

(2.1) $$H(x,p) = H[L(x,p) \;,\; M(x,p) \;,\; Q(x,p) \;,\; R(x)] \quad ;$$

$H[.]$ est une fonction indéfiniment différentiable, définie sur une partie ouverte Ω^4 de l'espace R^4 de coordonnées L , M , Q , R ; nous supposons sur Ω^4 :

(2.2) $$0 < R \;,\; |M| < L \;,\; (H_Q \;,\; H_R) \neq (0,0) \quad \text{pour } H = 0 :$$

H_Q désigne la fonction valant $\dfrac{\partial H[L\,,\,M\,,\,Q\,,\,R]}{\partial Q}$.

Vu (1.3), les trois fonctions H , L , M de (x,p) sont deux à deux en involution, ce qui permet d'appliquer explicitement le chap. II, § 3 à l'opérateur lagrangien a associé à H .

D'après le théorème 2 (E. Cartan) du chap. II, § 3 , une quadrature définit localement, sur Ω^6 , quatre fonctions numériques réelles

$$g_0 \ , \ g_1 \ , \ g_2 \ , \ g_3$$

telles que

$$(2.3) \qquad < p \ , \ dx > = dg_0 + g_1 \, dL + g_2 \, dM + g_3 \, dH \ ;$$

nous emploierons cette formule pour $H = 0$; le lemme qui suit l'explicite pour $H = 0$;

vu (1.14), la quadrature est la définition de Ω par (2.8).

Notations . - Soit (cf. chap. II, § 3) W l'hypersurface de Ω^6 d'équation

$$W : \quad H(x,p) = 0$$

Notons $(L_o \ , \ M_o)$ tout couple de nombres réels tel que $|M_o| < L_o$; notons $V[L_o \ , \ M_o]$ toute composante connexe de la partie de W d'équations

$$(2.4) \qquad V[L_o \ , \ M_o] : H(x,p) = 0 \ , \quad L(x,p) = L_o \ , \quad M(x,p) = M_o \ .$$

W est la réunion des $V[L_o \ , \ M_o]$; vu le théorème 7.1, $V[L_o \ , \ M_o]$ est une variété lagrangienne ; elle est le produit topologique

- du tore de dimension 2 et de coordonnées Φ et Ψ mod. 2π ;
- d'une courbe connexe $\Gamma[L_o \ ; \ M_o]$ du demi-plan ouvert de coordonnées $(Q \ , \ R > 0)$; l'équation de cette courbe est

$$(2.5) \qquad \Gamma[L_o \ , \ M_o] \ : \quad H[L_o \ , \ M_o \ , \ Q \ , \ R] = 0 \ ;$$

cette courbe n'a pas de point singulier, vu $(2.2)_3$.

Sur W définissons, à l'addition près d'une fonction de (L, M), une fonction numérique réelle t de $[L, M, Q, R]$ par la condition :

$$(2.6) \qquad dt = \frac{dR}{RH_Q[L, M, Q, R]} = -\frac{dQ}{RH_R[L, M, Q, R]} \quad \text{sur } \Gamma[L, M];$$

quand la courbe $\Gamma[L, M]$ est fermée, alors t est défini mod. $c[L, M]$, où

$$(2.7) \qquad c[L, M] = \oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dR}{RH_Q} = -\oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dQ}{RH_R} \quad ;$$

t est monotone sur Γ ; (L, M, t, Φ, Ψ) constitue un sytème de coordonnées locales de W.

Définissons sur W, à l'addition près d'une fonction de (L, M), une autre fonction numérique réelle Ω par :

$$(2.8) \qquad d\Omega = Q\frac{dR}{R} \quad \text{sur } \Gamma[L, M];$$

quand la courbe $\Gamma[L, M]$ est fermée, alors Ω est défini mod. $2\pi N[L, M]$ où

$$(2.9) \qquad N[L, M] = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma[L, M]} Q\frac{dR}{R} > 0 \;;$$

Ω n'est pas monotone sur Γ. Notons sa différentielle :

$$(2.10) \qquad d\Omega[L, M, t] = Q\frac{dR}{R} + \lambda[L, M, t]\,dL + \mu[L, M, t]\,dM;$$

le § 2 précisera les propriétés des fonctions λ et μ ainsi définies.

Nous pouvons maintenant expliciter la restriction de (2.3) à W :

LEMME 2 . - 1°) La restriction à W de la forme de Pfaff

$$\omega = \langle p, dx\rangle$$

est :

$$(2.11) \qquad \omega_W = d(\Omega + L\Psi + M\Phi) - (\lambda + \Psi)\,dL - (\mu + \Phi)\,dM.$$

2°) Le système caractéristique de $d\omega_W$ est <u>le système d'Hamilton</u> :

$$(2.12) \qquad \frac{dx}{H_p(x,p)} = -\frac{dp}{H_x(x,p)}, \quad H(x,p) = 0 .$$

Ses intégrales premières sont les fonctions composées des fonctions :

$$(2.13) \qquad L, M, \lambda + \Psi, \mu + \Phi ;$$

L et M sont en involution ; $\lambda + \Psi$ et $\mu + \Phi$ aussi.

3°) Sur les courbes solution de ce système, c'est-à-dire sur les courbes caractéristiques de W, nous avons

$$(2.14) \quad dt = \frac{dx}{H_p(x,p)} = -\frac{dp}{H_x(x,p)} = \frac{dR}{RH_Q[L,M,R,Q]} = \frac{d\Psi}{H_L[\,.\,]} = \frac{d\Phi}{H_M[\,.\,]} = -\frac{dQ}{RH_R[\,.\,]},$$

$$dL = dM = 0 .$$

4°) Sur W :

$$(2.15) \qquad \frac{d^3x \wedge d^3p}{dH}\Big|_W = dL \wedge dM \wedge dt\, d\Phi \wedge d\Psi .$$

<u>Preuve de</u> 1°). - L'expression (1.14) de $\langle p, dx\rangle$ dans Z et l'expression (2.10) de $Q\,dR/R$ sur W.

<u>Preuve de 2°)</u>. - Le lemme 3.2 (E. Cartan) du Chap. II, §3 prouve que $d\omega_W$ a pour système caractéristique (2.12) et est de rang 4 ; or, vu (2.11) :

$$d\omega_W = dL \wedge d(\lambda + \Psi) + dM \wedge d(\mu + \Phi) ;$$

donc (définition d'E. Cartan du sytème caractéristique, Chap. II, § 3, n° 2), les 4 fonctions (2.13) sont intégrales premières de ce système ; les couples L, M et $\lambda + \Psi, \mu + \Phi$ sont en involution vu la Note 2.2 du Chap. II, § 3 .

<u>Preuve de 3°)</u> . - Ce même lemme (E. Cartan) et l'expression (1.14) de $\langle p, dx\rangle$ prouvent que $d\omega_W$ a pour système caractéristique :

$$\frac{dR}{RH_Q[L,M,Q,R]} = \frac{d\Psi}{H_L[\,.\,]} = \frac{d\Phi}{H_M[\,.\,]} = -\frac{dQ}{RH_R[\,.\,]} = \frac{dL}{0} = \frac{dM}{0}, \quad H = 0 .$$

Evidemmment :

$$\frac{dx}{H_p(x,p)} = \frac{\langle x, dx\rangle}{\langle x, H_p(x,p)\rangle} = \frac{R\,dR}{\langle x, L_p\rangle H_L + \langle x, M_p\rangle H_M + \langle x, Q_p\rangle H_Q} ;$$

or, puisque $x \wedge (p + s\,x)$ est indépendant de la variable réelle s ,

$$\langle x, L_p\rangle = \langle x, M_p\rangle = 0 ;$$

d'autre part

$$\langle x, Q_p\rangle = R^2 ;$$

les quatre relations précédentes impliquent:

$$\frac{dx}{H_p(x,p)} = \frac{dR}{R H_Q[L, M, Q, R]} = \frac{d\Psi}{H_L} = \frac{d\Phi}{H_M} = -\frac{dQ}{R H_R} ,$$

donc (2.14) , vu (2.6) et (2.12) .

<u>Preuve de 4°)</u> . - La formule (1.17) s'écrit :

$$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dH \wedge \frac{dR}{R H_Q} \wedge d\Phi \wedge d\Psi ,$$

où, pour $H = 0$, vu (2 .14) :

$$\frac{dR}{R H_Q} = dt \mod. (dL, dM) ;$$

d'où (2.15) , dont le sens est le suivant :

$\left.\frac{d^3x \wedge d^3p}{dH}\right|_W$ désigne la restriction ϖ_W à W des formes de degré 5 , ϖ, telles que $dH \wedge \varpi = d^3x \wedge d^3p$; ϖ_W est évidemment indépendant du choix de ϖ.

3. LES TORES QUANTIFIES $T(\ell, m, n)$ CARACTERISANT LES SOLUTIONS, DEFINIES mod. $1/\nu$ SUR DES VARIETES COMPACTES, DU SYSTEME LAGRANGIEN :

(3.1) $$a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\,U = (a_M - M_o)\,U = 0 \mod. 1/\nu^2 ;$$

a, a_{L^2} et a_M désignent <u>les opérateurs lagrangiens associés</u> respectivement <u>aux hamiltoniens en involution</u> :

$$H , L^2 , M ;$$

L_o et M_o sont deux constantes réelles telles que : $|M_o| < L_o$.

D'après le théorème 7.1 du chap. II, § 3 , les solutions de ce système sont <u>les fonctions lagrangiennes</u> U , <u>à amplitude lagrangienne constante</u>, <u>définies mod.</u> $1/\nu$ <u>sur celles des variétés</u> $V[L_o, M_o]$, compactes ou non, définies par (2.4), <u>qui vérifient la condition quantique de Maslov</u> (chap. II, § 3, déf. 6.2) ; $V[L_o, M_o]$ est choisi connexe ; <u>la mesure</u> η_V <u>de</u> V, <u>invariante</u> par les vecteurs caractéristiques de H , $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$, qui sert à définir l'amplitude lagrangienne, est

(3.2) $$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi ,$$

vu (2.15) et la formule (7.4) du chap. II, § 3 .

Rappelons l'énoncé de cette condition quantique de Maslov : la fonction

(3.3) $$\frac{1}{2\pi\hbar}\varphi_{R_o} - \frac{1}{4} m_{R_o} \qquad (\text{ où } \hbar = \frac{i}{\nu_o} \text{ est réel})$$

est uniforme sur V mod. 1

La phase φ_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ (définie chap. I, § 2, n° 9 ; § 3, n° 1), vu (2.11) où $L = L_o$, $M = M_o$, est :

(3.4) $$\varphi_{R_o} = \Omega + L_o \Psi + M_o \Phi .$$

Calculons l'indice de Maslov de $V[L_o, M_o]$:

LEMME 3 . - 1°) <u>Le contour apparent</u> Σ_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ est la réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de deux surfaces de $V[L_o, M_o]$ d'équations

$$\Sigma_1 : \Psi = 0 \text{ mod. } \pi \; ; \; \Sigma_2 : H_Q[L, M, Q, R] = 0 .$$

2°) <u>L'indice de Maslov</u> m_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ est, à l'addition près d'un entier constant :

(3.5) $$m_{R_o} = [\frac{1}{\pi}\Psi] - [\frac{1}{\pi} \text{ arc tg } \frac{H_Q}{H_R}] \text{ sur } \check{V}[L_o, M_o];$$

[...] désigne <u>la partie entière</u> de ....

<u>Preuve</u> . - Appliquons le lemme 1. Sur $V[L_o, M_o]$, vu (1.11) et (1.13) :

$$\omega_1 = -\cos\Psi \sin\Theta \, d\Phi \, , \omega_2 = \sin\Psi \sin\Theta \, d\Phi, \; L_o \, \omega_3 = L_o \, d\Psi + M_o \, d\Phi \, ;$$

donc, vu (2.6) :

$$(3.6) \qquad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = - R H_Q \sin\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi \, ,$$

$$(3.7) \qquad dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = R H_R \sin\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi \, ,$$

$$(3.8) \qquad dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = - R H_Q \cos\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi \, ,$$

où $R \sin\Theta \neq 0$, vu $(2.2)_1$ et $(2.2)_2$.

Vu le lemme 1.1°), $\sum_{R_o}$ a pour équation

$$H_Q \sin\Psi = 0 \, ;$$

d'où le 1°) du lemme 3.

Au voisinage d'un point de $\sum_1 \setminus \sum_1 \cup \sum_2$, $H_Q \cos\Psi \neq 0$; nous pouvons donc dans le lemme 1.2°) choisir :

$$\bar{\omega} = dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 \; ; \; dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \bar{\omega} = \operatorname{tg}\Psi \, ;$$

d'où, vu ce lemme :

$$(3.9) \qquad m_{R_o} = \left[\frac{1}{\pi} \Psi \right] + \text{const} \, .$$

Au voisinage d'un point de $\sum_2 \setminus \sum_1 \cup \sum_2$, $H_R \sin\Psi \neq 0$ vu $(2.2)_3$; nous pouvons donc dans le lemme 1.2°) choisir :

$$\bar{\omega} = dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \; ; \; dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \bar{\omega} = - H_Q / H_R \; ; \text{ d'où :}$$

$$(3.10) \qquad m_{R_o} = \text{const.} - \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} \right] .$$

L'expression globale de m_{R_o} résulte des deux expressions locales (3.9) et (3.10) .

<u>La condition quantique de Maslov</u> (3.3) s'énonce, vu (3.4) et (3.5) : la fonction

$$\frac{1}{\hbar}\ \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\ \text{arc tg}\ \frac{H_Q}{H_R} + \left(\frac{L_o}{\hbar} - \frac{1}{2}\right)\frac{\Psi}{2\pi} + \frac{M_o}{\hbar}\ \frac{\Phi}{2\pi}$$

est définie mod. 1 sur $V[L_o , M_o]$.

Si $V[L_o , M_o]$ <u>est compacte</u>, c'est-à-dire si la courbe $\Gamma[L_o , M_o]$ est fermée, cette condition est la suivante, vu (2.9) :

$$\frac{1}{\hbar} N[L_o , M_o] + \tfrac{1}{2} , \frac{1}{\hbar} L_o - \tfrac{1}{2} , \frac{1}{\hbar} M_o$$

sont 3 entiers ; notons-les, pour retrouver les notations classiques en physique quantique :

$$n - \ell \quad , \quad \ell \quad , \quad m \quad ;$$

puisque $N > 0$ et $|M_o| < L_o$, nous avons

$$|m| \leqq \ell < n.$$

<u>Si</u> $V[L_o , M_o]$ <u>n'est pas compacte</u>, cette condition quantique de Maslov se réduit à la suivante :

$$\frac{1}{\hbar} L_o - \tfrac{1}{2} = \ell , \frac{1}{\hbar} M_o = m$$

sont deux entiers tels que $|m| \leqq \ell$.

La conclusion de ce n°3 est donc le

THEOREME 3 . - <u>Les variétés connexes sur lesquelles sont définies les solutions du système lagrangien</u> (3.1) <u>sont</u> :

1°) <u>les variétés</u> $V[L_o , M_o]$ COMPACTES, <u>définies par</u> (2.4), <u>et telles qu'existent</u> 3 <u>entiers</u> :

$$\ell , m , n ,$$

<u>vérifiant les conditions</u> :

(3.11) $$|m| \leqq \ell < n ,$$

(3.12) $$L_o = \hbar(\ell + \tfrac{1}{2}) , M_o = \hbar\ m , L_o + N[L_o , M_o] = \hbar\ n ;$$

$V[L_o ; M_o]$ <u>est alors un tore, qui sera noté</u> $T(\ell , m , n)$: ses coordonnées sont

(3.13) $$t \bmod c\ [L_o , M_o] , \text{ défini par } (2.7) ; \Psi \bmod. 2\pi ; \Phi \bmod. 2\pi .$$

2°) les variétés $V[L_o, M_o]$ NON-COMPACTES, définies par (2.4), et telles qu'existent 2 entiers

$$\ell , m$$

vérifiant les conditions :

(3.14) $$|m| \leq \ell ;$$

(3.15) $$L_o = \hbar (\ell + \tfrac{1}{2}) , M_o = \hbar m ;$$

$V[L_o, M_o]$ est alors le produit

- d'un tore de dimension 2 , de coordonnées Ψ mod. 2π, Φ mod. 2π ;
- et d'une droite, demi-droite ou segment de coordonné t.

Munissons $V[L_o, M_o]$, compacte ou non, de la mesure invariante par les vecteurs caractéristiques de H, $L^2-L_o^2$, $M-M_o$:

(3.16) $$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi ;$$

alors les solutions de (3.1) définies sur V sont les fonctions lagrangiennes à amplitude lagrangienne constante.

Note 3.1 . - Nous nous limiterons désormais à l'étude des variétés lagrangiennes compactes ; (par exemple : de l'électron appartenant à un atome) .

Note 3.2. - Les vecteurs caractéristiques de $L^2-L_o^2$ et $M-M_o$ sont respectivement :

(3.17) $$\varkappa_{L^2-L_o^2} : dL = dM = dt = o , d\Psi = 2L_o , d\Phi = o ;$$

(3.18) $$\varkappa_{M-M_o} : dL = dM = dt = d\Psi = o , d\Phi = 1 .$$

L'on vérifie de suite que ces vecteurs laissent η_V invarariant.

Preuve de (3.17) . - $\varkappa_{L^2-L_o^2}$ est le vecteur tangent à $V[L_o, M_o]$ tel que , vu $(1.2)_1$ puis $(1.5)_1$ et (1.6) , puis $(1.5)_1$ et (1.12) :

$$dx = 2 L L_p = 2 (R^2 p - Qx) = 2 L R J_2 = 2L \frac{\partial x(L, M, t, \Psi, \Phi)}{\partial \Psi}$$

ce qui prouve (3.17) .

Preuve de (3.18) . - $\varkappa_{M-M_o}$ est le vecteur tangent à $V[L_o, M_o]$ tel que, vu (1.1) , puis $(1.5)_1$ et (1.12) :

$$dx = (-x_2 , x_1 , o) = \frac{\partial x(L, M, t, \Psi, \Phi)}{\partial \Phi} .$$

Note 3.3. - Le vecteur caractéristiques de H [cf. (2.14)] :

(3.19) $$\varkappa : dL = dM = o , \; dt = 1, \; d\Psi = H_L , \; d\Phi = H_M$$

et ceux de $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$ engendrent, conformément au théorème 7.1. 2°) du Chap. II, §3, un groupe de translations de la variété $V[L_o , M_o]$, quand elle est compacte, donc un tore : les translations, en coordonnées [cf. (2.7) et § 2, (1.5)] :

$$t \mod. c[L_o,M_o] , \; \Psi + \lambda [t,L_o,M_o] - \frac{N_L[L_o,M_o]}{c\,[L_o,M_o]}\, t \mod. 2\pi , \; \Phi + \pi - \frac{N_M}{c}\, t \mod. 2\pi$$

4. EXEMPLES : LES OPERATEURS DE SCHRÖDINGER ET KLEIN - GORDON. -

Choisissons :

(4.1) $$H(x , p) = \tfrac{1}{2} \left[P^2 - \frac{K[R , M]}{R^2}\right] ,$$

$K : \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction donnée. Autrement dit :

(4.2) $$H[L, M, Q, R] = \frac{1}{2R^2} \left[L^2 + Q^2 - K[R , M]\right] .$$

L'application du théorème 3 est immédiate.

La condition que (2.4) définisse au moins une hypersurface compacte $V[L_o , M_o]$, qui est un tore, est la suivante : la fonction

$$\mathbb{R}_+ \ni R \mapsto K[R , M_o] - L_o^2 \in \mathbb{R}$$

est positive entre deux zéros consécutifs, R_1 et R_2 $(0 < R_1 < R_2)$;

alors (2.9) définit :

(4.3) $$N[L_o , M_o] = \frac{1}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{K[R , M_o] - L_o^2}\, \frac{dR}{R} > 0 .$$

Note 4.1. - Si K est fonction affine de M, alors, vu (4.1) :

(4.4) $$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle H(x , p) = 0$$

et par suite [Chap. II, § 1, Déf. 6.2 et (6.3)], l'opérateur associé à H a pour expression dans R_o :

(4.5) $$a = \frac{1}{2\nu^2}\,\Delta - \frac{1}{2R^2}\,K\left[R, \frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\right]$$

où : $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; l'opérateur $\frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ et le produit par toute fonction de R commutent.

<u>Exemple</u> 4.1 . - Nommons <u>opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon</u> l'opérateur associé à l'hamiltonien :

(4.6) $$H(x,p) = \tfrac{1}{2}\left[P^2 + A(M) - \frac{2B(M)}{R} + \frac{C(M)}{R^2}\right],$$

où $A, B, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Notons :

$$A_o = A(M_o),\ B_o = B(M_o),\ C_o = C(M_o).$$

La condition qu'existe au moins une variété compacte $V[L_o, M_o]$ définie par (2.4) s'explicite comme suit :

(4.7) $$A_o > 0,\ L_o^2 + C_o > 0,\quad B_o > \sqrt{A_o}\,\sqrt{L_o^2 + C_o};$$

quand elle est satisfaite, $V[L_o, M_o]$ est unique et, vu (4.3) :

$$N[L_o, M_o] = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{-A_o R^2 + 2B_o R - L_o^2 - C_o}\,\frac{dR}{R},$$

l'intégrale étant calculée le long d'un lacet de $\mathbb{C}$ entourant la coupure $[R_1, R_2]$; le calcul de deux résidus, en $R = \infty$ et $R = 0$, donne :

(4.8) $$N[L_o, M_o] = \frac{B_o}{\sqrt{A_o}} - \sqrt{L_o^2 + C_o} > 0.$$

L'énoncé du théorème 3 devient donc le suivant :

THEOREME 4.1. - Soit a l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon, c'est-à-dire l'opérateur associé à l'hamiltonien (4.6) ; soient a_{L^2} et a_M les opérateurs associés aux hamiltoniens L^2 et M. Alors le système lagrangien

$$(4.9) \qquad a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\,U = (a_M - M_o)\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2$$

possède des solutions définies sur une variété COMPACTE si et seulement s'il existe un triplet d'entier (ℓ, m, n) tel que :

$$(4.10) \qquad L_o = \hbar\,(\ell + 1/2)\ ,\ M_o = \hbar\, m\ ,$$

$$(4.11) \qquad \begin{cases} |m| \leq \ell < n\ ,\ (\ell + 1/2)^2 + C_o \hbar^{-2} > 0\ , \\ A_o = B_o^2\, \hbar^{-2} \left[n - \ell - 1/2 + \sqrt{(\ell + 1/2)^2 + C_o \hbar^{-2}} \right]^{-2} . \end{cases}$$

Si cette condition est réalisée, cette variété compacte est unique : c'est le tore $T(\ell, m, n)$ d'équations

$$(4.12) \qquad T(\ell, m, n) : H(x, p) = L(x, p) - L_o = M(x, p) - M_o = 0\ .$$

Munissons ce tore de la mesure invariante (3.16) ; alors les solutions de (4.9) définies mod. $1/\nu$ sur $T(\ell, m, n)$ sont les fonctions lagrangiennes à amplitude lagrangienne constante.

Notations, concernant la physique et employées seulement par la fin de ce n° 4. - Donnons-nous, dans E^3, un potentiel électrique $\mathcal{A}_0 : X \to R$ et un potentiel-vecteur magnétique $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) : X \to R^3$, indépendants du temps et vérifiant la loi physique :

$$(4.13) \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x_j} = 0 \quad ;$$

on sait que les trajectoires dans E^3 de l'électron, non-relativiste ou relativiste, de masse μ, de charge électrique $-\varepsilon < 0$, sont les solutions du système d'Hamilton défini par l'hamiltonien valant dans le cas non-relativiste :

$$(4.14) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^{3} \left[p_j + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{A}_j(x)\right]^2 - E - \varepsilon\, \mathcal{A}_0(x) \quad ,$$

dans le cas relativiste :

$$(4.15) \quad H(x,p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^{3} \left[p_j + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{A}_j(x)\right]^2 - \frac{1}{2\mu\, c^2} \left[E + \varepsilon\, \mathcal{A}_0(x)\right]^2 + \frac{1}{2} \mu\, c^2 \quad ;$$

c est la vitesse de la lumière ;
E est une constante, qui est l'énergie des électrons dont la position x et la quantité de mouvement p vérifient $H(x,p) = 0$;(énergie incluant la masse au repos $\mu\, c^2$ dans le cas relativiste).

Vu (4.13)

$$< \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} > \; H(x,p) = 0 \quad ;$$

vu le chap. II, § 1, (6.3) et déf. 6.2, l'opérateur associé à H est donc, dans le cas non-relativiste l'opérateur de Schrödinger :

$$(4.16) \quad a = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{\nu^2} \Delta + \frac{2\varepsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j(x) \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2(x) \right] - E - \varepsilon\, \mathcal{A}_0(x) \quad ,$$

dans le cas relativiste l'opérateur de Klein-Gordon :

$$(4.17) \quad a = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{\nu^2} \Delta + \frac{2\varepsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2 \right] - \frac{1}{2\mu\, c^2} \left[E + \varepsilon\, \mathcal{A}_0\right]^2 + \frac{\mu\, c^2}{2} \quad .$$

Particularisons comme suit ces hamiltoniens et ces opérateurs : $\mathcal{A}_0$ est le potentiel électrique du noyau de nombre atomique Z, placé à l'origine ; le

champ magnétique est constant, parallèle au troisième axe de coordonnées et d'intensité $\mathcal{H}$.

Autrement dit :

$$(4.18) \qquad \mathcal{A}_0(x) = \frac{\varepsilon Z}{R}\ ,\ \mathcal{A}_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{H}x_2\ ,\ \mathcal{A}_2(x) = \frac{1}{2}\mathcal{H}x_1\ ,\ \mathcal{A}_3 = 0\ .$$

Négligeons, comme en physique, les termes en $\mathcal{H}^2$; les hamiltoniens (4.14) et (4.15) de l'électron deviennent des hamiltoniens du type (4.6) : dans le cas non-relativiste

$$(4.19) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c}\mathcal{H}M - 2\mu E - \frac{2\mu\,\varepsilon^2 Z}{R}\right]\ ;$$

dans le cas relativiste

$$(4.20) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c}\mathcal{H}M + \mu^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 ZE}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2}\right]\ .$$

L'opérateur de <u>Schrödinger</u> devient :

$$(4.21) \qquad a = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\nu^2}\Delta + \frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - 2\mu E - \frac{2\mu\,\varepsilon^2 Z}{R}\right]\ ;$$

l'opérateur de <u>Klein-Gordon</u> devient :

$$(4.22) \qquad a = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\nu^2}\Delta + \frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 ZE}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2}\right]\ .$$

La relation $(4.11)_3$ définit E en fonction de (ℓ, m, n) ; ce calcul fait apparaître les constantes classiques :

$\alpha = \dfrac{\varepsilon^2}{\hbar c} \simeq \dfrac{1}{137}$, "constante de structure fine", sans dimension,

$\beta = \dfrac{\varepsilon\hbar}{2\mu c}$, "magnéton de Bohr" , ($\beta\mathcal{H}$ a la dimension de l'énergie),

et la fonction valant :

$$(4.23) \qquad F(n,k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}}\right)^2}}\ .$$

L'énoncé du theorème 4.1 devient le suivant :

THÉORÈME 4.2 . - Soit a l'opérateur de Schrödinger (4.21) ou l'opérateur de Klein-Gordon (4.22), H étant (4.19) ou (4.20) ; soient a_{L^2} et a_M les opérateurs associés à L^2 et M . Pour certaines valeurs des constantes E , L_o , M_o le système lagrangien :

$$(4.9) \qquad a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\,U = (a_M - M_o)\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2$$

possède des solutions définies mod. $1/\nu$ sur des variétés COMPACTES ; ces valeurs de E , L_o , M_o s'expriment, en fonction des triplets d'entiers (ℓ, m, n) , tels que :

$$|m| \leqq \ell < n \quad \text{et, dans le cas Klein-Gordon,} \quad \ell + 1/2 \geqq \alpha Z \quad ;$$

ces expressions de E , L_o , M_o sont les suivantes :

$$(4.24) \qquad E = -\mu c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2} + \beta \hbar m \quad \text{dans le cas Schrödinger,}$$

$$(4.25) \qquad E^2 = \mu c^2 \,(\mu c^2 + 2\beta \hbar m)\, F^2(n, \ell + 1/2) \quad \text{dans le cas Klein-Gordon,}$$

$$(4.26) \qquad L_o = \hbar(\ell + 1/2) \quad , \quad M_o = \hbar m \quad .$$

Ces solutions de (4.9) sont définies sur les tores (4.12). Munissons ces tores de la mesure invariante (3.16) ; alors ces solutions sont les fonctions lagrangiennes, définies sur ces tores, d'amplitude lagrangienne constante.

Note 4.2 . - Les physiciens, négligeant β^2 et $\beta\alpha^2$, simplifient (4.25) comme suit :

$$\pm E \simeq \mu c^2 F(n, \ell + 1/2) + \beta \hbar m \quad ;$$

le signe - concerne l'anti-matière $(\mu < 0)$.

Note 4.3 . - Les niveaux d'énergie (4.24) et (4.25) sont ceux que donne l'étude de l'équation aux dérivées partielles

$$a\,u = 0 \quad ,$$

la fonction $u : E^3 \setminus \{0\} \to C$ et son gradient étant de carrés sommables (Chap. III , § 4).

§ 2 . L'équation lagrangienne a U = 0 mod. $1/\nu^2$;

(a associé à H ; U à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, définie sur V compacte).

0. INTRODUCTION . - Sommaire . - Le § 1 a étudié le problème (1) (Introduction du chap. III) , c'est-à-dire un système de trois équations lagrangiennes. Ce § 2 étudie la première de ces trois équations et, plus précisément, le problème (2) (Ibid.) .

Toute solution du problème (1) est solution du problème (2), vu le théorème 3 du § 1 . Dans le cas exceptionnel où l'hamiltonien H est indépendant de M (par exemple : Schrödinger et Klein - Gordon sans champ magnétique), une même rotation de E^3 opérant sur x et p transforme évidemment les solutions du problème (1) en solutions du problème (2) qui ne sont plus solutions du problème (1) . Sans se placer dans ce cas exceptionnel, le théorème 1 de ce § 2 construit des solutions du problème (2) qui ne sont pas solutions du problème (1) : une solution du problème (2) définie sur un tore T (ℓ, m, n) (§ 1, théor. 3) n'est pas, en général, unique à un facteur multiplicatif constant près.

Par contre, le théorème 2 montre que, même si H dépend de paramètres, ces tores T (ℓ, m, n) sont en général les seules variétés lagrangiennes compactes V sur lesquelles sont définies des solutions du problème (2) . Le théorème 3.1. précise même que, dans le cas Schrödinger et Klein - Gordon, les problèmes (1) et (2) définissent les mêmes niveaux d'énergie : les niveaux classiques.

Note. - Le théorème 1 de ce § 2 n'a pas de signification physique : son critère est le caractère rationnel ou non de nombres qui, dans le cas de Schrödinger et Klein - Gordon, dépendent de grandeurs physiques.

CONCLUSIONS . - Appelons "problème bien posé" un problème qui, posé pour l'équation de Schrödinger - Klein - Gordon, a les caractères essentiels du problème classique (4)

(Introduction au Chap. III) : le problème (1) (Ibid.) est bien posé, vu le § 1, théorème 4.2 ; vu la note qui précède, ce § 2 montre que le problème (2) (Ibid) n'est pas bien posé.

1. LES SOLUTIONS DE L'EQUATION $a\,U = 0 \bmod. 1/\nu^2$, À AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$, DEFINIES SUR LES TORES $V[L_o, M_o]$. - Le § 1, n° 2 a choisi H et défini les variétés :

$$W : H = 0 \quad ; \quad V[L_o, M_o] : H = L - L_o = M - M_o = 0 .$$

Toute variété lagrangienne compacte V de W est réunion de caractéristiques K de H (dont le paramètre t varie de $-\infty$ à $+\infty$) ; V est donc réunion d'adhérences compactes $\bar{K}$ de telles caractéristiques.

Propriétés d'une caractéristique K de H à adhérence compacte $\bar{K}$. -

Une telle caractéristique K, vu § 1 (2.13), appartient à un tore $V[L_o, M_o]$ et a pour équations dans ce tore :

$$(1.1) \qquad K : \Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t] = \Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t] = 0 \quad (\Phi_o, \Psi_o : \text{const})$$

Rappelons que les coordonnées de $V[L_o, M_o]$:

$$(\Psi, \Phi, t)$$

sont définies

$$(\text{mod. } 2\pi, \text{ mod. } 2\pi, \text{ mod } c_o), \text{ où } c_o = c[L_o, M_o].$$

Plus explicitement : soit R^3 de coordonnées (Ψ, Φ, t) ; soit $\mathbb{Z}^3$ le groupe additif des triplets d'entiers (ξ, η, ζ) opérant comme suit sur R^3 :

$$\mathbb{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) : (\Psi, \Phi, t) \longmapsto (\Psi + 2\pi\xi, \Phi + 2\pi\eta, t + c_o\zeta) :$$

le quotient de R^3 par ce groupe $\mathbb{Z}^3$ est $V[L_o, M_o]$; il existe une application naturelle :

$$(1.2) \qquad R^3 \to R^3/\mathbb{Z}^3 = V[L_o M_o].$$

Etant donnée une fonction

$$F : (L, M, t) \to F[L, M, t] \in R,$$

notons :

$$\Delta_t F\,[L, M, t] = F\,[L, M, t + c\,[L, M]] - F\,[L, M, t]\,;$$

évidemment :

(1.3) $$\Delta_t R = \Delta_t Q = o\ ;$$

vu, au § 1 , les définitions (2.8) de Ω et (2.9) de N :

(1.4) $$\Delta_t\,\Omega\,[L, M, t] = 2\pi N\,[L, M]\ ;$$

vu (1.3) et au § 1 la définition (2.10) de λ et μ :

$$2\pi\, d\,N\,[L, M] = \Delta_t\,\lambda\,[L, M, t]\,dL + \Delta_t\,\mu\,[L, M, t]\,dM\,,$$

c'est-à-dire :

(1.5) $$\Delta_t\,\lambda = 2\pi N_L\ ,\ \Delta_t\,\mu = 2\pi N_M\ .$$

Notons :

$$N_{L_o} = N_L\,[L_o, M_o]\,,\ N_{M_o} = N_M\,[L_o, M_o]\ .$$

Nous pouvons maintenant expliciter $\bar{K}$:

LEMME 1.1. . - 1) Supposons N_{L_o} et N_{M_o} rationnels :

(1.6) $$N_{L_o} = -\frac{L_1}{N_1}\ ,\ N_{M_o} = -\frac{M_1}{N_1}\ ,\ \text{où } (L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3,\ \text{P.G.C.D.}\,(L_1, M_1, N_1) = 1\ ;$$

(c'est-à-dire : L_1 , M_1 , N_1 sont des entiers, de plus grand commun diviseur 1). Alors $K = \bar{K}$ <u>est une courbe fermée</u> , d'équations (1.1).

Plus précisément les équations (1.1) définissent une courbe ouverte $\tilde{R}^1$ (c'est-à-dire homéomorphe à R^1) de R^3 ; vu (1.5) et (1.6) , le sous-groupe $\tilde{\mathbb{Z}}^1$ de $\mathbb{Z}^3$ engendré par (L_1, M_1, N_1) laisse $\tilde{R}^1$ invariant ; on a :

(1.7) $$K = \bar{K} = \tilde{R}^1 / \tilde{\mathbb{Z}}_1\ .$$

2°) Supposons N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>liés par une unique relation affine</u>

(1.8) $L_1 N_{L_o} + M_1 N_{M_o} = N_1$, où $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

Alors $\bar{K}$ <u>est le tore</u> T^2 , de dimension 2 , défini dans $V[L_o, M_o]$ par l'équation :

(1.9) $L_1 \{\Psi - \Psi_o + \lambda [L_o, M_o, t]\} + M_1 \{\Phi - \Phi_o + \mu [L_o, M_o, t]\} = 0$.

Plus précisément, l'équation (1.9) définit une surface $\tilde{R}^2$ de R^3 homéomorphe à R^2 ; vu (1.5) et (1.8) , le sous-groupe $\tilde{Z}^2$ de Z^3 d'équation :

(1.10) $$\tilde{Z}^2 : \; L_1 \xi + M_1 \eta + N_1 \zeta = 0$$

opère sur $\tilde{R}^2$; on a :

(1.11) $$T^2 = \tilde{R}^2 / \tilde{Z}^2 .$$

Pour expliciter des générateurs de $\tilde{Z}^2$, notons :

(1.12) $L_2 = \text{P.G.C.D}\,(M_1, N_1)$, $M_2 = \text{P.G.C.D.}\,(L_1, N_1)$, $N_2 = \text{P.G.C.D.}\,(L_1, M_1)$;

M_2 et N_2 divisent L_1 ; P.G.C.D $(M_2, N_2) = 1$ vu $(1.8)_3$; il existe donc L_3 et de même M_3 , N_3 , entiers tels que :

(1.13) $$L_1 = L_3 M_2 N_2 , \; M_1 = L_2 M_3 N_2 , \; N_1 = L_2 M_2 N_3 .$$

$\tilde{Z}^2$ est engendré par ses trois éléments :

(1.14) $$(0, M_2 N_3, -M_3 N_2), \; (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2), \; (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0),$$

que lie évidemment la relation

(1.15) $$L_3 (0, M_2 N_3, -M_3 N_2) + M_3 (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2) + N_3 (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0) = 0 .$$

3°) Supposons qu'<u>aucune relation affine à coefficients entiers ne lie</u> N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} .

Alors $\bar{K}$ <u>est le tore</u> $V[L_o, M_o]$.

<u>Preuve</u>. - La partie de $\mathbb{R}^3$ dont K est l'image naturelle dans $V[L_o, M_o]$ est définie par la condition :

$$\left(\frac{\Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t]}{2\pi}, \frac{\Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t]}{2\pi}\right) \in G$$

où G est l'image de $\mathbb{Z}^3$ dans le groupe additif $\mathbb{R}^2$ par le morphisme :

$$\mathbb{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi + N_{L_o}\zeta, \eta + N_{M_o}\zeta) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc $\bar{K}$ est l'image naturelle dans $V[L_o, M_o]$ de la partie fermée de $\mathbb{R}^3$ définie par la condition

$$(1.16) \quad \left(\frac{\Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t]}{2\pi}, \frac{\Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t]}{2\pi}\right) \in \bar{G}$$

où $\bar{G}$ est l'adhérence de G ; $\bar{G}$ <u>un sous-groupe fermé de</u> $\mathbb{R}^2$.

Trois cas se présentent :

1) G est discret ; 2) dim $\bar{G} = 1$; 3) $\bar{G} = \mathbb{R}^2$.

1) G <u>est discret</u>, c'est-à-dire : $\bar{G} = G$. La condition qu'il en soit ainsi s'énonce :

N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>sont rationnels</u>

(Cf. rapidité de convergence vers un nombre irrationnel des réduites de son développement en fraction continue). Sous l'hypothèse (1.6), qui exprime cette condition, $\bar{K} = K$ et le sous-groupe $\tilde{Z}^1$ de Z^3 qui laisse invariant la courbe $\tilde{R}^1 \subset \mathbb{R}^3$ d'équations (1.1) a pour éléments les $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{Z}^3$ tels que :

$$N_1 \xi = L_1 \zeta, \quad N_1 \eta = M_1 \zeta ;$$

vu $(1.6)_3$, N_1 divise ζ ; $\tilde{Z}^1$ est donc engendré par $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$.

2) dim $\bar{G} = 1$. - $\bar{G}$ est alors l'ensemble des $(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant une condition :

$$(1.17) \qquad L_1\theta + M_1\tau \in \mathbb{Z}, \ (L_1, M_1 \in \mathbb{R}) ;$$

vu la définition de G, la condition que $\bar{G}$ est le sous-groupe (1.17) de $\mathbb{R}^2$ s'énonce :

(1.8) est vérifié ; G n'est pas discret ;

vu 1°), elle s'énonce donc :

N_{L_o} et N_{M_o} <u>sont liés par une unique relation affine à coefficients entiers, qui est</u> (1.8) .

Sous cette hypothèse, vu la définition (1.16) de $\bar{K}$ et la définition (1.17) de $\bar{G}$, $\bar{K}$ est l'image par (1.2) de la variété $\tilde{\mathbb{R}}^2$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation (1.9) . Le sous-groupe $\tilde{\mathbb{Z}}^2$ de $\mathbb{Z}^3$ qui laisse invariant $\tilde{\mathbb{R}}^2$ est évidemment défini par (1.10), qui implique, vu $(1.8)_3$ et (1.12) :

(1.18) $\qquad L_2, M_2 , N_2$ divisent respectivement ξ , η , ζ.

Vu (1.13), $\tilde{\mathbb{Z}}_2$ contient les trois éléments (1.14). D'une part $(1.14)_1$ engendre le sous-groupe de $\tilde{\mathbb{Z}}_2$ d'équation :

$$\xi = 0 ,$$

car P.G.C.D. $(M_2 N_3 , M_3 N_2) = 1$, vu $(1.12)_1$, $(1.13)_2$ et $(1.13)_3$. Donc P.G.C.D. $(N_3 , M_3) = 1$, ce qui implique que, sur le sous-groupe de $\tilde{\mathbb{Z}}_2$ engendré par ses éléments $(1.14)_2$ et $(1.14)_3$, ξ prend toutes valeurs multiples de L_2 . Les trois éléments (1.14) de $\tilde{\mathbb{Z}}_2$ engendrent donc $\tilde{\mathbb{Z}}_2$, vu (1.18).

3°) $\bar{G} = \mathbb{R}^2$. - Vu 1°) et 2°) , la condition que $\bar{G} = \mathbb{R}^2$ s'énonce :

N_{L_o} et N_{M_o} ne sont liés par aucune relation affine à coefficients entiers.

Si $\bar{G} = \mathbb{R}^2$, alors $\bar{K}$ est l'image de $\mathbb{R}^3$ par (1.2) ; donc $\bar{K} = V[L_o , M_o]$.

<u>Mesures de</u> $V[L_o , M_o]$ <u>invariantes</u> . - Rappelons que $V[L_o , M_o]$ possède une mesure > 0, invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H (§1 , (3.2)) :

$$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi .$$

Toute mesure de $V[L_o , M_o]$ invariante par $\varkappa$ est le produit de η_V par une fonction $V[L_o , M_o] \to \mathbb{R}$ invariante par $\varkappa$, c'est-à-dire constante sur les

adhérences $\bar{K}$ des caractéristiques K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$.

Le lemme suivant est donc une conséquence évidente du lemme 1.1 :

LEMME 1.2. - 1°) Supposons que N_{L_o} et N_{M_o} sont les nombres rationnels (1.6). Alors les caractéristiques de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ sont les courbes fermées d'équations :

$$K(c_1, c_2) : \Psi + \lambda [L_o, M_o, t] = c_1 \quad \Phi + \mu [L_o, M_o, t] = c_2 ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes définies respectivement

$$\text{mod. } 2\pi \frac{M_2}{N_1} = \frac{2\pi}{L_2 N_3} , \qquad \text{mod. } 2\pi \frac{L_2}{N_1} = \frac{2\pi}{M_2 N_3} ;$$

$$L_2 = \text{P.G.C.D. } (M_1, N_1) , \quad M_2 = \text{P.G.C.D. } (L_1, N_1) .$$

Les mesures de $V[L_o, M_o]$ invariantes par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H valent :

$$(1.19) \qquad F(\Psi + \lambda [L_o, M_o, t] , \Phi + \mu [L_o, M_o, t]) \; \eta_V ,$$

$F(.,.)$ étant une fonction arbitraire de périodes respectives $2\pi \frac{M_2}{N_1}$ et $2\pi \frac{L_2}{N_1}$ en ses deux arguments.

2°) Supposons N_{L_o} et N_{M_o} liés par l'unique relation affine (1.8). Alors les adhérences $\bar{K}$ des caractéristiques K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ sont les tores d'équations :

$$(1.20) \qquad T^2(c_o) : L_1 \{ \Psi + \lambda [L_o, M_o, t] \} + M_1 \{ \Phi + \mu [L_o, M_o, t] \} = c_o ,$$

c_o étant une constante définie mod. 2π. Les mesures de $V[L_o, M_o]$ invariantes par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H valent :

$$(1.21) \qquad F[L_1 (\Psi + \lambda) + M_1 (\Phi + \lambda)] \; \eta_V ,$$

$F[.]$ étant une fonction arbitraire de période 2π.

3°) Supposons qu'aucune relation affine à coefficients entiers ne lie N_{L_o} et N_{M_o} ;

alors toute caractéristique K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ a pour adhérence $\bar{K} = V[L_o, M_o]$. Toute mesure de $V[L_o, M_o]$ invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H vaut :

$$\text{const. } \eta_V. \tag{1.22}$$

Il est aisé de conclure :

THEOREME 1 . - 1°) Les tores $V[L_o, M_o]$ sur lesquels peut être définie mod. $1/\nu$ une solution lagrangienne U, à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, de l'équation

$$a\,U = 0 \text{ mod. } 1/\nu^2 \qquad (a : \text{opérateur associé à } H)$$

sont définis par la condition (3.11), (3.12) du § 1 : il existe trois entiers :

$$\ell, m, n,$$

tels que :

$$|m| \leqq \ell < n,$$

$$L_o = \hbar\,(\ell + 1/2)\,,\ M_o = \hbar\, m\,,\ L_o + N[L_o, M_o] = \hbar\, n.$$

2°) Pour que la solution U, définie sur un tel tore, soient unique, à un facteur constant près, il faut et suffit que les dérivées de N :

$$N_L[L_o, M_o],\ N_M[L_o, M_o]$$

ne soient liées par aucune relation affine à coefficients entiers.

Preuve. - Vu le théorème 6 du chap. II, § 3 : la condition d'existence d'une telle solution sur $V[L_o, M_o]$ est la condition quantique de Maslov ; la condition de son unicité est celle de l'unicité de la mesure invariante η de $V[L_o, M_o]$ (à un facteur constant près). Le § 1, n° 3 a donné à la condition quantique de Maslov l'énoncé (3.11) - (3.12). Le lemme 1.2 donne la condition d'unicité de la mesure invariante.

2. VARIETES LAGRANGIENNES COMPACTES V, AUTRES QUE LES TORES $V[L_o, M_o]$, SUR LESQUELLES EXISTENT DES SOLUTIONS DE L'EQUATION : $a\,U = 0$ mod. $1/\nu^2$, A AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$. - Montrons que de telles variétés V n'existent qu'exceptionnellement.

Le calcul de leur indice de Maslov (lemme 2.3 et 2.4) emploiera les propriétés suivantes :

<u>Autres propriétés des caractéristiques</u> K <u>de</u> H <u>à adhérence compacte</u> . -

La différentiation de la définition (2.10) (Chap. III, §1) de λ et μ donne :

$$\frac{1}{R}\, d\,Q \wedge d\,R + d\,\lambda \wedge d\,L + d\,\mu \wedge d\,M = 0\ ,$$

où L, M, Q, R sont des fonctions de (L,M,t) vérifiant $H\,[\,L, M, Q, R\,] = 0$; donc :

$$H_L\, d\,L + H_M\, d\,M + H_Q\, d\,Q + H_R\, d\,R = 0\ ;$$

d'où, par élimination de $d\,Q$:

$$\left[\frac{H_L}{R H_Q}\, dR + d\lambda\right] \wedge d\,L + \left[\frac{H_M}{R H_Q}\, d\,R + d\,\mu\right] \wedge d\,M = 0\ ;$$

il existe donc trois fonctions numériques réelles $\rho\ ,\ \sigma\ ,\ \tau$ de $(L\ ,M\ ,t)$; définies pour $H_Q \neq 0$, telles que :

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} d\,\lambda &= -\frac{H_L}{R H_Q}\, dR + \rho\, dL + \sigma\, d\,M\ ,\\ d\,\mu &= -\frac{H_M}{R H_Q}\, d\,R + \sigma\, d\,L + \tau\, d\,M\ ; \end{aligned}$$

vu l'expression (1.5) de $\Delta_t\lambda$ et $\Delta_t\mu$, puis, au § 1, la définition (2.6) de t, ces relations impliquent :

$$(2.2)\qquad \Delta_t\rho = 2\,\pi N_{L^2}\ ,\ \Delta_t\,\sigma = 2\,\pi\, N_{LM}\ ,\ \Delta_t\,\tau = 2\,\pi N_{M^2}\ ,$$

$$(2.3)\qquad \lambda_t\,[L\ ,\ M\ ,\ t] = -\,H_L\,[\,L\ ,M\ ,Q\ ,R\,]\ ,\ \mu_t = -\,H_M\ .$$

Explicitons <u>la partie singulière</u>, pour $H_Q = 0$, de $\rho\ ,\sigma\ ,\tau$ et $\rho\,\tau - \sigma^2$: vu (2.1),

$$(2.4)\qquad \rho = \frac{R_L\, H_L}{R\ \ H_Q} + \lambda_L\ ,\ \sigma = \frac{R_M\, H_L}{R\ \ H_Q} + \lambda_M = \frac{R_L\, H_M}{R\ \ H_Q} + \mu_L\ ,\ \tau = \frac{R_M\, H_M}{R\ \ H_Q} + \mu_M\ ;$$

donc :

$$\rho\,\tau - \sigma^2 = \frac{1}{R H_Q}\left[R_L H_L \mu_M - R_M H_L \mu_L - R_L H_M \lambda_M + R_M H_M \lambda_L\right] + \lambda_L \mu_M - \lambda_M \mu_L \,.$$

Or, puisque $H\,[L\,,\,M\,,\,Q\,,\,R\,] = 0$:

$$H_R R_L + H_L + H_Q Q_L = H_R R_M + H_M + H_Q Q_M = 0 \;;$$

quand $H_R \neq 0$, ces relations permettent d'éliminer R_L et R_M des expressions précédentes de $\rho\,,\,\sigma\,,\,\tau\,,\,\rho\,\tau - \sigma^2$; vu, au § 1, l'hypothèse (2.2) :

$$H_R \neq 0 \quad \text{pour} \quad H_Q = 0 \;;$$

donc :

LEMME 2.1. - Les fonctions

$$\rho + \frac{H_L^2}{R H_Q H_R} \quad , \; \sigma + \frac{H_L H_M}{R H_Q H_R} \quad , \; \tau + \frac{H_M^2}{R H_Q H_R} \quad ,$$

(2.5)

$$\rho\,\tau - \sigma^2 + \frac{1}{R H_Q H_R}\left[\, H_L^2 \mu_M - H_L H_M (\mu_L + \lambda_M) + H_M^2 \lambda_L \,\right]$$

sont <u>bornées</u> au voisinage des points où $H_Q = 0$.

<u>Propriétés des variétés lagrangiennes compactes</u> V <u>de</u> W . - V est engendré par des caractéristiques de H , à adhérence compacte, appartenant donc à des tores $V\,[\,L_o\,,M_o\,]$; les fonctions

$$L\,,M\,,N = N\,[L\,,M\,]\,, \quad c = c\,[L\,,M\,]$$

sont donc définies sur V .

Notons V_2 la partie ouverte de V où $dL \wedge dM \neq 0$, si elle n'est pas vide. Quand $dL \wedge dM = 0$ sur V , notons V_1 la partie ouverte de V où $(dL\,,dM) \neq 0$, si elle n'est pas vide. V_1 et V_2 sont donc des variétés lagrangiennes de V , non nécessairement compactes, engendrées par des caractéristiques K de H , à

adhérences $\bar{K}$ compactes ; elles contiennent ces adhérences.

Quand V_2 et V_1 n'existent pas, V <u>est donc l'un des tores</u> $V[L_o, M_o]$. Vu le lemme suivant, ni V_1 , ni V_2 n'existe, sauf si le graphe de la fonction :

$$N : (L, M) \mapsto N[L, M]$$

<u>contient un segment rectiligne de direction rationnelle</u>.

La conséquence du théorème 2 qu'énonce l'introduction (§ 2 , n° 0) résulte donc de ce lemme .

LEMME 2.2 . - 1°) <u>Sur</u> V_2 , N <u>est fonction affine de</u> (L, M) ; plus précisément :

(2.6) $L_1\, dL + M_1\, dM + N_1\, dN = 0$, où $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

V_2 est défini dans W par la donnée d'une fonction F de deux variables et par les équations:

$$(2.7) \qquad \Psi + \lambda[L, M, t] + F_L[L, M] = \Phi + \mu[L, M, t] + F_M[L, M] = 0 .$$

Plus précisément, dans l'espace $\mathbb{R}^5$ de coordonnées (L, M, ψ, Φ, t) , ces équations (2.7) définissent une variété $\tilde{V}_2$ de dimension 3 , sur laquelle, vu (1.5) où $N_L = -L_1/N_1$, $N_M = -M_1/L_1$, le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ de $\mathbf{Z}_3$ engendré par $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$ opère comme suit :

$$(2.8) \qquad (\xi, \eta, \zeta) : (L, M, \psi, \Phi, t) \mapsto (L, M, \psi + 2\pi\xi, \Phi + 2\pi\eta, t + c[L, M]\zeta) ;$$

on a :

$$(2.9) \qquad V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_1 .$$

V_2 posséde la <u>mesure invariante</u> par le vecteur caractéristique de H :

$$\eta_V = dL \wedge dM \wedge dt.$$

2°) <u>Sur</u> V_1 , L , M et N <u>sont fonctions affines d'une même variable</u> s ; plus précisément :

(2.10) $\frac{dL}{L_1} = \frac{dM}{M_1} = \frac{dN}{N_1} = ds$ où $(L_1, M_1) \neq 0$, $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

V_1 est défini dans W par la donnée de trois fonctions de s :

L et M, affines, vérifiant (2.10), et F,

et par les équations :

(2.11)
$$L = L(s), \quad M = M(s),$$
$$L_1 \{ \psi + \lambda [L, M, t] \} + M_1 \{ \Phi + \mu [L, M, t] \} + F_s(s) = 0 .$$

Plus précisément, ces équations (2.11) définissent dans $\mathbb{R}^5$ une variété $\tilde{V}_1$ de dimension 3, sur laquelle opère suivant (2.8) le sous-groupe $\tilde{Z}_2$ de Z_3 d'équation (1.10) ; rappelons que ce sous-groupe est engendré par ses trois éléments (1.14) ; on a :

(2.12)
$$V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{Z}_2 .$$

V_1 possède la <u>mesure invariante</u> par le vecteur caractéristique de H :

$$\eta_V = (M_1 \, d\psi - L_1 \, d\Phi) \wedge ds \wedge dt .$$

3°) Les <u>phases</u> de V_1 et V_2 dans le repère R_o (chap. III, § 1, n° 1) valent:

(2.13)
$$\varphi_{R_o} = \Omega + L\,\Psi + M\,\Phi + F .$$

<u>Note 2.1</u>. - Au § 1, (2.8) et (2.10) définissent :

Ω à l'addition près d'une fonction F de (L, M) ;

λ et μ à l'addition près de ses dérivées F_L et F_M.

Etant donné V_1 ou V_2, on peut donc choisir Ω tel que dans (2.7), (2.11) et (2.13) :

$$F = 0 .$$

Pour quantifier V, nous n'emploierons que la conséquence suivante de (2.13) et des définitions, au § 1, (2.7) de $c[L, M]$, (2.9) de N : F étant choisi nulle, la fonction :

(2.14) $\varphi_{R_o} - 2\pi N \dfrac{t}{c[L,M]} - L\Psi - M\Phi$ est définie sur V_1 et sur V_2 .

Préliminaires à la preuve . - Vu la formule (2.11) du § 1, le théorème 3.1 du chap. II, § 3 s'applique avec :

$$\ell = 3 , h_1 = L , h_2 = M , g_o = \Omega + L\Psi + M\Phi , g_1 = -\Psi - \lambda , g_2 = -\Phi - \mu ,$$

la phase φ_{R_o} devant remplacer la phase lagrangienne ψ .
Toute variété lagrangienne V de W a donc localement des équations de l'un des quatre types suivants :

$(2.15)_1$ $$\Psi + \lambda + F_L[L, M] = \Phi + \mu + F_M = 0 ;$$

$(2.15)_2$ $$M = f(L) , \Psi + \lambda + f_L(L)(\Phi + \mu) + F_L(L) = 0 ;$$

$(2.15)_3$ résultant de $(2.15)_2$ par permutation de (L, Ψ), (M, Φ) ;

$(2.15)_4$ $$L = \text{const.} , M = \text{const.} ;$$

F et f sont fonctions d'une ou deux variables. La phase φ_{R_o} de V a l'expression (2.13), avec $F = 0$ dans le quatrième cas .

Preuve de 1°) . - Localement, V_2 a des équations du type $(2.15)_1$; V_2 est donc engendré par des caractéristiques K appartenant à des tores $V[L_o, M_o]$ disjoints ; leurs adhérences $\bar{K}$ sont donc disjointes et appartiennent à V_2 ; dim $V_2 = 3$; donc :

$$\dim. \bar{K} = 1 .$$

Vu le lemme 1.1, les valeurs de N_L et N_M sur V sont donc des nombres rationnels. Les fonctions N_L et N_M sont donc constantes sur V et vérifient (1.6), ce qu'exprime (2.6) . D'où 1°) et (2.13).

Preuve de 2°) . - Localement, V_1 a des équations du type $(2.15)_2$ ou $(2.15)_3$; c'est-à-dire du type :

(2.16) $$L = L(s)\,,\ M = M(s)\,,\ L_s(s)\,(\Psi + \lambda) + M_s(s)\,(\Phi + \mu) + F_s(s) = 0$$

où $(L_s, M_s) \neq 0$. Pour chaque valeur de s, notons $T(s)$ la variété de W d'équations (2.16) : dim $T(s) = 2$.

Puisque V_1 est engendré par des caractéristiques d'équations :

$$L = \text{const.}\ ,\ M = \text{const.}\ ,\ \Psi + \lambda = \text{const.}\ ,\ \Phi + \mu = \text{const.}$$

et contient leurs adhérences, V_1 contient les adhérences $\overline{T(s)}$ des $T(s)$. Déterminons-les.

Vu l'expression (1.5) de $\Delta_t \lambda$ et $\Delta_t \mu$ et vu que $L_s N_L + M_s N_M = N_s$, $T(s)$ est l'image dans W de l'ensemble des $(\Psi, \Phi, t) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$L_s \frac{\Psi + \lambda\,[L, M, t]}{2\pi} + M_s \frac{\Phi + \mu\,[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} F_s \in G(s)\ ,$$

où $G(s)$ est l'image de $\mathbb{Z}^3$ dans le groupe additif $\mathbb{R}$ par le morphisme :

$$\mathbb{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \longmapsto L_s\,\xi + M_s\,\eta + N_s\,\xi\,.$$

$\overline{T(s)}$ est donc l'image dans W de l'ensemble des $(\Psi, \Phi, t) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$L_s \frac{\Psi + \lambda\,[L, M, t]}{2\pi} + M_s \frac{\Phi + \mu\,[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} F_s \in \overline{G(s)}\ ,$$

$\overline{G(s)}$ étant l'adhérence de $G(s)$, donc un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$.

$G(s) = \mathbb{R}$ et $\overline{T(s)}$ est donc le tore, de dimension 3 , $V\,[L(s), M(s)]$, sauf si $G(s)$ est discret, c'est-à-dire s'il existe $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$\frac{L_s}{L_1} = \frac{M_s}{M_1} = \frac{N_s}{N_1}\ ,\quad \text{P.G.C.D.}\ (L_1, M_1, N_1) = 1\ .$$

Puisque dim $V_1 = 3$, il doit en être ainsi pour tout s : les fonctions M_s / L_s , N_s / L_s sont à valeurs rationnelles, donc constantes ; les entiers L_1, M_1, N_1 sont indépendants de s , qu'on peut choisir tel que (2.10) ait lieu. D'où 2°) et (2.13).

Quantification de V. - Imposons à V la condition quantique de Maslov ; pour l'exprimer, calculons l'indice de Maslov m_{R_o} de V_2 et de V_1 ; nous emploierons le lemme 1 du § 1 .

Nous ferons $F = 0$ dans le lemme 2.2 (cf. Note 2.1) .

LEMME 2.3 . - 1°) Les fonctions ρ , σ , τ sont définies sur V_2 ; notons $\bar{\mathbb{R}}$ le complété de $\mathbb{R}$ par un point à l'infini ; la fonction $F : V_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ valant

$$F(L, M, t) = \frac{\rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2}{L(L^2 - M^2)(\rho\tau - \sigma^2)} \in \bar{\mathbb{R}} \tag{2.17}$$

est donc définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$, Σ'' étant la partie de V_2 où :

$$\Sigma'' : \frac{\rho}{M^2} = - \frac{\sigma}{LM} = \frac{\tau}{L^2} . \tag{2.18}$$

2°) Si $V_2 \setminus \Sigma''$ est connexe, alors sur son revêtement universel :

$$m_{R_o} = \left[\frac{1}{\pi} \Psi + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} F(L,M,t) \right] , \quad ([\ldots] : \text{partie entière de } \ldots) . \tag{2.19}$$

3°) La fonction :

$$m_{R_o} - \frac{1}{\pi} \Psi - 2 \frac{t}{c[L, M]} \tag{2.20}$$

est définie (c'est-à-dire : uniforme) sur V_2 .

Note 2.2 . - Supposons donnée la fonction

$$N : (L, M) \mapsto N[L, M] , \text{ vérifiant } (2.6) ,$$

choisissons H vérifiant (2.9) , § 1, puis Ω vérifiant (2.8) , § 1 ; pour des choix génériques :

$$\dim \Sigma'' = 1 , \quad V_2 \setminus \Sigma'' \text{ est connexe} .$$

Preuve de 1°) . - Rappelons que (L, M, t) sont des coordonnées locales de V_2 ; vu (2.2) et (2.6)

$$\Delta_t \rho = \Delta_t \sigma = \Delta_t \tau = 0 \ ;$$

d'où 1°) .

<u>Preuve de</u> 2°) . - <u>Le contour apparent de</u> V_2 . - Les formules (1.11) et (1.13) du § 1 donnent sur W :

$$(2.21) \qquad \frac{L}{\sin \Theta} \ \omega_2 \wedge \omega_3 = L \sin \Psi \, d\Phi \wedge d\Psi + \frac{\cos \Psi}{L^2 - M^2} (M dL - L dM) \wedge (L d\Psi + M d\Phi) \ .$$

Or la différentation de (2.7) , où $F = 0$, donne sur V_2, vu la définition (2.1) de ρ , σ , τ :

$$d\Psi + \rho \, dL + \sigma \, dM = d\Phi + \sigma \, dL + \tau \, dM = 0 \qquad \text{mod. } dR \ ;$$

vu (2.6) § 1 :

$$dR = R \, H_Q \ dt \quad \text{mod. } (dL , dM) \ .$$

D'où :

$$(2.22) \qquad \frac{L}{R \sin \Theta} \, dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G \, (L , M , t , \Psi) \ dL \wedge dM \wedge dt ,$$

en notant G la fonction, qui, vu le lemme 2.1 , est régulière sur V_2 :

$$G = - H_Q \left[L (\rho \tau - \sigma^2) \sin \Psi + \frac{\rho L^2 + 2 \sigma L M + \tau M^2}{L^2 - M^2} \cos \Psi \right] .$$

Vu le lemme 1 du § 1 , le contour apparent Σ_{R_o} de V_2 est donc :

$$\Sigma_{R_o} = \Sigma' \cup \Sigma'' ,$$

Σ'' étant défini par (2.18) , Σ' étant la surface de $V_2 \setminus \Sigma''$ d'équation :

$$(2.23) \qquad \Sigma' : \quad \operatorname{tg} \Psi + F \, (L , M , t) = 0 ,$$

où F est défini par (2.17) .

<u>Calcul de</u> m_{R_o} . - Les formules (1.11) et (1.13) du § 1 donnent sur W :

$$(2.24) \qquad \frac{L}{\sin \Theta} \ \omega_3 \wedge \omega_1 = L \cos \Psi \, d\Phi \wedge d\Psi - \frac{\sin \Psi}{L^2 - M^2} \ (M dL - L dM) \wedge (L d\Psi + M d\Phi) \ ;$$

d'où, par les calculs qui déduisent (2.22) de (2.21) :

(2.25) $\frac{L}{R \sin \theta} \, dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = G_\Psi (L, M, t, \Psi) \, dL \wedge dM \wedge dt .$

Ces relations (2.22), (2.25) et le lemme 1 § 1 donnent, au voisinage d'un point de Σ':

$$m_R = \text{const.} \quad \text{pour} \quad G / G_\Psi < 0 ,$$

$$m_R = 1 + \text{const.} \quad \text{pour} \quad G / G_\Psi > 0 .$$

Ce résultat vaut évidemment pour toute fonction G s'annulant une fois sur Σ', par exemple pour la fonction :

$$G = \frac{1}{\pi} \Psi + \frac{1}{\pi} \text{ arc tg } F (L, M, t) \qquad \text{mod. } 1 ;$$

donc, sur $V_2 \setminus \Sigma''$, m_{R_o} a localement l'expression (2.19), à une constante additive près. D'où 2°).

Preuve de 3°) . - Supposons d'abord H et Ω génériques (Note 2.2), donc $V_2 \setminus \Sigma''$ connexe et

$$L H_L + M H_M \neq 0 \quad \text{pour } H_Q = 0 ,$$

ce qui implique, vu le lemme 2.1, que la fonction

$$f = \rho L^2 + 2 \sigma L M + \tau M^2 : V_2 \setminus \Sigma'' \to \bar{R}$$

est définie. Vu (2.19), la fonction

(2.26) $m_{R_o} - \frac{1}{\pi} \Psi - \frac{1}{\pi} \text{ arc tg } F$ est définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$;

vu la définition de F, où $|M| < L$ d'après l'hypothèse (2.2) du § 1, on a au voisinage des points où $F = 0$:

$$F / f < 0 ;$$

$F = 0$ équivaut à $f = 0$; donc :

(2.27) $\text{arc tg } F + \text{arc tg } f$ est définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$;

$$\Delta_t\,(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2) = 2\pi\,[L_1^2\, N_{L^2} + 2 L_1 M_1\, N_{LM} + M_1^2\, N_{M^2}] = 2\pi\,\frac{d^2N}{ds^2} = 0\,.$$

<u>Preuve de</u> 2°) . - <u>Le contour apparent de</u> V_1 . - La différentiation de (2.32) donne, vu (2.10) et la définition (2.1) de ρ, σ, τ :

$$d\Psi + (\rho L_1 + \sigma M_1)\,ds + M_1\,dr = d\Phi + (\sigma L_1 + \tau M_1)\,ds - L_1\,dr = 0 \quad \text{mod. } dR\,;$$

d'où, vu (2.21), puisque $dR = R\,H_Q\,dt$ mod. (dL, dM), c.à.d. mod. ds :

$$\text{(2.35)} \qquad \frac{L}{R\sin\Theta}\,dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G(s,t,\Psi)\,ds \wedge dr \wedge dt\,,$$

où :

$$G(s,t,\Psi) = H_Q\,[L(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2)\sin\Psi + \frac{N_o^2}{L^2 - M^2}\cos\Psi]\,;$$

vu 1°) et le lemme 2.1 , la fonction $G : V_1 \to \bar{\mathbb{R}}$ est définie et régulière sur V_1 . Vu le lemme 1 du § 1 , le contour apparent $\sum_{R_o}$ de V_1 a donc pour équation :

$$\sum_{R_o} : \quad \mathrm{tg}\,\Psi + F(r,s,t) = 0\,.$$

<u>Calcul de</u> m_{R_o} . - Le calcul déduisant (2.35) de (2.21) permet de déduire de (2.24) la formule :

$$\frac{L}{R\sin\Theta}\,dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = G_\Psi(s,t,\Psi)\,ds \wedge dr \wedge dt\,.$$

D'où, en appliquant le lemme 1 du § 1 comme le fait le lemme 2.4, l'expression (2.34) de m_{R_o} .

<u>Preuve de</u> 3°). - Supposons V_1 générique . Vu (2.34) :

$$\text{(2.36)} \qquad m_{R_o} - \frac{1}{\pi}\,\Psi - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,F(r,s,t) \quad \text{est définie sur } V_1\,;$$

vu (2.33), où $|M| < L$ d'après l'hypothèse (2.2) du § 1, et vu le lemme 2.1 , $F = 0$

or :

(2.28) $$\text{arc tg } f + \text{arc tg } \frac{1}{f} = \text{const. } ;$$

vu le lemme 2.1 , $\frac{1}{f} = 0$ équivaut à $H_Q = 0$ et, au voisinage des points où $H_Q = 0$:

$$\frac{H_Q}{H_R} f < 0 ;$$

donc :

(2.29) $$\text{arc tg } \frac{1}{f} + \text{arc tg } \frac{H_Q}{H_R} \quad \text{est définie sur} \quad V_2 \setminus \Sigma'' ;$$

or, vu l'orientation de Γ , § 1, (2.9) :

(2.30) $$\text{arc tg } \frac{H_Q}{H_R} + 2\pi \frac{t}{c[L, M]} \quad \text{est définie sur} \quad \Gamma [L, M] .$$

Les formules (2.26) ... (2.30) prouvent 3°) pour H et Ω génériques. D'où 3°).

LEMME 2.4. - 1°) Définissons sur V_1 une constante N_o et une fonction r par les relations :

(2.31) $$L_1 M - M_1 L = N_o ;$$

(2.32) $$\Psi + \lambda + M_1 r = \Phi + \mu - L_1 r = 0 .$$

Les fonctions (r, s, t) sont des coordonnées de $\tilde{V}_1$.

Une fonction $F : V_1 \to \bar{\mathbb{R}}$ est définie par la formule (quand V_1 est générique) :

(2.33) $$F(r, s, t) = \frac{N_o^2}{L(L^2-M^2)\,(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2)} .$$

2°) Si V_1 est générique ($N_o \neq 0$; $H_{L^2} L_1^2 + 2 H_{LM} L_1 M_1 + H_{M^2} M_1^2 \neq 0$ pour $H_Q = 0$), alors :

(2.34) $$m_{R_o} = [\frac{1}{\pi}\Psi + \frac{1}{\pi} \text{ arc tg } F(r, s, t)] \quad ([\ldots] : \text{partie entière de} \ldots)$$

3°) La fonction (2.20) est définie sur V_1 .

<u>Preuve de</u> 1°). - $(2.11)_2$, où $F = 0$ (Note 2.1) justifie la définition (2.32) de r . Vu (2.2) et (2.10) :

équivaut à $H_Q = 0$; au voisinage des points de V_1 où $H_Q = 0$:

$$F \frac{H_R}{H_Q} < 0 ;$$

donc :

(2.37) $$\text{arc tg } F + \text{arc tg } \frac{H_Q}{H_R} \text{ est défini.}$$

Les formules (2.30), (2.36) et (2.37) prouvent que la fonction (2.20) est définie sur V_1 générique, donc sur tout V_1.

LEMME 2.5 . - 1°) Pour que V_2 <u>vérifie la condition quantique de Maslov</u>, il faut et suffit que, sur V_2, les fonctions L, M et N soient liées par une relation :

(2.38) $$L_1 \left(L - \frac{\hbar}{2}\right) + M_1 M + N_1 \left(N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar N_o ,$$

où :

(2.39) $$L_1 , M_1 , N_1 \neq 0, N_o \in \mathbb{Z} , \quad \text{P. G. C. D. } (L_1 , M_1 , N_1) = 1 .$$

2°) Pour que V_1 <u>vérifie la condition quantique de Maslov</u>, il faut et suffit que, sur V_1, les fonctions L, M et N soient liés par les trois relations ;

(2.40) $$(L_1 , M_1 , N_1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2} , M , N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar (L_o , M_o , N_o) ,$$

où : $\wedge$ désigne le produit vectoriel dans E^3,

(2.41) $$L_1 , M_1 , N_1 , L_o , M_o , N_o \in \mathbb{Z}, \quad L_1^2 + M_1^2 \neq 0 ,$$
$$\text{P.G.C.D. } (L_1 , M_1 , N_1) = 1 , L_o L_1 + M_o M_1 + N_o N_1 = 0 ;$$

deux seulement des trois relations (2.40) sont donc indépendantes.

<u>Préliminaires à la preuve.</u> - Une variété V vérifie la condition quantique de Maslov (chap. III, § 2, définition 6.2) quand la fonction

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \varphi_R - \frac{1}{4} m_R \quad \text{est définie mod. 1 sur } V.$$

Vu (2.14) et (2.20), V_1 ou V_2 vérifie donc cette condition quand la fonction

$$(2.42) \qquad \left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) \frac{\Psi}{2\pi} + \frac{M}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} + \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{c[L, M]}$$

est définie mod. 1 sur V_1 ou V_2.

Preuve de 1°). - Vu le lemme 2.2 1°) : la fonction (2.42) est définie sur $\tilde{V}_2$; $V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_1$; $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ a pour générateur :

$$(L_1, M_1, N_1)$$

et opère sur $\tilde{V}_2$ suivant (2.8). La condition quantique de Maslov est donc :

$$\left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_1 + M M_1 + \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) N_1 \in \mathbf{Z}.$$

D'où 1°).

Preuve de 2°). - Vu le lemme 2.2 2°): la fonction (2.42) est définie sur $\tilde{V}_1$; $V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{\mathbf{Z}}_2$; $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ a pour générateurs :

$$(0, M_2 N_3, - M_3 N_2), (- L_2 N_3, 0, L_3 N_2), (L_2 M_3, - L_3 M_2, 0)$$

$L_2, \ldots N_3$ étant définis par (1.12) et (1.13) ; $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ opère sur $\tilde{V}_2$ suivant (2.8). La condition quantique de Maslov est donc :

$$\frac{M}{\hbar} M_2 N_3 - \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) M_3 N_2 \in \mathbf{Z} \; ; \; - \left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_2 N_3 + \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_3 N_2 \in \mathbf{Z} \; ;$$

$$\left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_2 M_3 - \frac{M}{\hbar} L_3 M_2 \in \mathbf{Z} \; ;$$

vu (1.13) cette condition quantique équivaut à la condition (2.40) - (2.41), complétée par la suivante : L_o, M_o, N_o sont respectivement multiples de L_2, M_2, N_2. Or :

$$L_2 = \text{P.G.C.D.}\ (M_1, N_1), \ldots ;$$

cette dernière condition résulte donc de (2.41). D'où 2°).

THEOREME 2. - Cherchons une solution U de l'équation lagrangienne

$$a\,U = 0 \mod 1/\nu^2 \quad (a : \text{opérateur associé à } H) ;$$

à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, qui soit définie mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne V compacte, autre que les tores $V[L_o, M_o]$ étudiés par le théorème 1 ; pour que U existe, il est nécessaire que le graphe de la fonction

$$N : (L, M) \longmapsto N[L, M] \quad [\text{Cf. Chap. III , § 1 , (2.9)}]$$

contienne un segment rectiligne d'équation plückérienne :

$$(2.40) \qquad (L_1, M_1, N_1) \wedge (L - \tfrac{\hbar}{2}, M, N + \tfrac{\hbar}{2}) = \hbar\,(L_o, M_o, N_o)$$

telle que :

$$L_1, M_1, N_1, L_o, M_o, N_o \in \mathbb{Z}, \; L_1^2 + M_1^2 \neq 0 ,$$

$$(2.41) \qquad \text{P.G.C.D.}(L_1, M_1, N_1) = 1, \; L_o L_1 + M_o M_1 + N_o N_1 = 0 .$$

COMPLEMENT . - La condition :

$$N_o' \in \mathbb{Z}$$

est nécessaire et suffisante pour qu'existe un tel segment dans un domaine plan , appartenant à ce graphe de N et ayant une équation :

$$(2.43) \qquad L_1' (L - \tfrac{\hbar}{2}) + M_1' M + N_1' (N + \tfrac{\hbar}{2}) = \hbar N_o'$$

telle que :

$$(2.44) \qquad L_1', M_1', N_1' \in \mathbb{Z}, \; \text{P.G.C.D.}(L_1', M_1', N_1') = 1, \; N_o' \in \mathbb{R} .$$

Note 2.3 . - Ce complément facilite l'application du théorème (cf. n° 3).

Preuve du théorème . - Vu le chapitre II , § 3 , théorème 6, V doit vérifier la condition quantique de Maslov. Puisque V n'est pas l'un des tores $V[L_o, M_o]$, V

doit contenir une variété lagrangienne V_2 ou V_1 vérifiant cette condition quantique ; vu le lemme 2.5 , le graphe de la fonction N contient donc :

soit un segment rectiligne d'équations (2.40) - (2.41) ;

soit un domaine plan d'équation (2.38) - (2.39) et donc un tel segment.

Preuve du complément . - La condition $N'_o \in \mathbb{Z}$ est évidemment suffisante. Prouvons qu'elle est nécessaire ; supposons que, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (L, M, N), le plan d'équation (2.43)-(2.44) contienne une droite d'équations (2.40)-(2.41) cette hypothèse s'exprime par les 4 relations (dont les 2 dernières résultent des précédentes):

$$L_1 L'_1 + M_1 M'_1 + N_1 N'_1 = o ,$$

$$N'_o = \frac{M'_1 N_o - N'_1 M_o}{L_1} = \frac{N'_1 L_o - L'_1 N_o}{M_1} = \frac{L'_1 M_o - M'_1 L_o}{N_1} .$$

Ces relations impliquent $N'_o \in \mathbb{Z}$, puisque $P.G.C.D. (L_1, M_1, N_1) = 1$.

3. EXEMPLE : L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON .

Nous choisissons pour a l'opérateur associé à l'hamiltonien H , défini au § 1 par (4.6) , où A sera supposé fonction affine de M , B et C constants, $B > 0$.

Ce § 1 a étudié le système :

$$a\,U = a_{L^2 - L_o^2}\,U = a_{M - M_o}\,U = 0 ,$$

et retrouvé les niveaux d'énergie classiques.

En étudiant la seule équation :

$$a\,U = 0 ,$$

nous allons retrouver les mêmes conditions d'existence, donc ces mêmes niveaux d'énergie classiques .

THEOREME 3.1 . - L'équation lagrangienne :

(3.1) $$a\,U = 0 \text{ mod. } 1/\nu^2$$

possède une solution U à AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$, définie mod. $1/\nu$ sur une variété COMPACTE V si et seulement s'il existe un triplet d'entiers (ℓ, m, n)

vérifiant la condition (4.11) du théorème 4.1 du § 1 .

Note 3 . - Sous cette condition ni l'unicité de V, ni l'unicité de U à un facteur constant près (cf. Théor. 1) ne sont assurées.

Preuve . - L'existence d'une telle solution de (3.1), sous cette condition (4.11) du § 1 , est assurée par le théorème 1 et aussi par ce théorème 4.1 du § 1 .

Vu le théorème 1, il ne peut exister de telle solution de (3.1) , définie sur un tore $V[L_o, M_o]$ que sous cette condition .

Vu le théorème 2 et la formule (4.8) du § 1 donnant la valeur de la fonction N :

$$N[L, M] = \frac{B}{\sqrt{A(M)}} - \sqrt{L^2 + C}\,, \tag{3.2}$$

l'existence d'une telle solution sur une variété V autre qu'un tore $V[L_o, M_o]$ exige ceci :

Le graphe de N contient un segment de droite .

Elle exige donc que l'un des trois cas suivant se présente :

Premier cas : $A(M) = A_o$ est indépendant de M ; $C = 0$.

Vu (3.2), le graphe de N est donc le plan d'équation :

$$L + N = \frac{B}{\sqrt{A_o}} .$$

Le théorème 2 et son complément exigent l'existence d'un entier n tel que :

$$\frac{B}{\sqrt{A_o}} = \not{h}\, n ,$$

La condition (4.11) du théorème 4.1 , § 1 est donc vérifiée , puisqu'elle est indépendante de ℓ pour $C = 0$ et de m pour $A(M)$ indépendant de M.

Second cas : $C = 0$; A dépend de M .

Vu (3.2) , le graphe de N contient les seules droites d'équation :

$$M = M_o\,,\ N + L = \frac{B}{\sqrt{A_o}}\,, \quad \text{où } M_o = \text{const.}\,,\ A_o = A(M_o)\ ;$$

leurs équations plückériennes sont donc :

$$(1\,,0\,,-1)\wedge(L-\frac{\hbar}{2}\,,M\,,N+\frac{\hbar}{2})=(M_o\,,-\frac{B}{\sqrt{A_o}}\,,M_o)\,.$$

Le théorème 2 exige l'existence d'entiers m et n tels que :

$$M_o=\hbar\, m\,,\quad \frac{B}{\sqrt{A_o}}=\hbar\, n\;;$$

$n>|m|$ car $N>0$ et $L>|M|$ par hypothèse : cf. (1.2) au § 1 . La condition (4.11) du § 1 est donc vérifiée.

<u>Troisième cas</u> : $A=A_o$ est indépendant de M ; $C\neq 0$.

Vu (3.2) , le graphe de $\mathbb{N}$ contient les seules droites d'équation :

$$L=L_o\,,\ N=\frac{B}{\sqrt{A_o}}-\sqrt{L_o^2+C}\quad \text{où } L_o \text{ est une constante, } L_o^2+C>0\,;$$

leurs équations plückériennes sont :

$$(0\,,1\,,0)\wedge(L-\frac{\hbar}{2}\,,M\,,N+\frac{\hbar}{2})=(\frac{B}{\sqrt{A_o}}-\sqrt{L_o^2+C}+\frac{\hbar}{2},0\,,\frac{\hbar}{2}-L_o)\,.$$

Le théorème 2 exige l'existence d'entiers ℓ , n tels que :

$$\frac{B}{\sqrt{A_o}}+L_o-\sqrt{L_o^2+C}=\hbar\, n\quad,\quad L_o=\hbar\,(\ell+\tfrac{1}{2})\;;$$

$$0\leqq\ell \quad\text{car}\quad 0<L_o\;;\ \ell<n\ \text{ car } N>0 \text{ par hypothèse ,}$$

La condition (4.11) du § 1 est donc vérifiée .

THEOREME 3.2 . - <u>Choisissons pour</u> a <u>l'opérateur de Klein-Gordon</u> (4.22) <u>du</u> § 1; <u>supposons le champ magnétique</u> $\mathcal{H}\neq 0$. <u>Alors les tores</u> $T(\ell\,,m\,,n)$, <u>définis par</u> (4.12) § 1 , <u>sont les seules variétés compactes sur lesquelles existe une solution lagrangienne</u>, U , <u>à amplitude lagrangienne</u> $\geqq 0$, <u>de l'équation</u> :

$$a\,U=0\quad \text{mod. } 1/\nu^2\,.$$

<u>Preuve</u> . - La preuve du théorème 3.1 prouve que la condition nécessaire qu'énonce le théorème 2 ne peut pas être satisfaite quand a est l'opérateur de Klein-Gordon $(C\neq 0)$ où A dépend de M ($\mathcal{H}\neq 0$) .

CONCLUSION . - <u>Nous ne poursuivons pas</u> cette étude malaisée de l'équation $a\,U = 0 \mod. 1/\nu^2$; en particulier nous n'explicitons pas les variétés lagrangiennes, autres que les tores $T(\ell, m, n)$, sur lesquelles existent des solutions de l'équation de Schrödinger ou des solutions, quand $\mathcal{H} = 0$, de l'équation de Klein - Gordon.

§ 3 . Le système lagrangien : $a\,U = (a_M - \text{const.})\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = 0$, quand a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon .

0. INTRODUCTION . -

Ce § 3 étudie le système lagrangien que le § 1 a résolu mod. $1/\nu^2$.

Le n° 1 cherche sous quelle condition s'applique le théorème 7.2 du chap. II , § 3

Les n° 2,3 et 4 explicitent l'application de ce théorème sous des hypothèses appropriées, de plus en plus strictes, qui constituent finalement la suivante : a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon ; le théorème d'existence 4.1 est finalement obtenu.

Note 0 . - A. Voros (cf. [23] - [24] me fait observer que ces propriétés des équations de Schrödinger et de Klein - Gordon s'étendent au cas d'un potentiel électrique, fonction à valeurs > 0 de la seule variable R , si le niveau d'énergie E n'est plus astreint à être un nombre réel et s'il lui est permis d'être un nombre formel quelconque, de phase nulle .

1. COMMUTATIVITE DES OPERATEURS a , a_{L^2} ET a_M ASSOCIES AUX HAMILTONIENS

H (§ 1, n° 2) , L^2 ET M (§ 1 , n° 1) . - Cherchons quand le théorème 7.2 du chap. II , § 3 s'applique à ces opérateurs, c'est-à-dire quand ils commutent.

LEMME 1. - 1°) a_M et a (donc, en particulier, a_M et a_{L^2}) commutent.

2°) La condition que a_{L^2} et a commutent s'énonce :

$$(1.1) \qquad (\forall L , M , Q , R) \qquad H_{M^2 Q} = H_{M^2 R} = 0 .$$

<u>Preuve</u> .- Soient a et a' les opérateurs lagrangiens associés à deux hamiltoniens H et H' ; vu la formule (1.1) du chap. II , § 2 , leur commutateur

$$a \circ a' - a' \circ a$$

est associé à la fonction formelle valant :

$$(1.2) \quad -2 \sum_{r \in N} \frac{1}{(2r+1)!} \frac{1}{(2\nu)^{2r+1}} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle \right]^{2r+1} H(x,p)\, H'(x',p') \Big|_{\substack{x'=x \\ p'=p}}$$

Supposons H et H' en involution, ce qui est le cas de H (§1 , n° 2), L^2 et M (§1, n° 1) , vu au §1 (1.3) : le premier terme de (1.2) est nul. Si H' est linéaire en (x', p') , tous les autres termes sont évidemment nuls : a et a' commutent; d'où le 1°) du lemme. Supposons que H' est un polynome homogène de degré 4 en (x', p') ; alors, vu (1.2) , $a \circ a' - a' \circ a$ est associé à $\frac{1}{\nu^3} H''$, H'' étant l'hamiltonien valant :

$$H''(x,p) = -\frac{1}{24} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle \right]^3 H(x,p)\, H'(x',p') \Big|_{\substack{x'=x \\ p'=p}}$$

Une double application de la formule de Taylor montre que le terme de $H'(x'+y, p'+q)$ homogène de degré 1 en (x', p) et 3 en (y, q) est :

$$\frac{1}{6}\left[\left\langle q, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle + \left\langle y, \frac{\partial}{\partial x'} \right\rangle \right]^3 H'(x',p') = \left[\left\langle p', \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle + \left\langle x', \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \right] H'(y,q) \; ;$$

donc, si H' est homogène de degré 2 en chacune de ses deux variables :

$$H''(x,p) = -\frac{1}{4}\left[\left\langle p, H'_{p'} \left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\rangle - \left\langle x, H'_{x'} \left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\rangle \right] H(x,p) \; .$$

En particulier, pour $H' = L^2$, c'est-à-dire : $H'(x', p') = |x' \wedge p'|^2$:

$$(1.3) \quad H''(x,p) = \frac{1}{2} \left\langle p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle H(x,p) \; ;$$

dans cette formule, les couples d'opérateurs

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j \quad , \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j \qquad \text{commutent .}$$

L'opérateur $\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j$ est une rotation infinitésimale agissant sur x et p ; elle annule donc L , Q , R ; un calcul aisé donne :

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x , p) = x_3\, p - p_3\, x ;$$

supposons H fonction composée de L , M , Q , R [§ 1 , (2.1)] ;

(1.3) devient donc :

$$H''(x , p) = \tfrac{1}{2} < \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} , H_M\, x_3\, p - H_M\, p_3\, x > ;$$

notons pour toute fonction F de (x , p) :

$$\mathcal{X} F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathcal{P} F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{p_1} & F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix} ;$$

l'expression précédente de H'' s'écrit :

$$H''(x , p) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathcal{P} H_M - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_3} \mathcal{X} H_M .$$

Or les opérateurs différentiels linéaires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ annulent évidemment P^2 , Q , R^2, donc L^2 vu (1.2) § 1 ;

$$\mathcal{X} M = - \tfrac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial x_3} \quad , \quad \mathcal{P} M = - \tfrac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial p_3} ;$$

en notant $\mathcal{D} F$ le déterminant fonctionnel

$$\mathcal{D}\, F = \frac{\partial L^2}{\partial x_3}\,\frac{\partial F}{\partial p_3} - \frac{\partial L^2}{\partial p_3}\,\frac{\partial F}{\partial x_3} \quad ,$$

l'expression de H" devient donc :

$$H''(x,p) = \tfrac{1}{4}\,\mathcal{D}\, H_{M^2} \; .$$

Or l'opérateur differentiel linéaire $\mathcal{D}$ annule évidemment L et M ;

$$\tfrac{1}{2}\,\mathcal{D}\, Q = P^2 x_3^2 - R^2 p_3^2 \quad ; \quad \frac{R}{2}\,\mathcal{D}\, R = Q\, x_3^2 - R^2 p_3 x_3$$

l'expression précédente de H" devient donc :

$$(1.4) \qquad H''(x,p) = \tfrac{1}{2}\left(P^2 H_{M^2 Q} + \frac{Q}{R} H_{M^2 R}\right) x_3^2 - \frac{R}{2} H_{M^2 R}\, p_3 x_3 - \tfrac{1}{2} R^2 H_{M^2 Q}\, p_3^2$$

Vu le n°1 du § 1, p_3/x_3 est indépendant de (L, M, Q, R) : la condition :

$$(\forall\, x, p)\; H''(x,p) = 0$$

équivaut donc à (1.1), ce qui prouve le 2°) du lemme.

2. CAS D'UN OPERATEUR a COMMUTANT À a_{L^2} ET a_M . - Supposons (1.1) vérifié : le lemme 1 prouve que le théorème 7.2 du chap. II, § 3 s'applique au système lagrangien :

$$(2.1)_r \qquad a\,U = (a_{L^2} - c_L)\,U = (a_M - c_M)\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \quad (r \geqq 1) \quad ,$$

où c_L et c_M sont deux nombres formels de phase nulle, tels que :

$$(2.2) \qquad c_L - L_o^2 = c_M - M_o = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \; .$$

Les expressions $a^+_{L^2}$ et a^+_M de a_{L^2} et a_M dans R_o sont les suivantes, vu le chap. I, § 1, n° 3 et la formule

$$e^{\frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial p} >}\, L^2(x,p) = \left[1 + \frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial p} > + \frac{1}{8\nu^2} < \frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial p} >^2\right](P^2 R^2 - Q^2)$$

$$= P^2 R^2 - Q^2 - \frac{2}{\nu} Q - \frac{3}{2\nu^2} :$$

(2.3) $$a^+_{L^2} (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{1}{\nu^2} (\Delta_o - \frac{3}{2}) ,$$

où

(2.4) $$\Delta_o = R^2 \Delta - \sum_{j,k} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - 2\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \; [\Delta = \sum_j (\frac{\partial}{\partial x_j})^2]$$

est le laplacien sphérique, vu son expression (2.24) : il opère sur les restrictions des fonctions aux sphères : R = const. ;

$$a^+_M (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{1}{\nu} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) ,$$

qui est une rotation infinitésimale.

Imposons à l'inconnue U d'être définie mod. $1/\nu^{r+1}$ sur une variété lagrangienne <u>compacte</u> V ; vu le théorème 3 du § 1

i) V est nécessairement l'un des tores

$$V = V [L_o , M_o] = T (\ell , m , n) \quad : \quad H = L^2 - L_o^2 = M - M_o = 0$$

que définit le 1°) de ce théorème

ii) l'amplitude lagrangienne β_o de U est nécessairement constante .

Si $\beta_o = 0$, $(2.1)_r$ se réduit à $(2.1)_{r-1}$; imposons donc la condition :

(2.5) $$\beta_o = \text{const.} \neq 0 .$$

Nommons <u>problème</u> $(2.1)_r$ le problème défini par le système $(2.1)_r$, la condition (2.5) et la condition que V <u>est compacte</u>.

<u>Notations</u> . - La formule (3.16) de ce même théorème 3 du § 1 explicite la mesure invariante η : les formules (1.16) et (3.6) du § 1 explicitent $d^3 x$; la formule (3.4) du chap. I , § 3 définit arg. $d^3 x = \pi m_{R_o}$; m_{R_o} est donné par (3.5) § 1 ; arg. $\eta = 0$ par définition ; d'où la valeur de la fonction χ ,

que définit et emploie le § 3 du chap. III, et de son argument :

$$\chi = \frac{\eta}{d^3x} = [R^3 H_Q [L_o , M_o , Q , R] \sin \Psi \sin \Theta]^{-1} , \quad \text{où} \quad \Theta = \text{const.} ;$$

(2.6)

$$\arg. \chi = - \arg. H_Q - \arg. \sin \Psi , \quad \text{où :} \arg. H_Q = - \pi [\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R}] , \quad \arg. \sin \Psi = \pi [\frac{\Psi}{\pi}] ;$$

rappelons que [...] est la partie entière de .... .

Le contour apparent de V est

(2.7) $$\sum_{R_o} : H_Q \sin \Psi = 0 \quad ; \quad \chi : V \setminus \sum_{R_o} \to \mathbb{R} .$$

Soit U une fonction lagrangienne sur V , à amplitude lagrangienne

$$\beta_o = \text{const.} \neq 0 ;$$

son expression dans R_o sera notée :

(2.8) $$U_{R_o}(\nu) = \sqrt{\chi}\, \beta(\nu)\, e^{\nu \varphi_{R_o}} , \quad \text{où} \quad \beta(\nu) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{\beta_s}{\nu^s} ;$$

vu, au chap. II , § 2 , le théorème de structure 2.2 et la définition 3.2 des fonctions lagrangiennes, la fonction

$$\chi^{-3s} \beta_s : V \to \mathbb{C}$$

est régulière même sur $\sum_{R_o}$.

Soient D_H , D_L , D_M les opérateurs tels que :

$$[a U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_H \beta ;$$

(2.9) $$[(a_{L^2} - L_o^2) U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_L \beta ;$$

$$[(a_M - M_o) U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_M \beta .$$

D_H, D_{L^2} et D_M <u>commutent</u>, puisque a, a_{L^2} et a_M commutent.

Employons sur $V \setminus \sum_{R_o}$ les coordonnées locales (R, Ψ, Φ).

LEMME 2.1. - 1°) Avec ce choix de coordonnées :

$$D_M = \frac{\partial}{\partial \Phi} . \tag{2.10}$$

2°) Si U est solution de l'équation

$$(a_M - c_M)\ U = 0 \quad \text{mod } 1/\nu^{r+2}, \tag{2.11}$$

où c_M est un nombre formel, de phase nulle, tel que

$$c_M = M_o \quad \text{mod. } 1/\nu^2 ,$$

alors :

$$c_M = M_o \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} ;$$

β est, mod. $1/\nu^{r+1}$, fonction des seules coordonnées (R, Ψ).

<u>Preuve de 1°)</u> . - Calculons D_M au moyen du théorème 4 du chap. II, § 3 : on substitue à H dans ce théorème l'hamiltonien $M - M_o$; vu (3.18), § 1, les caractéristiques de cet hamiltonien ont pour équations

$$dt = d\Psi = 0 , \quad \text{c'est-à-dire : } dR = d\Psi = 0 ;$$

le paramètre de ces caractéristiques est Φ, qu'on substitue à t dans ce théorème . On obtient (2.10).

<u>Preuve de 2°)</u> . - Pour $r = 0$, 2°) est évident. Une récurrence sur r permet de supposer 2°) vrai quand on y remplace r par $r-1$; alors

$$c_M = M_o + \frac{M_{r+1}}{\nu^{r+1}} \qquad (M_{r+1} \in \mathbb{C}) ;$$

(2.11), vu (2.9) et (2.10), équivaut à :

$$\frac{\partial \beta_r}{\partial \Phi} = M_{r+1}\ \beta_o , \quad \text{où } \beta_o = \text{const.} \neq 0 ;$$

or β_r est une fonction de Φ ayant la période 2π ; donc :

$$M_{r+1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial \Phi} = 0 \; ;$$

d'où 2°)

<u>Notations</u> . - Nous supposerons désormais β <u>fonction des seules variables</u> (R, Ψ) ; vu (2.10), D_H et D_L commutent à $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ et opèrent donc sur les fonctions de (R, Ψ) .

LEMME 2.2 . - 1°) En coordonnées locales (R, Ψ, Φ) :

$$D_L \beta = 2 L_o \frac{d\tau}{d\Psi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F \right] \beta - \frac{5}{4\nu} \beta \; , \tag{2.12}$$

où : τ est la variable

$$\tau = \operatorname{cotg} \Psi \; ;$$

F <u>est l'opérateur à coefficients polynomiaux</u> valant :

$$F \beta = F_1 \beta + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[F_2 \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \right] ,$$

F_1 et F_2 étant les polynomes de τ valant :

$$F_1(\tau) = \frac{5 M_o^2 \tau^2 + L_o^2 + M_o^2}{8 L_o (L_o^2 - M_o^2)} \; , \; F_2(\tau) = \frac{(M_o^2 \tau^2 + L_o^2)(\tau^2 + 1)}{2 L_o (L_o^2 - M_o^2)} \; .$$

2°) Soit U une fonction lagrangienne, définie sur le tore : $V[L_o, M_o]$, d'amplitude lagrangienne $\beta_o \neq 0$ et solution du système :

$$(a_{L^2} - c_L) U = (a_M - M_o) U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \; , \tag{2.13}$$

où c_L est un nombre formel, de phase nulle, tel que :

$$c_L = L_o^2 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \; .$$

Notons Σ l'ensemble des points de la courbe $\Gamma[L_o, M_o]$ [§1, (2.5)] où :

$$\Sigma : H_Q = 0 .$$

Alors :

(2.14) $$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} ;$$

(2.15) $$\beta(\nu, R, \Psi) = g(\nu, R)\, f(\nu, \tau) \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+1},$$

g étant une fonction formelle, arbitraire, de phase nulle, définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, f étant définie comme suit.

3°) Il existe une unique fonction formelle, définie sur R, f, valant :

(2.16) $$f(\nu, \tau) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} f_s(\tau) \qquad (\tau \in R)$$

telle que :

(2.17) $$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\nu} F f ;$$

(2.18) $f_o = 1$; f_s est un polynome réel de τ, de degré $3s$, ayant la parité de s ;

(2.19) $$f\bar{f} = 1 + \frac{1}{\nu} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau}\right) \quad [\ \bar{f} : \text{imaginaire conjugué de } f\ ];$$

[(2.19) exprime f_{2s} au moyen de $f_1, \ldots, f_{2s-1}$.]

Toute solution de (2.17) mod. $1/\nu^r$ est, mod. $1/\nu^r$, le produit de f par un nombre formel de phase nulle.

<u>Note 2</u> . - La fonction formelle U' de x, homogène de degré 0, définie pour

$$M_o R < L_o \sqrt{x_1^2 + x_2^2} ,$$

valant :

(2.20) $$U'(\nu, x) = \frac{f(\nu, \Psi)}{\sqrt{\sin \Psi}}\, e^{\nu(L_o \Psi + M_o \Phi)} ,$$

vérifie :

(2.21) $$\frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U' = M_o\, U' \; ; \; \frac{1}{\nu^2}\, \Delta\, U' = \frac{1}{R^2}\left(L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2}\right) U' .$$

Preuve de 1°) . - Calculons D_L au moyen du théorème 4 du chap. II, § 3 : on y substitue à H l'hamiltonien $L^2 - L_o^2$; vu (3.17), § 1, les caractéristiques de cet hamiltonien ont pour équations

$$dt = d\Phi = o \text{, c'est-à-dire : } dR = d\Phi = 0 \;;$$

le paramètre de ces caractéristiques est $\Psi / 2L_o$, qu'on substitue à t dans ce théorème ; au second membre de la formule (4.5) de ce théorème doit être substitué :

$$e^{\frac{1}{2}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>} L^2(x, p) = \left[1 + \tfrac{1}{2}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}> + \frac{1}{8}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>^2\right](P^2 R^2 - Q^2)$$

$$= P^2 R^2 - Q^2 - 2Q - \frac{3}{2} \;;$$

ce théorème donne :

(2.22) $$D_L\, \beta = 2L_o \frac{\partial \beta}{\partial \Psi} + \frac{1}{\nu}\left[\chi^{-1/2}\, \Delta_o\, (\beta \chi^{1/2}) - \frac{3}{2}\, \beta\right],$$

où Δ_o est défini par (2.4) en coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Vu le § 1, (1.5) et (1.12), nous avons, en employant aux premiers membres les coordonnées (R, Ψ, Φ) et aux seconds membres les coordonnées (x_1, x_2, x_3) ;

(2.23) $$R \frac{\partial}{\partial R} = \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \;; \text{ donc : } R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} = \sum_{j,k} x_j\, x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} .$$

La définition (2.4) de Δ_o s'énonce donc :

(2.24) $$\Delta_o = R^2\, \Delta - R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} - 2R \frac{\partial}{\partial R} .$$

Or les formules (1.5) et (1.12) du § 1 donnent :

$$\frac{x_3}{R} = -\sin\Theta \cos\Psi \text{, où } \cos\Theta = \frac{M_o}{L_o} \text{, vu § 1, (1.11)} \;;$$

d'où, sur V :

$$< R_x , \Psi_x > = 0 \; ; \; R^2 < \Psi_x , \Psi_x > = 1 + \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi} \; , \; R^2 \Delta \Psi = \cot g \, \Psi \left(1 - \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}\right) ;$$

d'où l'expression de $R^2 \Delta$ sur les fonctions de (R , Ψ) ; portée dans (2.24) , elle donne sur ces fonctions :

$$\Delta_o = \left(1 + \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}\right) \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} + \cot g \, \Psi \left(1 - \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}\right) \frac{\partial}{\partial \Psi} \; ; \tag{2.25}$$

d'où, vu (2.6), par un calcul banal :

$$\begin{aligned} \chi^{-\frac{1}{2}} \Delta_o (\beta \chi^{1/2}) &= \sqrt{\sin \Psi} \; \Delta_o \left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin \Psi}} \right) \\ &= - 2 L_o \frac{d\tau}{d\Psi} F \beta + \tfrac{1}{4} \beta \; ; \end{aligned} \tag{2.26}$$

de (2.22) résulte donc (2.12) .

<u>Preuve de 2°)</u> . - Vu le lemme 2.1, β est localement fonction des seules variables (R , Ψ) . Vu ce lemme et (2.12) , β_o est une fonction, non identiquement nulle, de la seule variable R.

Pour $r = o$, 2°) est évident. Une récurrence sur r permet de supposer que $\beta_o , \ldots , \beta_{r-1}$ sont des polynomes en τ, à coefficients fonctions de R et que 2°) est vrai, quand on y remplace r par $r-1$. Alors :

$$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} + \frac{2 L_o L_{r+1}}{\nu^{r+1}} \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \; (L_{r+1} \in C) \; ;$$

l'équation $(2.13)_1$ s'écrit donc :

$$\frac{1}{\nu} D_L \beta + \left(\frac{5}{4\nu^2} - \frac{2 L_o L_{r+1}}{\nu^{r+1}}\right) \beta = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \; ; \tag{2.27}$$

vu l'hypothèse de récurrence, cette équation vaut mod. $1/\nu^{r+1}$; vu (2.12), elle s'écrit donc :

$$d\beta_r = (F\beta_{r-1})\,d\tau + L_{r+1}\beta_o\,d\Psi, \quad \text{pour } R = \text{const.} ;$$

donc, puisque F est un opérateur à coefficients polynomiaux, β_r est la somme d'un polynome en $\tau = \text{cotg}\,\Psi$ et de la fonction $L_{r+1}\,\beta_o\,\Psi$, où $\beta_o \neq 0$; or β_r est une fonction de Ψ de période 2π ; donc :

$$L_{r+1} = 0 \; ; \; \beta_r \text{ est un polynome en } \tau ;$$

(2.27) s'écrit :

$$d\beta = \frac{1}{\nu}(F\beta)\,d\tau \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+1} \quad \text{pour } R = \text{const.} ;$$

d'où (2.15), si 3°) est vrai.

<u>Preuve de</u> 3°) . - La condition que (2.16) vérifie (2.17) mod $1/\nu^r$ s'écrit :

$$f_o = \text{const.} , \quad \frac{df_s}{d\tau} = F f_{s-1} \quad \text{pour } s = 1, \ldots, r-1 ;$$

f_s est donc un polynome en τ, de degré $3s$, contenant une constante d'intégration arbitraire ; f est donc bien défini, au produit près par un nombre formel, de phase nulle.

Choisissons les constantes d'intégrations réelles : les f_r sont réelles.
Il existe un choix unique des constantes d'intégration des f_{2s-1} tel que les f_r aient la parité de r .

<u>Preuve de</u> (2.19) . - Soit $\bar{f}$ l'imaginaire conjuguée de f ; puisque ν est imaginaire pure et F réel, (2.17) implique :

$$\frac{d\bar{f}}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} F\bar{f} \; ; \; \frac{d}{d\tau}(f\bar{f}) = \frac{1}{\nu}(\bar{f}Ff - fF\bar{f}) ,$$

c'est-à-dire, vu la définition de F :

$$\frac{d}{d\tau}(f\bar{f}) = \frac{1}{\nu}\left[\bar{f}\frac{d}{d\tau}\left(F_2\frac{df}{d\tau}\right) - f\frac{d}{d\tau}\left(F_2\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right)\right] = \frac{1}{\nu}\frac{d}{d\tau}\left[F_2\left(\bar{f}\frac{df}{d\tau} - f\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right)\right] ;$$

donc :

$$f\bar{f} - \frac{1}{\nu}F_2\left(\bar{f}\frac{df}{d\tau} - f\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right) = \sum_{s\in N}\frac{c_s}{\nu^{2s}} \quad (c_o = 1, c_s \in \mathbb{R}) .$$

c'est-à-dire, puisque les f_r sont réelles :

$$(\forall s \in \mathbb{N}) \sum_{s'=o}^{2s} (-1)^{s'} f_{2s-s'} f_{s'} = 2 F_2 \sum_{s'=o}^{2s-1} (-1)^{s'} f_{s'} \frac{d}{d\tau} f_{2s-1-s'} + c_s ;$$

si $s > 0$, cette formule exprime f_{2s} au moyen de $f_1 , \ldots , f_{2s-1}$ et de $c_s \in \mathbb{R}$, qu'annule un choix approprié de la constante d'intégration de f_{2s} .

<u>Preuve de</u> $(2.21)_2$. - Vu (2.12) et (2.17) :

$$D_L f = - \frac{5}{4\nu} f ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (2.9) de D_L :

$$[a^+_{L^2} (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) - L_o^2 + \frac{5}{4\nu^2}] (\sqrt{\chi} f e^{\nu \varphi_{R_o}}) = 0 ;$$

c'est-à-dire, vu l'expression (2.3) de $a^+_{L^2}$ et l'expression (2.6) de χ, puisque Δ_o opère sur les restrictions des fonctions aux sphères $R = cte$ et puisque φ_R a l'expression (3.4) du § 1, où Ω ne dépend que de R :

$$(\frac{1}{\nu^2} \Delta_o - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2}) \quad U' (\nu , x) = 0 ,$$

U' étant défini par (2.20) ; U' est homogène de degré 0 en x ; d'où $(2.21)_2$, vu la définition (2.24) de Δ_o .

<u>Preuve de</u> $(2.21)_1$. - De la définition (2.16) de f et de l'expression (2.10) de D_M résulte :

$$D_M f = 0 ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (2.8) - (2.9) de D_M :

$$(a^+_M - M_o) (\sqrt{\chi} f e^{\nu \varphi_{R_o}}) = 0 ;$$

le début du n° 2 a calculé :

$$a^+_M = \frac{1}{\nu} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) ;$$

a_M^+ annule donc les fonctions de la seule variable R ; vu l'expression (2.6) de χ et l'expression (3.4) § 1 de φ_{R_o} , la relation précédente équivaut donc à $(2.21)_1$.

LEMME 2.3 . - Il existe un opérateur D , opérant sur les fonctions formelles g définies sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$, tel que :

$$D_H [f (\nu , \Psi) g (\nu , R)] = f (\nu , \Psi) Dg(\nu , R). \tag{2.28}$$

On a localement :

$$D = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} D_s (R , \frac{d}{dR}) \tag{2.29}$$

$D_s (R , \frac{d}{dR})$ étant un opérateur différentiel défini sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$;

$$D_o = R H_Q \frac{d}{dR} . \tag{2.30}$$

<u>Preuve</u> . - Puisque D_H commute à D_L , qui a l'expression (2.12) ,

$$\frac{d\tau}{d\Psi} (\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F) D_H [f (\nu , \Psi) g (\nu , R)] =$$

$$D_H [\frac{d\tau}{d\Psi}(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F) f (\nu , \Psi) g (\nu , R)] = 0 ;$$

vu le lemme 2.2 3°), $D_H [f g]$ est donc le produit de f par une fonction formelle, qui est définie sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$ et qui est notée Dg .

Le théorème 4 du chap. II , § 3 prouve que D_H est du type :

$$D_H = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} D_{H , s} (R , \Psi , \frac{\partial}{\partial R} , \frac{\partial}{\partial \Psi}) ,$$

$D_{H , s}$ étant un opérateur différentiel ; il en résulte que D est du type (2.29) . Puisque les caractéristiques de H vérifient (2.14), § 1 , ce même théorème prouve que :

$$D_H (f g) \; dt = d (f g) \text{ mod. } 1/\nu , \text{ pour } dR = R H_Q \; dt , \; d\Psi = H_L \; dt ;$$

or :

$$f = 1 \quad \text{mod. } 1/\nu \ ;$$

donc :

$$D_H (f g) = R H_Q \frac{dg}{dR} \quad \text{mod. } 1/\nu \ ;$$

cette relation équivaut à (2.30) .

THEOREME 2 . - 1°) Le problème $(2.1)_r$, défini au début de ce n°2 , n'est possible que si :

$$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} \quad , \ c_M = M_o \ .$$

2°) CE PROBLEME $(2.1)_r$ EQUIVAUT AU PROBLEME $(2.31)_r$ dont voici l'énoncé : définir sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$, mod. $1/\nu^{r+1}$, une fonction formelle

$$g(\nu) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} g_s \quad (g_o = 1 , g_s : \Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma \to \mathbb{C})$$

satisfaisant aux conditions :

$$(2.31)_r \quad \begin{cases} Dg = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+1} \ ; \\ (H_Q)^{3r} g \ \text{ est régulière, mod. } 1/\nu^{r+1} , \text{ sur } \Gamma [L_o , M_o] . \end{cases}$$

Toute fonction formelle satisfaisant aux conditions $(2.31)_r$ est, mod. $1/\nu^{r+1}$, le produit de g par un nombre formel de phase nulle.

La condition que g est solution du problème $(2.31)_r$ équivaut évidemment à la suivante :

g est solution du problème $(2.31)_{r-1}$;

$$(2.32)_r \quad \begin{cases} R H_Q \dfrac{dg_r}{dR} + \sum_{s=1}^{r} D_s g_{r-s} = 0 \quad \text{sur } \Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma \ ; \\ (H_Q)^{3r} g_r \ \text{ est régulière sur } \Gamma [L_o , M_o] . \end{cases}$$

Ω étant défini par (2.8) , § 1 , définissons sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$ la fonction formelle

$$U''(\nu) = \frac{g e^{\nu \Omega}}{\sqrt{R^3 H_Q}} \ ;$$

alors $U'(\nu)\,U''(\nu)$ est l'expression U_{R_o} d'une solution U du problème $(2.1)_r$. Toute solution du sytème $(2.1)_r$, définie sur $V[L_o, M_o]$, est, mod. $1/\nu^{r+1}$, le produit de cette solution par un nombre formel.

3°) Supposons g solution du problème $(2.31)_{r-1}$; il existe alors une fonction $g_r : \check{\Gamma}[L_o, M_o] \setminus \check{\Sigma} \to \mathbb{C}$ vérifiant $(2.32)_r$, quand on y remplace Γ par son revêtement universel $\check{\Gamma}$; g_r est définie à une constante additive près. La condition que g_r est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ équivaut à la possibilité de résoudre les problèmes équivalents $(2.1)_r$ et $(2.31)_r$.

Preuve de 1°). - Les lemmes 2.1 2°) et 2.2 2°).

Preuve de 2°). - (2.6), (2.8), les lemmes 2.1 2°), 2.2 2°) et 2.3, les théorèmes 5 et 7.2 du chap. II, § 3.

Preuve de 3°). - Ces théorèmes .

3. UN CAS PLUS SPECIAL . - Pour préciser ce théorème 2, choisissons, comme au § 1, n° 4 :

$$H[L, M, Q, R] = \tfrac{1}{2}\left\{P^2 - \frac{1}{R^2} K[R, M]\right\} = \frac{1}{2R^2}\left\{L^2 + Q^2 - K[R, M]\right\} ; \tag{3.1}$$

choisissons K fonction affine de M : la condition (1.1) est vérifiée ; vu au § 1, (4.5), l'opérateur associé à H a pour expression dans R_o :

$$a = \frac{1}{2\nu^2}\,\Delta - \frac{1}{2R^2} K\left[R, \frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\right]. \tag{3.2}$$

$$L_o^2 + Q^2 - K[R, M_o] = 0 \quad \text{sur la courbe } \Gamma[L_o, M_o] ; \tag{3.3}$$

Σ est l'ensemble des points de cette courbe où $Q = 0$.

LEMME 3. - On a :

$$D = \frac{Q}{R}\left[\frac{d}{dR} - \frac{1}{\nu} G\right], \tag{3.4}$$

où G opère sur les fonctions

$$g : \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \to \mathbb{C}$$

et vaut :

$$Gg = G_1\, g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR}\right], \tag{3.5}$$

G_1 et G_2 étant les fonctions, définies sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, valant :

$$G_1(R, Q) = \frac{G_3(R)}{Q^5}, \quad G_2(R, Q) = -\tfrac{1}{2}\frac{R}{Q}, \tag{3.6}$$

où

$$G_3(R) = -\frac{5}{32} R (K_R)^2 + \frac{1}{8}(K - L_o^2)(K_R + R K_{R^2}).$$

<u>Preuve.</u> - L'opérateur D s'explicite comme suit, à l'aide du théorème 4 du chap. II , § 3 : dans la formule (4.5) de ce théorème $s = 2$ et

$$e^{\frac{1}{2}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\rangle} H^{(2)}(x, p) = e^{\frac{1}{2}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\rangle} \tfrac{1}{2} p^2 = \tfrac{1}{2} p^2 ; \tag{3.7}$$

les équations (2.14) § 1 des caractéristiques impliquent :

$$dR = \frac{Q}{R} dt, \quad d\Psi = \frac{L_o}{R^2} dt ; \tag{3.8}$$

ce théorème donne donc, vu la définition (2.9) de D_H, quand β dépend des seules coordonnées (R, Ψ) de V :

$$D_H \beta \, dt = d\beta + \frac{1}{2\nu} \chi^{-1/2} \Delta(\beta \chi^{1/2}) \, dt$$

pour dt, dR, $d\Psi$ vérifiant (3.8) ; c'est-à-dire :

$$D_H \beta = \frac{\partial \beta}{\partial R} \frac{Q}{R} + \frac{\partial \beta}{\partial \Psi} \frac{L_o}{R^2} + \frac{1}{2\nu} \chi^{-1/2} \Delta(\beta \chi^{1/2}). \tag{3.9}$$

Vu (2.6)

$$\chi = [Q R \sin \Psi \sin \Theta]^{-1}, \quad \Theta = \text{const.} ;$$

donc, vu la définition (2.24) de Δ_o, qui opère sur les restrictions des fonctions aux sphères $R = \text{const.}$;

$$\chi^{-1/2} \Delta(\beta \chi^{1/2}) = \frac{1}{R^2} \sqrt{\sin \Psi}\, \Delta_o\left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin \Psi}}\right) + \sqrt{Q R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{Q R}}\right)$$

remplaçons Δ_o par son expression (2.26) et portons le résultat dans (3.9) ; nous obtenons :

$$D_H \beta = \frac{Q}{R} \frac{\partial \beta}{\partial R} + \frac{\sqrt{QR}}{2\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R}\right) \left(\frac{\beta}{\sqrt{QR}}\right)$$

$$+ \frac{L_o}{R^2} \frac{d\tau}{d\Psi} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F\right) \beta + \frac{1}{8\nu} \frac{\beta}{R^2} .$$

Choisissons

$$\beta(\nu, R, \Psi) = f(\nu, \Psi) g(\nu, R) ,$$

f étant la fonction formelle de Ψ définie par le lemme 2.2, g étant une fonction formelle définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$; conformément au lemme 2.3, nous obtenons :

$$D_H (f g) = f\, D g ,$$

avec

$$D g = \frac{Q}{R}\left[\frac{dg}{dR} + \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sqrt{QR}} \left(R^2 \frac{d^2}{dR^2} + 2R \frac{d}{dR}\right)\left(\frac{g}{\sqrt{QR}}\right) + \frac{1}{8\nu} \frac{g}{QR}\right] .$$

Un calcul banal en déduit l'expression (3.4) de D , G ayant l'expression (3.5) , G_1 et G_2 valant :

$$G_1 = \frac{1}{4} \frac{d}{dR} \left[\frac{R}{Q^2} \frac{dQ}{dR}\right] + \frac{1}{8} \frac{R}{Q^3} \left(\frac{dQ}{dR}\right)^2 , \quad G_2 = - \tfrac{1}{2} \frac{R}{Q} .$$

Or, vu l'équation (3.3) de $\Gamma[L_o, M_o]$:

$$Q^2 = K[R, M_o] - L_o^2 ;$$

d'où l'expression (3.6) de G_1 .

Le lemme précédent permet d'expliciter les propriétés du problème $(2.3)_r$, auquel le théorème 2 a réduit le problème $(2.1)_r$.

<u>Définition 3</u> . - Une fonction $g : \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \to \mathbb{C}$ est dite <u>paire</u> ou <u>impaire</u> quand :

$$(\forall (\pm Q, R) \in \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma) : g(Q, R) = \pm g(-Q, R) .$$

THEOREME 3.1 . - (Complément au théorème 2). Faisons l'hypothèse (3.1).

1°) Si le problème $(2.31)_r$ possède une solution g telle que $g_o = 1$, alors il possède une solution unique telle que :

$$g_o = 1 \; ; \; g_s \text{ est réel et a la parité de } s \quad (s \leqq r) \; ;$$

$$(3.10) \qquad g\bar{g} = 1 - \frac{1}{2\nu} \frac{R}{Q} \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR}\right) \bmod 1/\nu^{r+1} .$$

Cette formule (3.10) signifie que, pour $2 \leqq 2s \leqq r$:

$$(3.11) \qquad \sum_{s'=o}^{2s} (-1)^{s'} g_{2s-s'} \, g_{s'} = - \frac{R}{Q} \sum_{s'=o}^{2s-1} (-1)^{s'} g_{s'} \frac{d}{dR} g_{2s-1-s'} \; ;$$

elle exprime donc g_{2s} au moyen de $g_1, \ldots, g_{2s-1}$.

2°) Si le problème $(2.31)_{2s-1}$ possède une solution, alors le problème $(2.31)_{2s}$ en possède une.

Note 3. - La fonction formelle U'', définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ par le théorème 2 2°), vaut évidemment :

$$(3.12) \qquad U''(\nu) = \frac{g(\nu)}{\sqrt{QR}} \, e^{\nu\Omega} \; ;$$

elle vérifie :

$$(3.13) \qquad \frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu, R) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_o] - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu, R) ,$$

où Δ est le laplacien : $\dfrac{d^2}{dR^2} + \dfrac{2}{R} \dfrac{d}{dR}$.

Preuve de 1°). - Supposons 1°) prouvé quand on substitue $r-1$ à r et supposons le problème $(2.31)_r$ possible : vu le théorème 2 2°) et le lemme 3, g_r est défini, à une constante d'intégration près, par les conditions :

$$(3.14)_r \qquad \frac{dg_r}{dR} = G\, g_{r-1} \text{ sur } \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \, , \; Q^{3r} g_r \text{ est régulière sur } \Gamma[L_o, M_o].$$

Or G change la parité ; si r est impair, un choix convenable de la constante d'intégration rend donc g_r réelle et impaire ; si $r = 2s$ est pair, g_{2s} est donc paire .

On a :

$$\frac{dg}{dR} = \frac{1}{\nu} Gg \bmod. 1/\nu^{r+1} ; Gg = G_1 g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR} \right] ;$$

un calcul analogue à la preuve de (2.19) en déduit (3.10) , à l'addition près d'un nombre formel $\sum_s c_s / \nu^{2s}$ ($c_s \in \mathbb{R}$), qu'on annule en choisissant convenablement les constantes d'intégration des g_{2s} .

<u>Preuve de</u> 2°). - Supposons $r = 2s$ pair et le problème $(2.31)_{2s-1}$ possible ; vu le théorème 2.3°), le problème $(3.14)_{2s}$ possède une solution g_{2s} quand on y remplace Γ par son revêtement universel $\check{\Gamma}$; la preuve de (3.11) reste valable ; or (3.11) prouve que g_{2s} est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$; g_{2s} est donc solution du problème $(3.14)_{2s}$.

<u>Preuve de la Note</u> 3. - Vu l'expression (3.2) de a et le théorème 2.2°) :

$$\left\{ \frac{1}{\nu^2} \Delta - \frac{1}{R^2} K \left[R, \frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial r_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial r_1}\right)\right]\right\} \left[U'(\nu, x)\, U''(\nu, x)\right] = 0 ,$$

où U' est homogène en x , de degré 0, et où U'' ne dépend que de R , ce qui implique :

$$\Delta (U'.U'') = U'.\Delta U'' + U''.\Delta U' .$$

D'où, (3.13), vu $(2.21)_2$.

<u>Notations</u> . - Soit $[R_1, R_2] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs prises par R sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$; soit ω un voisinage simplement connexe du segment réel fermé $[R_1, R_2]$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$; $R \in \mathbb{C}$.

THEOREME 3.2 . - <u>Supposons</u> K <u>holomorphe dans</u> ω ; <u>définissons par</u> (3.3) Q <u>holomorphe dans</u> $\mathbb{C} \setminus [R_1, R_2]$.

1°) <u>Si le problème</u> $(2.31)_{2s}$ <u>possède une solution</u> g , <u>alors</u>

$$(\forall r \leq 2s) \quad Q^{3r} g_r(Q, R) = (-Q)^{3r} g_r(-Q, R)$$

est une fonction de R , holomorphe dans ω .

En particulier , g_{2s} est une fonction de R , méromorphe dans ω , de pôles R_1 et R_2 .

2°) La condition que le problème $(2.31)_{2s+1}$ est possible - condition qui implique aussi la possibilité du problème $(2.31)_{2s+2}$ - est la suivante : la primitive de $(G g_{2s})\, dR$ est définie (c.à.d. uniforme) dans $\omega \setminus [R_o , R_1]$.

Preuve . - Supposons 1°) vrai ; (1°) est évident pour $s = 0$). Alors la fonction $g_{2s+1} : \check{\Gamma}[L_o , M_o] \setminus \check{\Sigma} \to C$ est évidemment la valeur prise, sur la coupure $[R_1 , R_2]$ de C, par la primitive de $(G g_{2s})\, dR$, qui est définie sur le revêtement universel de $\omega \setminus [R_1 , R_2]$. La condition que g_{2s+1} est définie sur $\Gamma[L_o , M_o] \setminus \Sigma$ équivaut évidemment à la condition que cette primitive est définie sur $\omega \setminus [R_1 , R_2]$.

S'il en est ainsi, moyennant un choix convenable de sa constante d'intégration, cette primitive g_{2s+1} est, au voisinage de R_1 et de R_2 , une fonction méromorphe impaire de Q : elle prend des valeurs opposées sur les deux bords de la coupure $[R_1 , R_2]$, comme Q .

Pour R voisin de R_1 ou de R_2 , Q est voisin de 0 , g_{2s} est une fonction paire de Q possédant en $Q = 0$ un pôle d'ordre $6s$; vu (3.3), (3.5) , (3.6) et (3.14) :

$$\frac{d\, g_{2s+1}}{dQ} = \frac{dR}{dQ}\, G g_{2s} = 2\,\frac{G_3}{K_R}\, g_{2s}\, \frac{1}{Q^4} - \frac{1}{4}\,\frac{d}{dQ}\left[\frac{R K_R}{Q^2}\,\frac{dg_{2s}}{dQ}\right] , \quad \text{où } K_R \neq 0 ;$$

g_{2s+1} est donc localement une fonction impaire de Q possédant en $Q = 0$ un pôle d'ordre $3(2s+1)$.

Par suite $Q^{3(2s+1)}\, g_{2s+1}$ est holomorphe sur ω .

(3.11) définit g_{2s+2} ; $Q^{3(2s+2)}\, g_{2s+2}$ est donc holomorphe sur ω . Par suite 1°) vaut quand on remplace s par $s+1$.

4 . LE CAS DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON . - Pour établir la possibilité ($\forall r$) du problème $(2.1)_r$, que nous avons réduit au problème $(2.31)_r$, une hypothèse appropriée est évidemment nécessaire.

Nous n'avons pas réussi à en trouver d'autre que la suivante : K <u>est un polynome du second degré</u> :

$$K[R, M] = - R^2 A(M) + 2 R B(M) - C(M) ;$$

c'est-à-dire : <u>l'expression de</u> a <u>dans</u> R_o <u>est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon</u> (§ 1 , n° 4) ; A, B <u>et</u> C <u>sont des fonctions affines de</u> M .

Alors, dans le théorème 3.2, $\omega = C$; dans la définition (3.5) de l'opérateur G , G_3 est un polynome en R de degré 3 , G_1 et G_2 sont des fonctions holomorphes dans $C \setminus [R_1 , R_2]$ et à l'infini, où G_1 s'annule 2 fois ; si g est holomorphe dans $C \setminus [R_1 , R_2]$ et à l'infini, alors la primitive de $(Gg)\,dR$ l'est aussi : tous les g_r existent donc, sont holomorphes dans $C \setminus [R_1 , R_2]$ et à l'infini. Puisque g_r est holomorphe à l'infini et que $Q^{3r} g_r$ est holomorphe sur C , $Q^{3r} g_r$ est un polynome en R de degré 3 r.
Nous avons donc prouvé les deux théorèmes suivants :

THEOREME 4.1 (<u>Existence et unicité</u>) . - <u>Supposons que</u> a <u>ait pour expression dans</u> R_o <u>l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon</u> (§ 1 , <u>Exemple</u> 4.1).

1°) <u>La condition que le système lagrangien</u>

$$a\,U = (a_{L^2} - c_L)\,U = (a_M - c_M)\,U = 0 , \tag{4.1}$$

<u>où</u> c_L <u>et</u> c_M <u>sont deux nombres formels tels que</u>

$$c_L - L_o^2 = c_M - M_o = 0 \mod 1/\nu^2, \tag{4.2}$$

<u>possède une solution définie sur une variété lagrangienne</u> COMPACTE V <u>est la suivante</u> :

i) $$c_L = L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2} , \quad c_M = M_o ;$$

ii) V <u>est l'un des tores lagrangiens</u> $V[L_o , M_o] = T(\ell , m , n)$, <u>définis par le théorème</u> 4.1 <u>du</u> § 1 .

2°) Il existe une solution lagrangienne U de (4.1), définie sur un tel tore V et possédant l'amplitude lagrangienne.

$$\beta_o = 1 .$$

Toute solution lagrangienne de (4.1), définie sur V, est le produit de U par un nombre formel de phase nulle.

Note 4.1. - La projection de V sur X est

$$V_X : R_1 \leq |x| \leq R_2 , \; M_o |x| \leq L_o \sqrt{x_1^2 + x_2^2} ,$$

où R_1 et R_2 sont les deux racines de l'équation :

$$A_o R^2 - 2 B_o R + C_o + L_o^2 = 0 \qquad (A_o, B_o, C_o : \text{valeurs de } A, B, C \text{ en } M_o).$$

THEOREME 4.2 (Structure) . - Il existe une unique solution U de (4.1), définie sur un tel tore V, et ayant la structure suivante .

Son expression U_{R_o} dans le repère R_o (§1 , n° 1) est du type :

$$U_{R_o}(\nu) = U'(\nu)\, U''(\nu) ; \tag{4.3}$$

la coordonnée locale $x \in V_X$ étant employée sur V , $U'(\nu)$ est une fonction de x , homogène de degré 0 , formelle, vérifiant :

$$\frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U'(\nu , x) = M_o\, U'(\nu , x) ; \; \frac{1}{\nu^2} \Delta U'(\nu , x) = \frac{1}{R^2}\left(L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2}\right) U'(\nu , x) \tag{4.4}$$

$U''(\nu)$ est une fonction de R , formelle, vérifiant :

$$\frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu , x) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R , M_o] - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu , x) . \tag{4.5}$$

U' et U'' sont définies par les formules :

$$U'(\nu , x) = \frac{f(\nu, \tau)}{\sqrt{\sin \Psi}}\, e^{\nu (L_o \Psi + M_o \Phi)} , \; U''(\nu , x) = \frac{g(\nu , Q , R)}{\sqrt{Q R}}\, e^{\nu \Omega} , \tag{4.6}$$

où $\tau = \operatorname{cotg} \Psi$ et où Ω est la fonction de R définie par (2.8) § 1 ;

arg. sin Ψ et arg. Q ont les sauts $+\pi$ en les points $\Psi = 0$ mod. π et $Q = 0$ de R et $\Gamma[L_o, M_o]$, orientés dans les sens $d\Psi > o$ et $Q\, dR > 0$;

$$f(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} f_r \quad \text{et} \quad g(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} g_r$$

sont les fonctions formelles de phase nulle, définies respectivement sur R et sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ par l'ensemble des propriétés suivantes :

$$(4.7) \qquad \frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\nu} F f \quad , \quad \frac{dg}{dR} = \frac{1}{\nu} G g ,$$

les opérateurs différentiels F et G valant :

$$(4.8) \qquad F f = F_1 f + \frac{d}{d\tau}\left[F_2 \frac{df}{d\tau}\right], \; G g = G_1 g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR}\right],$$

où : F_1 et F_2 sont les polynômes pairs de τ, de degrés 2 et 4, définis par le lemme 2.2 1°),

$Q^5 G_1$ et $Q G_2$ sont les polynômes de R, de degrés 3 et 1, définis par (3.6) ;

$f_o = 1$; $g_o = 1$; les fonctions f_r et g_r sont réelles et ont la parité de r ;

$$(4.9) \qquad f\bar{f} = 1 + \frac{1}{\nu} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau}\right), \; g\bar{g} = 1 + \frac{1}{\nu} G_2 \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR}\right) ;$$

ces formules (4.9) donnent explicitement les fonctions paires f_{2s} et g_{2s} au moyen de $f_1, \ldots, f_{2s-1}$ et de $g_1, \ldots, g_{2s-1}$; les fonctions impaires f_{2s+1} et g_{2s+1} sont définies par les quadratures :

$$d f_{2s+1} = (F f_{2s})\, d\tau, \; d g_{2s+1} = (G g_{2s})\, dR ;$$

f_r est un polynôme en τ de degré $3r$;

$Q^{3r} g_r$ est un polynôme en R de degré $3r$.

Note 4. - $g_{2s+1} - G_2 \dfrac{dg_{2s}}{dR}$ est donc la fonction impaire sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, primitive de la forme différentielle $G_1 g_{2s}\, dR$; cette forme est du type

$\frac{\Pi'(R)}{Q^{6s+5}}\, dR$, Π' étant un polynôme de degré $6s+3$; vu le théorème précédent cette primitive est du type $\frac{\Pi(R)}{Q^{6s+3}}$, Π étant un polynôme de degré $6s+3$.

Donnons une preuve plus directe de ce fait essentiel :

LEMME 4.2 . - $(\forall s \in \mathbb{N})$ la dérivation :

$$(4.10) \qquad \frac{d}{dR}\ \frac{\Pi(R)}{Q^{2s+1}} = \frac{\Pi'(R)}{Q^{2s+3}} \quad (Q^2 : \text{polynome en } R \text{ de degré } 2 \text{ ; discr. } Q \neq 0)$$

définit un automorphisme $\Pi \mapsto \Pi'$ de l'espace vectoriel des polynômes de degré $2s+1$.

<u>Preuve</u> . - Soit Π un polynôme de degré $2s+1$; $\Pi(R)\, Q^{-2s-1}$ est holomorphe à l'infini, où sa dérivée a donc un zéro double ; par suite (4.10) définit un polynôme Π' de degré $2s+1$; l'application

$$\Pi \mapsto \Pi'$$

est donc un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie ; or c'est évidemment un monomorphisme ; c'est donc un isomorphisme.

CONCLUSION . - <u>Ce § 3 a cherché, quand dim X = 3 , un système lagrangien, d'inconnue scalaire, possédant une solution, unique à un facteur multiplicatif près, définie sur une variété lagrangienne</u> COMPACTE. <u>Il a trouvé un seul système de ce type : celui qu'emploie la mécanique ondulatoire des particules sans spin</u>.

§ 4. L'équation aux dérivées partielles de Schrödinger - Klein - Gordon.

0. INDRODUCTION . - Nommons problème (0.1) le problème classique que voici : trouver les fonctions non nulles

$$u : E^3 \to C ,$$

de carrés sommables ainsi que leurs gradients, solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$a\ u = 0 , \tag{0.1}$$

où a est l'opérateur différentiel associé à l'hamiltonien :

$$H [L , M , Q , R] = \tfrac{1}{2} \{ P^2 - \frac{1}{R^2} K[R , M] \} , \tag{0.2}$$

K étant une fonction affine de M [cf. §3 , (3.1) et (3.2)] ;

cet opérateur est donc [cf. chap II , § 3 , déf. 6.2] :

$$a = \frac{1}{2\nu_o^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K [R , \frac{1}{\nu_o} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})] , \text{ où } \nu_o = \frac{i}{\hbar} . \tag{0.3}$$

Le n° 2 suppose [cf. §3 , n° 4] :

$$K [R , M] = - R^2 A(M) + 2 R B(M) - C(M) , \tag{0.4}$$

A , B , C étant des fonctions affines de M : alors a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon .

Ce § 4 rappelle brièvement la solution de ce problème classique (0.1) ; c'est à deux fins :

i) établir des analogies formelles entre sa solution et celle du problème lagrangien (2.1) § 3 : résoudre

$$a\,U = (a_{L^2} - c_L)\;U = (a_M - c_M)\;U = 0 \qquad \text{sur } V \text{ compact ;}$$

ii) établir que la condition d'existence de la solution de ce problème lagrangien, [qui est celle de ce problème mod $1/\nu^2$, cf. (3.1) , § 1], se trouve être la même que celle du problème classique (0.1) , dans le cas Schrödinger - Klein - Gordon , c'est-à-dire sous l'hypothèse (0.4) ; cette hypothèse est essentielle.

Note 0 . - L'équation de Schrödinger - Klein - Gordon est , pour des choix convenables de A , B , C , l'équation de Schrödinger et celle de Klein - Gordon , (4.21) et (4.22) du § 1 , où les termes en $\mathcal{H}^2$ ont été omis. L'usage est de traiter en "perturbation" les termes de ces équations linéaires en $\mathcal{H}$; nous ne le ferons pas : nous étudions rigoureusement le problème (0.1) pour établir que l'affirmation ii) est rigoureuse.

1. ETUDE DU PROBLEME (0.1) , SANS L'HYPOTHESE (0.4) . - Rappel des propriétés des des harmoniques sphériques $u'_{\ell,m}$. - L'ensemble des polynomes en $x \in E^3$, harmoniques, homogènes de degré ℓ , est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension $2\ell+1$; il a pour base les polynomes

$$R^{\ell}\, u'_{\ell,m} \quad (\ell \text{ et } m \text{ entiers, } |m| \leq \ell)$$

définis par le système , où $u'_{\ell,m}$ est homogène de degré 0 et vérifie donc

$$R^2\,\Delta\, u' = \Delta_0\, u' \quad [\text{cf. } (2.4) \text{ et } (2.24)\ \S\ 3]:$$

$$(1.1) \qquad \Delta\, u'_{\ell,m} + \frac{1}{R^2}\,\ell\,(\ell+1)\,u'_{\ell,m} = 0\ ;\ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u'_{\ell,m} = i\,m\,u'_{\ell,m}.$$

Soit S^2 la sphère unité de E^3 et σ sa mesure ;

$$\int_{S^2} \left|\frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell,m}\right|^2 \sigma = \ell\,(\ell+1) \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|^2\,\sigma\ ;$$

$\forall\ (\ell_1, m_1) \neq (\ell_2, m_2)$, $< . , . >$ étant le produit scalaire sesquilinéaire :

$$\int_{S^2} \left< \frac{\partial}{\partial x}\, u'_{\ell_1,m_1} \ ,\ \frac{\partial}{\partial x}\, u'_{\ell_2,m_2} \right> \sigma = \int_{S^2} u'_{\ell_1,m_1}\ \bar{u}'_{\ell_2,m_2}\ \sigma = 0\ .$$

Les restrictions des $u'_{\ell,m}$ à S^2 forment un système complet de fonctions sur S^2 : toute fonction $u : E^3 \to \mathbb{C}$, de carré sommable ainsi que son gradient, possède un unique développement série :

$$u = \sum_{\ell,m} u'_{\ell,m} \; u''_{\ell,m} ,$$

les $u''_{\ell,m}$ étant des fonctions de la seule variable $R > 0$, telles que :

$$\int_{E^3} |u|^2 \, d^3x = \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |u'_{\ell,m}| \, \sigma \int_0^{+\infty} R^2 \, |u''_{\ell,m}|^2 \, dR < \infty ,$$

$$\int_{E^3} |\frac{\partial}{\partial x} u|^2 d^3x = \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |\frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell,m}|^2 \sigma \cdot \int_0^{+\infty} |u''_{\ell,m}|^2 dR + \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|^2 \sigma \cdot \int_0^{+\infty} R^2 |\frac{d}{dR} u''_{\ell,m}|^2 dR < \infty .$$

<u>Résolution du problème</u> (0.1) . - La condition que la série u soit solution du problème (0.1) s'énonce, vu (0.3) et (1.1) : $(\forall \ell, m)$

$$(1.2) \quad \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR}\right) u''_{\ell,m}(R) + \frac{1}{R^2} \left\{\frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - \ell(\ell+1)\right\} u''_{\ell,m}(R) = 0 .$$

D'où, évidemment, en notant $R u''_{\ell,m} = v$:

THEOREME 1.1. - <u>Le problème</u> (0.1) <u>équivaut au problème</u> (1.3) <u>que voici</u>. <u>Trouver les entiers</u> ℓ, m <u>et les fonctions non nulles</u> $v :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ <u>tels que</u> :

$$|m| \leq \ell ,$$

$$(1.3) \qquad \frac{d^2 v}{dR^2} + \frac{1}{R^2} \left\{\frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - \ell(\ell+1)\right\} v = 0 ;$$

$$(1.4) \qquad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{R^2}\right) v^2 \, dR < \infty , \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{dv}{dR}\right)^2 dR < \infty .$$

<u>Note</u> 1.1 . - Le problème (0.1) est donc possible si et seulement si le suivant l'est. Trouver deux entiers ℓ, m et une fonction non nulle $u : E^3 \to \mathbb{C}$, de carré sommable ainsi que son gradient, tels que :

$$|m| \leq \ell ,$$

(1.5) $\quad a u = 0 , \Delta_o u + \ell (\ell + 1) u = 0 , (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) u = i m u .$

Rappelons que ce système (1.5) joue un rôle essentiel en physique .

Note 1.2 . - Les équations (1.1) , (1.2) et le système (1.5) s'obiennent formellement en remplaçant

$$\nu \quad , \quad U' \quad , \quad U'' \quad , \quad U$$

par

$$\frac{i}{\hbar} \quad , \quad u'_{\ell , m} , \quad u''_{\ell , m} \quad , \quad u$$

dans les équations (2.21), (3.13) et dans le système (2.1) du § 3 , compte-tenu du théorème 3, § 1 et du théorème 2, § 3 , qui imposent :

$$L_o = \hbar (\ell + \tfrac{1}{2}) , M_o = \hbar m , c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} , c_M = M_o ,$$

c'est-à-dire, vu (2.3) § 3 :

$$a^+_{L^2} - c_L = \frac{1}{\nu^2} \Delta_o - \hbar^2 [\ell + \tfrac{1}{2} - \frac{i}{2 \nu \hbar}] [\ell + \tfrac{1}{2} + \frac{i}{2 \nu \hbar}] ,$$

$$a^+_M - c_M = \frac{1}{\nu} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) - \hbar m .$$

Supposons K fonction holomorphe de R à l'origine . - Notons :

(1.6) $\quad C_o = - K [0 , \hbar m] , \quad \gamma = \sqrt{(\ell + \tfrac{1}{2})^2 + C_o \hbar^{-2}} ;$

le théorème de Fuchs construit deux solutions indépendantes de l'équation (1.3) ; si 2γ n'est pas entier, leurs quotients respectifs par $R^{\pm \gamma + \frac{1}{2}}$ sont holomorphes à l'origine . Si γ est imaginaire pur, toute solution non nulle de (1.3) fait donc diverger les intégrales (1.4) à l'origine . Il en est de même si $\gamma = 0$ (cf. Fuchs). Supposons $\gamma > 0$; la solution v de (1.3) qui est le produit de

$R^{\gamma+\frac{1}{2}}$ par une fonction holomorphe fait converger les intégrales (1.4) à l'origine, les autres solutions de (1.3) les font diverger (cf. Fuchs) . Donc, puisque le problème (1.3) équivaut au problème 0.1 :

THEOREME 1.2 . - Si K est holomorphe à l'origine, alors la possibilité du problème (0.1) équivaut à celle du problème suivant. Trouver deux entiers ℓ et m tels que :

$$|m| \leq \ell \, , \; \gamma > 0 \, ,$$

et que la solution v de (1.3) , dont le quotient par $R^{\gamma+1/2}$ est holomorphe, non nulle, à l'origine, vérifie :

$$(1.7) \qquad \int_1^{+\infty} v^2 \, dR < \infty \quad , \quad \int_1^{\infty} \left(\frac{dv}{dR}\right)^2 dR < \infty .$$

2. LE CAS DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON . - Dans ce cas, c'est-à-dire sous l'hypothèse (0.4), le théorème précédent peut-être explicité. Notons :

$$M_o = \hbar m \, , \; A_o = A\,(M_o) \, , \; B_o = B\,(M_o) \, , \; C_o = C\,(M_o) \, ,$$

$$(2.1) \qquad \alpha = \sqrt{A_o}\;\hbar^{-1} \, , \; \beta = B_o\,\hbar^{-2} \, .$$

L'équation (1.3) devient l'équation hypergéométrique confluante :

$$(2.2) \qquad \frac{d^2 v}{dR^2} + \left[-\alpha^2 + \frac{2\beta}{R} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{R^2} \right] v = 0 \, ,$$

où : $\alpha^2 \, , \; \beta \, , \; \gamma \in \mathbb{R} \, , \; \gamma > 0 \, ;$

si $\alpha^2 > 0$, alors nous choisissons $\alpha > 0$.

Notons v la solution non nulle de (2.2) telle que $v\,R^{-\gamma-1/2}$ soit une fonction entière de R : elle est définie à une constante multiplicative près (Fuchs).

LEMME 2 . - La convergence des intégrales (1.7) équivaut à la condition :

$$(2.3) \qquad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} - \gamma \quad \text{est entier} > 0 .$$

Preuve . - Donnons à v l'expression :

$$(2.4) \qquad v(R) = R^{\gamma+1/2} \; e^{-\alpha R} \sum_{s \in \mathbb{N}} c_s \, R^s \; ; \; (c_s \in \mathbb{C}) \; ;$$

en la portant dans (2.2) , on obtient (Fuchs) la formule de récurrence définissant les c_s en fonction de c_o :

$$(2.5) \qquad s(s+2\gamma)\, c_s = 2\left[\alpha(s+\gamma-\tfrac{1}{2})-\beta\right] c_{s-1} .$$

La condition (2.3) équivaut donc à la suivante :

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} c_s R^s \quad \text{est un polynome ;}$$

elle implique $\alpha^2 > 0$, donc $\alpha > 0$, donc la convergence des intégrales (1.7).

Prouvons que (1.7) n'a pas lieu quand (2.3) n'est pas vérifié.

<u>Cas</u> : $\alpha > 0$. - Si $\sum_s c_s R^s$ n'est pas un polynome, alors, pour un choix approprié du signe de c_o :

$c_s > 0$, pour s voisin de $+\infty$. où $c' > 0$;

Soit :

$$\epsilon \in]0, \alpha[\ ;$$

(2.5) donne :

$s\, c_s > 2\, \epsilon\, c_{s-1}$, pour s voisin de $+\infty$, où $c' > 0$;

donc :

$\sum_s c_s R^s > c'\, e^{2\epsilon R}$, pour R voisin de $+\infty$,

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc :

<u>Cas</u> : $\alpha^2 < 0$. - L'expression classique de v par une intégrale donne une expression asymptotique classique de v : pour R voisin de $+\infty$,

$$v = c\, e^{\alpha R} R^{-s/\alpha} + \bar{c}\, e^{-\alpha R} R^{s/\alpha} + \dots ,$$

où c et $\bar{c}$ sont constants, α imaginaire pure . L'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc . (Cf. Whittaker and Watson, Modern Analysis, [18], chap. XVI. The confluent hypergéometric function, Asymptotic expansion) .

Cas : $\alpha = 0$, $\beta < 0$. - Vu (2.5) :

$$v(R) = R^{\gamma + \frac{1}{2}} \sum_{s \in \mathbb{N}} c_s R^s , \quad \text{où } (\forall s) : c_s > 0 ;$$

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc .

Cas : $\alpha = 0$, $\beta > 0$. - $R^{-\gamma - \frac{1}{2}} v$ vérifie une équation différentielle à coefficients linéaires ; d'où, par la méthode de Laplace :

$$v(R) = \sqrt{R} \int_T t^{-2\gamma - 1} e^{\sqrt{2\beta R}(t - t^{-1})} dt ,$$

T étant le bord d'une demi-bande de C contenant la coupure $]-\infty, o[$; d'où, par la méthode du col, la valeur asymptotique, pour R voisin de $+\infty$:

$$v(R) \simeq R^{1/4} [c e^{2i\sqrt{2\beta R}} + \bar{c} e^{-2i\sqrt{2\beta R}}] ;$$

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc :

Le théorème 1.2 et le lemme 2 , où α et β sont définis par (2.1) et γ par (1.6), prouvent ceci :

THEOREME 2 . - Quand a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon, alors

1°) le problème classique (0.1) , dont nous venons de rappeler l'étude,

2°) le problème lagrangien (2.1) du § 3 :

$$a U = (a_{L^2} - c_L) U = (a_M - c_M) U = 0 \quad \text{sur } V \text{ compact},$$

3°) ce même problème mod. $1/v^2$, c'est-à-dire le problème (3.1) du § 1 ,

ont tous trois la même condition de possibilité : l'existence d'un triplet d'entiers (ℓ, m, n) vérifiant la condition (4.11) du théorème 4.1, § 1 .

Note 2. - La comparaison du théorème 1.2 et du théorème 3.1 1°) § 1 prouve que le théorème précédent ne s'applique pas à tout opérateur a associé à un hamiltonien H du type (0.2) .

CONCLUSION . - Bien que les problèmes aux limites classiques et les problèmes lagrangiens soient absolument indépendants, il se trouve qu'ils définissent les mêmes niveaux d'énergie des équations de Schrödinger et de Klein - Gordon.

Les niveaux d'énergie observés en physique sont ceux de l'équation de Dirac, qu'étudie le chapitre suivant .