Aldo Andreotti
Mauro Nacinovich

Théorie élémentaire de la convexité

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1977, tome 24
« Conférences de : A. Andreotti, A. Connes, D. Kastler, P. Lelong, J.E. Roberts et G. Velo. Un texte proposé par W. Laskar », , exp. n° 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1977__24__1_0>

THEORIE ELEMENTAIRE DE LA CONVEXITE

par

Aldo ANDREOTTI et Mauro NACINOVICH

1. Position du problème.

a) Etant donné un espace topologique X (à topologie dénombrable), on a le critère suivant de Weierstrass pour reconnaître si un sous ensemble fermé C de X est compact :

(W) Soit $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X. L'ensemble fermé $C \subset X$ est compact si et seulement si $\forall f \in \mathcal{C}(X)$

$$\sup_C |f| < \infty .$$

En effet si C est compact par un théorème de Weierstrass $|f(x)|$ atteint son maximum sur C. Réciproquement si C n'est pas compact, on peut extraire de C une suite $\{x_\nu\}$ divergeante dans X (i.e. sans points d'accumulation dans X) et construire une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telle que

$$\sup_\nu |f(x_\nu)| = \infty .$$

En général, étant donné X et une partie $S \subset \mathcal{C}(X)$ on peut envisager l'ensemble

$$\mathcal{C}(X,S) = \{ C \subset X \mid C \text{ fermé } \forall f \in S \ \sup_C |f| < \infty \}$$

Il est évident que $\mathcal{C}(X,S) \supset$ les compacts de X.

La théorie de la convexité s'occupe en un certain sens de la question suivante :

Quels sont les couples (X,S) tels que

$$(W(X,S)) \qquad \mathcal{C}(X,S) = \text{ensemble des compacts de } X .$$

b) Exemple : Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $S = \mathcal{H}(X)$ l'espace des fonctions holomorphes sur X . Le théorème de Cartan Thullen dit que :

" $\mathcal{C}(X,\mathcal{H}(X))$ = ensemble des compacts de X

si et seulement si X est un ouvert d'holomorphie "

En effet X ouvert d'holomorphie équivaut (par le dit théorème) à la condition suivante

(K) $\forall$ K compact de X l'ensemble

$$\hat{K} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leq \sup_{K} |f| , \}_{\forall f \in \mathcal{H}(X)}$$

est aussi compact.

et celle-ci équivaut à son tour à la condition

(D) pour toute suite divergeante $\{x_\nu\} \subset X$ il existe $f \in \mathcal{H}(X)$ telle que

$$\sup_\nu |f(x_\nu)| = \infty .$$

Le but de cet exposé est de montrer comment le théorème de Cartan Thullen s'étend à des structures de cette nature " on se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et un opérateur différentiel (matriciel)

$$A(x,D) : \mathcal{E}^P(\Omega) \to \mathcal{E}^q(\Omega)$$

à coefficient constant ou analytique réels sur $\mathbb{R}^n$. On prend par $\mathcal{H}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{E}^P(\Omega) \mid A(x,D)u = 0 \}$ et on se demande pour quels Ω le critère $W(\Omega,\mathcal{H}(\Omega))$ est valable " .

Nous ferons l'hypothèse cruciale suivante sur $A(x,D)$:

$A(x,D)$ est elliptique dans le sens que $\forall \Omega$. $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)^P$ telle que

$$A(x,D)u = 0$$

on a $u \in \mathcal{Q}(\Omega)$ = l'espace des fonctions analytiques réelles sur Ω .

Dans l'énoncé du théorème de Cartan-Thullen il y a deux notions : celle de domaine d'holomorphie et celle de convexité holomorphe donnée par la condition (K) ou (D) .

2. Enveloppes de régularité pour A.

a) Soit A comme tout à l'heure et soit $\mathcal{O}_A$ le faisceau des germes des solutions de l'équation homogène $A u = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Le faisceau $\mathcal{O}_A$ a, en particulier la propriété suivante

(Ar) $\forall\, x_o \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in \mathcal{O}_{A,x_o}$ soit $\mathcal{T}_{x_o} u$ le développement de Taylor de u en x_o . L'application ainsi définie

$$\mathcal{O}_{A,x_o} \xrightarrow{\mathcal{T}_{x_o}} \Phi_{x_o} ,$$

où Φ_{x_o} est l'espace des séries formelles (à valeurs dans $\mathbb{C}^p$) centrés en x_o , est une application injective.

En d'autres mots, l'équation $A u = 0$ n'admet pas des solutions plates en aucun point $x_o \in \mathbb{R}^n$. Cette condition est satisfaite sous des hypothèses fort plus larges que celles admises pour A . Par exemple pour un opérateur. $A = \Sigma\, a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ (opérant sur une seule fonction) à coefficients C^∞ et elliptique dans le sens usuel, la condition (Ar) a été démontrée par Aronszajn.

On topologise le faisceau $\mathcal{O}_A$ de la manière usuelle en prenant (avec Lazard) comme base d'ouverts les ensembles

$$V(\Omega,u) = \{u_y \mid u \in \mathcal{E}^p(\Omega) \text{ , } A u = 0 \text{ , } \forall\, y \in \Omega\}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une solution de $A u = 0$ sur Ω .

Le remarque précédente nous dit que, avec cette topologie le faisceau $\mathcal{O}_A$ a une topologie d'Hansdorff.

Soit $u \in \mathcal{O}_A(\Omega)$ c'est-à-dire une solution de $A u = 0$ sur un convexe Ω. Elle définit une section (désignée par la même lettre)

$$u : \Omega \longrightarrow \mathcal{O}_A$$

Soit $\tilde{\Omega}_u$ la composante connexe de $u(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_A$ et soit $\pi : \tilde{\Omega}_u \longrightarrow R^n$ la projection naturelle dans R^n.

On voit que

i) $\tilde{\Omega}_u \xrightarrow{\pi} R^n$ est un espace connexe étalé sur R^n i.e. π est un homéomorphisme local et $\tilde{\Omega}_u$ acquiert donc une structure de variété différentielle connexe et parallélisable.

ii) L'opérateur A se transporte donc de manière naturelle sur un opérateur $\pi^* A$ sur $\tilde{\Omega}_u$ et il existe une fonction

$$U : \tilde{\Omega}_u \longrightarrow C^p$$

telle que

$$(\alpha) \quad (\pi^* A)\, U = 0$$

$$(\beta) \quad U|u(\Omega) = \pi^* u \, .$$

U est donc le prolongement analytique de u sur R^n et $\tilde{\Omega}_u \xrightarrow{\pi} R^n$ son domaine de Riemann.

Une variété ~~différentiable connexe~~ $\hat{\Omega} \xrightarrow{\hat{\pi}} R^n$ étalée sur R^n et admettant une section

$$u : \Omega \longrightarrow \hat{\Omega}$$

telle que la condition ii) de tout à l'heure soit safisfaite (en remplaçant $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\pi}$ par $\hat{\Omega}$ et $\hat{\pi}$) s'appellera une <u>complétion de</u> Ω par u. On a un diagramme d'applications naturelles

$$\begin{tikzcd} \hat{\Omega} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\hat{\pi}"'] & & \tilde{\Omega}_u \arrow[dl, "\pi"] \\ & R^n & \end{tikzcd}$$

($\hat{\Omega}$ dominé par $\tilde{\Omega}_u$)

de sorte que $\widetilde{\Omega}_u$ apparaît comme la complétion maximale de Ω par u .

b) Ce qu'on a dit pour une fonction $u \in \mathcal{H}_A(\Omega) = \{v \in \mathcal{E}^P(\Omega) \mid Av = 0\}$ on peut le répéter, mutadis mutandis, pour une partie $S \subset \mathcal{H}_A(\Omega)$.

Le faisceau $\mathcal{O}_A$ est remplacé à présent par le faisceau

$\mathcal{O}_{A,S}$ des germes d'application dans $(C^P)^S$ dont les composantes u_α satisfont à l'équation $A u_\alpha = 0 \quad \alpha \in S$.

On construit alors $\forall\, \Omega$ ouvert convexe $\forall\, S \subset \mathcal{H}_A(\Omega)$ une variété <u>connexe</u> étalée sur R^n

$$\widetilde{\Omega}_S \xrightarrow{\widetilde{\pi}} R^n$$

admettant une section

$$F_S : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}_S$$

telle que

i) $\forall \; g \in S$ il existe une fonction

$$G : \widetilde{\Omega}_S \longrightarrow C^P$$

ayant les propriétés suivantes

$$(\alpha) \quad (\pi^* A)G = 0$$

$$(\beta) \quad G|_{F_S(\Omega)} = F_S^* g \ .$$

ii) elle domine toute S - complétion de Ω .

En particulier, si $S = \mathcal{H}_A(\Omega)$ on dira que $\widetilde{\Omega} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \Omega$ est (à isomorphisme près) l'enveloppe de régularité de Ω par rapport à A .

c) Un ouvert convexe Ω dans R^n s'appellera un domaine de <u>régularité</u> (pour A) si il "coïncide" avec son enveloppe i.e.

$$F_{\mathcal{H}(\Omega)} : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

est un isomorphisme.

Pour tout ouvert connexe $\Delta \subset \Omega$ envisageons les ouverts connexes $\widetilde{\Delta} \supset \Delta$ dans R^n qui sont des $\mathcal{H}_A(\Omega)|_\Delta$- complétion de Δ i.e. tels que

$$\mathrm{Im}\left(\mathcal{H}_A(\widetilde{\Delta}) \xrightarrow{r^{\widetilde{\Delta}}_{\Delta}} \mathcal{H}_A(\Delta)\right) \supset \mathcal{H}_A(\Omega)|_\Delta .$$

THEOREME. - Ω <u>est un domaine de régularité pour</u> A <u>si et seulement si</u> $\forall\, \Delta \subset \widetilde{\Delta}$ <u>comme tout à l'heure, on a</u> $\widetilde{\Delta} \subset \Omega$.

Démonstration presque évidente.

3. <u>L'exemple des opérateurs</u> - $\bar{\partial}$ <u>- suspendus</u> .

a) Soit $A_o(x,D)$ un opérateur différentiel matriciel à coefficiens analytiques sur R^n mais pas nécessairement elliptique :

$$A_o(x,D) : \mathcal{E}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^q(\Omega) \quad \forall\, \Omega \text{ ouvert de } R^n .$$

Envisageons R^n , où $x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées, dans C^n où $z_1 = x_1 + iy_1,\dots,\ z_n = x_n + iy_n$ sont les coordonnées holomorphes.

L'opérateur $A_o(x, \frac{\partial}{\partial x})$ s'étend à un voisinage U de R^n dans C^n . Pour tout $\widetilde{\Omega}$ ouvert dans U envisageons l'opérateur

$$A = A_o \oplus \bar{\partial} : \mathcal{E}^p(\widetilde{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{E}^q(\widetilde{\Omega}) \oplus (\mathcal{E}^{01}(\Omega))^p$$

on obtient de cette manière un nouvel opérateur différentiel (à coefficients constants si A_o l'est) et qui est elliptique.

On l'appellera l'opérateur $\bar{\partial}$ - <u>suspension</u> de A_o . Voici une manière de construire en partant d'opérateurs à coefficients constants beaucoup d'opérateurs elliptiques sur $C^n = R^{2n}$.

b) Soit à présent $A_o(x,D)$ un opérateur <u>elliptique</u> sur R^n à coefficients analytiques. Pour tout Ω ouvert de R^n on envisage l'espace $\mathcal{H}_{A_o}(\Omega)$ des solutions sur Ω de $A_o u = 0$. Pour tout $u \in \mathcal{H}_{A_o}(\Omega)$ et pour tout K compact contenu dans Ω on pose

$$\|u\|_K = \sup_{x \in K} |u(x)|$$

On obtient par là un ensemble de seminormes sur $\mathcal{H}_{A_o}(\Omega)$. Comme A_o est supposé elliptique, l'espace $\mathcal{H}_{A_o}(\Omega)$ avec cette topologie est complet, donc un espace de Fréchet.

Une application simple du théorème de Baire nous démontre alors le théorème suivant :

THEOREME. - Etant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on peut trouver une fonction

$$\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

semicontinue inférieurement sur Ω ayant la propriété suivante.

Pour tout point $x^o \in \Omega$ et pour toute solution $u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$ de $A_o(x,D)u = 0$ dans Ω , le développement de Taylor $\mathcal{T}_{x^o} u$ de u au point x_o est convergent dans le polycylindre de $\mathbb{C}^n$

$$|z_i - x_i^o| < \rho(x^o) .$$

COROLLAIRE 1. - Sous les mêmes hypothèses, il existe un voisinage U de Ω dans $\mathbb{C}^n$ {Ω - connexe et tel que $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ et que $A_o(\frac{\partial}{\partial z})$ y soit défini }, tel que si on désigne par $\mathcal{H}_{A_o}(U)$ l'espace des fonctions u holomorphes dans U solution de l'équation $A_o(\frac{\partial}{\partial z})u = 0$ on a un isomorphisme de restriction

$$r_\Omega^U : \mathcal{H}_{A_o}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{A_o}(\Omega) .$$

Ceci permet de ramener l'étude de l'opérateur A_o sur Ω à celui de sa $\bar{\partial}$ - suspension dans un voisinage de Ω dans $\mathbb{C}^n$.

Nous poserons

$$r(x) = \sup\{\rho(x) \text{ vérifiant le théorème avec } \rho(x) < \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \; (*)$$

c'est aussi une fonction semicontinue inférieurement.

---

* la distance calculée avec la norme $|x| = \sup|x_i|$ comme il est naturel dans ce cas.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout compact</u> $K \subset \Omega$ $\forall \lambda > 1$, <u>il existe un compact</u> $K'(\lambda) \subset \Omega$ <u>et une constante</u> $c(\lambda) > 0$ <u>tels que</u> $\forall u \in \mathcal{H}_{A_o}(\Omega)$ <u>on a</u>

$$\|D^\alpha u\|_K \leq \alpha\,!\, c(\lambda) \frac{\|u\|_{K'(\lambda)}}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}} ,$$

où $r(K) = \inf\limits_{x \in K} r(x)$.

4. <u>Théorie de la convexité</u> - <u>cas des coefficients constants</u>. Soit $A(D)$ un opérateur matriciel différentiel à coefficients constants. Soit Ω un ouvert de R^n .

Pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour toute constante $c > 1$ désignons par

$$\hat{K}_\Omega(c) = \{x \in \Omega \mid \ |u(x)| \leq c\, \|u\|_K \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_A(\Omega)\}$$

Nous dirons que Ω est A - convexe si

$(K)_\Omega$: pour K <u>compact</u>, $\forall\, c > 1$, $\hat{K}(c)$ <u>est aussi compact</u>.

THEOREME. - A <u>étant elliptique, la condition</u> $(K)_\Omega$ <u>est équivalente à la condition</u> $(D)_\Omega$ <u>pour</u> $\forall$ <u>suite</u> $\{x_\nu\}$ <u>divergente dans</u> Ω <u>il existe</u> $u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$ <u>telle que</u>

$$\sup_\nu |u(x_\nu)| = \infty .$$

<u>Preuve</u> : $(D)_\Omega \Rightarrow (K)_\Omega$. S'il n'était pas ainsi, il existerait K compact $c > 1$ tel que $\hat{K}(c)$ ne soit pas compact. Une suite $\{x_\nu\}$ divergente extraite de $\hat{K}(c)$ entraîne une contradiction.

$(K_\Omega) \Rightarrow (D)_\Omega$. S'il n'était pas ainsi, il existerait une suite divergente $\{x_\nu\}$ dans Ω telle que $\forall\, u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$ on aurait

$$\sup_\nu |u(x_\nu)| < \infty$$

Soit

$$A = \{\, u \in \mathcal{H}_A(\Omega) \mid \ \sup_\nu |u(x_\nu)| \leq 1 \,\}$$

L'ensemble A est convexe, fermé et symétrique par rapport à l'origine.

Comme

$$\mathcal{H}_A(\Omega) = \bigcup_{m=1}^{\infty} m A$$

l'un des ensembles mA, et donc A contient un point intérieur. Donc aussi un voisinage de l'origine, à savoir il existe K compact et $\varepsilon > 0$ tel que

$$V(K,\varepsilon) = \{u \in \mathcal{H}_A(\Omega) \mid \|u\|_K < 2\varepsilon\} \subset A .$$

De là, si $\|u\|_K \neq 0$ on pose

$$\frac{\varepsilon}{\|u\|_K} u \in V(K,\varepsilon) \subset A$$

donc

$$\sup|u(x_\nu)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_K$$

(Cette relation est aussi valable si $\|u\|_K = 0$) . Par conséquent $\{x_\nu\} \subset \hat{K}_\Omega(\frac{1}{\varepsilon})$ et ne peut pas être divergente.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> Ω <u>, ouvert connexe de</u> R^n , <u>est</u> A - <u>convexe</u>, <u>il est aussi un domaine de régularité pour</u> A .

La réciproque de ce corollaire serait le théorème analogue au théorème de Cartan Thullen. Malheureusement, elle est fausse.

<u>Exemple</u> sur R^n l'opérateur gradient

$$u \longrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

est elliptique et à coefficients constants. Si $K = \{x_o\}$ $\Omega = R^n$ $\forall\, c > 1$ $\hat{K}(c) = R^n$ et donc il n'est pas compact. Il y a ici un seul domaine de régularité, à savoir R^n tout entier, mais celui-i n'est pas convexe. Nous faisons donc l'hypothèse suivante :

" R^n <u>est</u> A - <u>convexe</u> " .

Cela signifie qu'il y a beaucoup de solution de $Au = 0$ sur $\mathbb{R}^n$; pour toute suite $\{x_\nu\} \subset \mathbb{R}^n$ divergente, il existe une solution de $Au = 0$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\operatorname{Sup}_\nu |u(x_\nu)| = \infty$.

Avec cette hypothèse, le corollaire précédent a sa réciproque. Ceci découle du

LEMME. - Soit A à coefficients constant elliptique et soit r la fonction définie au théorème et corollaire du n° précédent.

Soit K un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de Ω et soit $c > 1$.

Alors si on pose

$$r(K) = \inf_{x \in K} r(x)$$

$\forall \zeta \in \hat{K}(c)$ et $\forall u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$ la série de Taylor $\mathcal{T}_\zeta u$ de u au point ζ converge dans le polycylindre

$$|z_i - \zeta_i| < r(K) .$$

Preuve : On a

$$\mathcal{T}_\zeta u = \Sigma \frac{D^\alpha u(\zeta)}{\alpha!} (z-\zeta)^\alpha$$

Comme A est à coefficients constants $D^\alpha u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$ de sorte que

$$|D^\alpha u(\zeta)| \leq c \|D^\alpha\|_K \quad \text{car} \quad \zeta \in \hat{K}(\zeta)$$

Par le corollaire 2 de la section 2, on a $\forall \lambda > 1$ qu'il existe un compact $K'(\lambda)$ tel que

$$\|D^\alpha u\|_K \leq \alpha! \; c(\lambda) \frac{\|u\|_{K'(\lambda)}}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}}$$

Donc

$$\mathcal{T}_\xi \, u < \Sigma \; c \; c(\lambda) \; \|u\|_{K'(\lambda)} \frac{|z-\zeta|^\alpha}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}}$$

$$< \quad c \; c(\lambda) \; \|u\|_{K'(\lambda)} \; \Sigma \frac{|z-\zeta|^\alpha}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}}$$

et cette série est convergente pour

$$|z_i - \zeta_i| < r(K)/\lambda$$

Comme ceci est vrai pour tout $\lambda > 1$ on en tire la conclusion.

COROLLAIRE 1. - Si Ω est un domaine de régularité pour A alors pour tout compact K de Ω et tout $c > 1$ on a

$$r(K) = r(\hat{K}(c)) .$$

En effet $r(K) \geq r(\hat{K}(c))$ car $\hat{K}(c) \supset K$ mais du lemme précédent, on tire que

$$r(\hat{K}(c)) \geq r(K) .$$

COROLLAIRE 2. - (théorème de Cartan-Thullen) . Si R^n est A-convexe, alors Ω est un domaine de régularité pour A si et seulement si Ω est A-convexe.

En effet $\forall K$ compact $\forall c > 1$ $r(\hat{K}(c)) > 0$ comme $\hat{K}(c)$ est borné par l'hypothèse de convexité sur R^n on dire que $\hat{K}(c)$ est compact.

5. Le cas des coefficients analytiques. Il nous reste à dire un mot dans le cas d'un opérateur elliptique $A(x,D)$ à coefficients analytiques sur R^n . La situation est pratiquement la même, mais il faut changer les conditions $(K)_\Omega$ et $(D)_\Omega$ dans les conditions

$(K_\infty)_\Omega$ $\forall K$ compact dans Ω $\forall$ $c \geq 1$ $L \geq 1$ l'ensemble

$$\hat{K}_\infty(L,c) = \{x \in \Omega \mid |u(x)|_m \leq L\, c^m \|u\|_{K,m}, \forall u \in \mathcal{H}_A(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$$

est aussi compact. Ici, on a posé

$$|u(x)|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \right|$$

et
$$\|u\|_{K,m} = \sup_{x \in K} |u(x)|_m$$

Si A est à coefficients constants, alors

$$\hat{K}_\infty(L,c) = \hat{K}_\infty(L,1) = \hat{K}(L)$$

et la notion de convexité se réduit à la notion déjà introduite.

La condition $(D)_\Omega$ est remplacée par

$(D_\infty)_\Omega$ <u>pour toute suite divergente</u> $\{x_\nu\} \subset \Omega$ <u>et pour toute constante</u> c, $0 < c < 1$ <u>il existe un</u> $u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$ <u>tel que</u>

$$\sup_\nu \{ \sup_\alpha c^{|\alpha|} \left| \frac{D^\alpha u(x_\nu)}{\alpha!} \right| \} = \infty$$

On peut répéter avec peu de changement les considérations précédentes ; en particulier, on trouve que pour un domaine Ω de régularité pour A, on a

$$r(\hat{K}_\infty(c,L)) \geq \frac{1}{c}\, r(K)$$

de sorte que si $\mathbb{R}^n$ est A-convexe (i.e. vérifie la condition $(K_\infty)_{\mathbb{R}^n}$) on a que les domaines de régularité ne sont autres que les domaines A-convexes.