Recherche Coopérative sur Programme n° 25

Pierre Lelong

Sur la structure des courants positifs fermés

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1977, tome 24
« Conférences de : A. Andreotti, A. Connes, D. Kastler, P. Lelong, J.E. Roberts et G. Velo. Un texte proposé par W. Laskar », , exp. n° 4, p. 145-165
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1977__24__145_0>

SUR LA STRUCTURE DES COURANTS POSITIFS FERMÉS

par Pierre L E L O N G (Paris)

1. - Introduction. L'étude des courants positifs fermés prend une certaine importance depuis qu'on sait distinguer ceux dont les supports sont les ensembles analytiques complexes. Le résultat le plus précis (complétant celui obtenu d'abord par J.KING [3]) est celui démontré par Y.-T.SIU [5] dans l'article "Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents". Il énonce: sur le support (noté supp t) d'un courant positif fermé t, l'ensemble $\nu(x) \geqslant c$ est pour tout $c > 0$ un sous-ensemble analytique. L'existence d'un nombre densité fini $\nu(x)$ établie en 1957 dans [4,a] est une propriété fondamentale des courants positifs fermés ; $\nu(x)$ est appelé le nombre de Lelong du courant t au point x depuis le mémoire [7]. Les résultats de J.KING et de Y.-T.SIU apportent une nouvelle définition des ensembles analytiques complexes, qui est bien adaptée à l'emploi des méthodes de la géométrie différentielle généralisée.

Toutefois la démonstration de Y.-T.Siu se déroule en 103 pages. Nous donnons ici une démonstration nouvelle, plus courte, qui donne aussi des résultats nouveaux sur la structure des courants positifs fermés.

L'idée de départ (mais qu'on n'a remarquée qu'après coup!) peut-être présentée simplement dans le cas où t est le courant d'intégration sur un ensemble analytique complexe M de codimension p défini dans un domaine G pseudo-convexe de C^n. Il existe en effet alors n + 1 fonctions $f_j(z)$ holomorphes dans G qui définissent M comme ensemble des zéros communs :

$$M = [z \in G \; ; \; f_j(z) = 0 \; , \; 1 \leqslant j \leqslant n+1] .$$

On considère alors la fonction plurisousharmonique·

$$U = \log \sum_1^{n+1} \left| f_j(z) \right|^2 .$$

Le courant positif fermé de type (1,1) défini dans G par

$$t_1 = i\pi^{-1}\, d'd''\, U$$

a comme <u>support singulier</u> l'ensemble analytique M. Si on le compare au courant d'intégration t sur M qui est un courant positif, fermé, de type (p,p) on voit <u>que tous deux ont même support singulier</u>. Cette constatation suggère un énoncé général qu'on établira ici : étant donné un courant positif fermé de type (p,p) dans G pseudo-convexe, il existe un courant positif fermé (1,1) dans G qui en tout point x de G a même nombre de Lelong $\nu(x)$ que le premier. Ce résultat permet en particulier d'obtenir $-\nu(x)$ comme limite d'une suite croissante de fonctions plurisousharmoniques sur tout compact de G, quel que soit le type (p,p) du courant positif fermé considéré.

2. - <u>Un théorème sur les potentiels de mesures régulières</u>. Dans ce paragraphe, on considère des potentiels d'une mesure positive σ, dans l'espace réel R^q, $q \geqslant 2$, et de noyaux $g_s(a,x)$ dépendant de l'entier s, $0 \leqslant s \leqslant q-2$. On pose

$$(1) \quad \begin{cases} g_s(a,x) = \log \|a-x\| & \text{si } s = 0 \\ g_s(a,x) - c_s \|a-x\|^{-s} & \end{cases}$$

où $c_s = \omega_s^{-1}$, ω_s étant la mesure de la sphère unité de R^s et τ_s son volume. On a $\omega_s = 2\pi^{s/2}\left[\Gamma(s/2)\right]^{-1}$.

Les noyaux g_s sont, pour a fixé, des <u>fonctions R^q-sousharmoniques de</u> $x \in R^q$. Le laplacien Δg_s vaut $s(q-2-s)c_s \|a-x\|^{-s-2}$ et est une fonction positive, localement sommable dans R^q pour $0 \leqslant s < q-2$.

Si $s = q-2$, Δg_s se réduit au contraire à une mesure de valeur 2π de support le point a. On désigne par $\lambda(f,x,r)$ la moyenne sphérique d'une fonction f sur la sphère $S(x,r)$ de centre x, de rayon r. On a

LEMME 1. - *Les noyaux* $g_s(a,x)$ *vérifient :*

$$c_s \sup\left[-r^{-s}, \ -\|a\|^{-s}\right] \leqslant \lambda_x(g_s,0,r) < 0 .$$

Si $\|a\| \geqslant r$, c'est une conséquence de la propriété de la moyenne des fonctions R^q-sousharmoniques. Si $\|a\| \leqslant r$, on utilise la symétrie de g_s par rapport à $\|a\|$ et à $\|x\| = r$.

THÉORÈME 1. - *Soit* σ *une mesure positive finie dans un domaine* $G \subset R^q$ $(q \geqslant 2)$. *On note* $\sigma(x,r)$ *la mesure* σ *portée par la boule compacte* $B(x,r)$ *de centre* x, *de rayon* r.

On suppose qu'il existe un entier s, $0 \leqslant s \leqslant q-2$ *tel que pour tout point* x *d'un domaine compact* $G_1 \subset\subset G$, *le quotient*

$$\nu(x,r) = (\tau_s r^s)^{-1} \sigma(x,r)$$

soit fonction croissante de r *pour* $0 \leqslant r \leqslant \rho(x)$. *Alors le potentiel*

$$(2) \qquad U(x) = \sigma_a * g_s(a,x) = \int d\sigma(a)\, g_s(a,x)$$

est une fonction R^q-*sousharmonique de* x *et, en tout point* $x \in G_1$

$$(3) \qquad \lim_{r=o} (\log r)^{-1} \lambda(U,x,r).$$

existe et vaut la limite

$$(4) \qquad \nu(x) = \lim_{r=o} \nu(x,r) .$$

Démonstration. On suppose $x = 0 \in G_1$, on pose $\sigma(0,r) = \sigma(r)$, $\nu(0,r) = \nu(r)$; on choisit $R > 0$ tel que l'on ait $\nu(0) < \nu(r) \leqslant \nu(0) + \varepsilon$ pour $0 \leqslant r \leqslant R$.

Parmi les masses a, on distingue cellles qui vérifient $|a| > R$; elles donnent un potentiel $U_e(x)$, qui est continu pour $\|x\| < \frac{R}{2}$; elles n'interviennent pas dans le calcul de la limite (3). Il suffit de considérer le potentiel U_1 des masses a vérifiant $kr < |a| < R$ et celui, U_2, des masses a vérifiant $|a| < kr$ et de calculer (3) en remplaçant U par $U_1 + U_2$. Dans ce partage on choisira k assez grand et de toute manière $k \geqslant 2$; on ne considérera alors que les valeurs r, assez petites pour vérifier $kr < R$.

Pour $\|x\| = r$, $\|a\| \geqslant kr$, $\|a-x\|^{-s}$ diffère peu de $\|a\|^{-s}$. Plus précisément pour $k \geqslant 2$, il existe $C_1 > 0$ tel qu'on ait

$\left| \|a-x\|^{-s} - \|a\|^{-s} \right| \leqslant C_1 \; k^{-1}$ où l'on a posé $C_1 = \sup |u|^{-1} \left| (1-u)^{-s} - 1 \right|$ pour $|u| \leqslant \frac{1}{2}$.

Alors $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit $k \geqslant k_o \geqslant 2$, tel que l'on ait $C_1 k^{-1} < \varepsilon$. On a alors, θ', θ'' ... désignant des nombres de module inférieur à 1 :

$$\lambda(U_1, 0, r) = - c_s (1 + \theta \varepsilon) \int_{kr}^{R} t^{-s} \, d\sigma(t)$$

$$= -(1+\theta \varepsilon) \left[s \tau_s c_s \int_{kr}^{R} t^{-1} \nu(t) dt + sc_s \theta' \varepsilon \right].$$

Mais $c_s = \omega_s^{-1}$ entraîne $s \tau_s c_s = 1$. D'où :

$$\lambda(U_1, 0, r) = -(1 + \theta \varepsilon) \; (\log R - \log kr) \left[\nu(o) + \theta'' \varepsilon \right] + sc_s \theta' \varepsilon .$$

D'autre part d'après le lemme 1, on a pour le potentiel des masses a, vérifiant $|a| \leqslant kr$:

(5) $$\lambda(U_2, 0, r) \geqslant -c_p \tau_p \left[\nu(o) + \varepsilon \right] \left[1 + s \log k \right].$$

Finalement on a, k étant fixé ainsi qu'il a été dit et pour $r < Rk^{-1}$:

$$\frac{\lambda(U, 0, r)}{\log r} = (1 + \theta \varepsilon) \left[\nu(o) + \theta'' \varepsilon \right] + (\log r)^{-1} \; S$$

où S est une quantité qui ne dépend pas de r. Ainsi, ε étant arbitraire, la limite (3) existe et vaut $\nu(o)$, pour $x = 0$, ce qui établit l'énoncé.

3. - L'énoncé précédent conduit au résultat annoncé pour les courants positifs fermés :

THÉORÈME 2. - <u>Etant donné un courant</u> t <u>positif, fermé, de type</u> (k,k), $(k = n-p)$ <u>dans un domaine</u> G <u>pseudo-convexe borné de</u> C^n, <u>il existe un courant positif fermé</u> t_1, <u>de type</u> $(1,1)$ <u>qui, en tout point</u> $x \in G$ <u>a même nombre de Lelong</u> $\nu(x)$ <u>que</u> t.

On partira de la mesure trace $\sigma = t \cap \beta_p$ du courant t. On pose $\beta = \frac{i}{2} \sum dz_j \wedge d\bar{z}$, $\beta_p = \frac{1}{p!} \beta^p$ et on rappelle (cf [4, a]) que pour x

donné dans G,

$$\nu = t \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log \|z-x\|\right)^p$$

est une mesure positive d'après le théorème de multiplication des courants positifs par les formes positives (1,1) (cf. [4,a]) à densité dans $C^n - \{x\}$. Elle se prolonge à tout C^n par l'addition d'une mesure ponctuelle en x, de valeur $\nu(x)$ où

(6)
$$\nu(x) = \lim_{r=o} \frac{\sigma(x,r)}{\tau_{2p}\, r^{2p}} .$$

Le quotient qui figure au second membre de (6) est fonction croissante de r ; sa limite pour r = 0 définit le nombre de Lelong $\nu(x)$ du courant t au point x. Par construction $\nu(x)$ est fonction semi-continue supérieurement de x. On note $\nu(x,r)$ la mesure ν (ainsi prolongée en x) portée par la boule $B(x,r)$; elle est égale au quotient qui figure au second membre de (6). Les hypothèses du théorème concernant σ sont ainsi vérifiées. D'autre part considérons, comme le fait H.Skoda dans [6,a, p. 401] une suite G_j d'ouverts croissants épuisant G. On définit $G_j = [z \in G \; ; \delta(z) > 2^{-j}]$, où $\delta(z)$ est la distance de $z \in G$ à la frontière bG. Soit

$\Omega_j' = [z \in \Omega \; ; \; \delta(z) > 2^{-j}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$. Enfin soit χ une fonction C^∞, positive, à support la boule unité et d'intégrale égale à 1. Soit

$$\chi_j(z) = 2^{-n(j+2)} \int_{\Omega'} \chi\left[2^{j+2}(z-x)\right] dx$$

χ_j est C^∞, $\chi_j(z) = 1$ sur Ω_j et est nulle dans le complémentaire de Ω_{j+1}.

On considère la partition de l'unité définie dans G par $\rho_1 = \chi_1$, $\rho_2 = \chi_2 - \chi_1 \; \ldots \; \rho_j = \chi_j - \chi_{j-1}$ et $\eta_j = \chi_{j+2}$ et l'on forme

(7)
$$U(z) = \sum_1^\infty \rho_j \, U_j(z)$$

où $U_j(z) = \int g_p(a,z)\eta_j(a) d\sigma(a)$, et $\eta_j = \chi_{j+2}$

Lorsque z appartient au support de ρ_j, et a au support de $d''\eta_j$, on a $\|z-a\| \geq 2^{-j-2}$; U(z) a alors un défaut de plurisousharmonicité mesuré par la forme $\sum_{s,t} \frac{\partial^2 U_j}{\partial z_s \partial \bar{z}_t} \lambda_s \bar{\lambda}_t = H(U,\lambda)$.

On a d'après [6,a, p. 402] : $H(U,\lambda) \geqslant -C(p,n)\,|\lambda|^2\,[\delta(z)]^{-2p-2}\int_{\delta(a)>\frac{1}{4}\delta(z)} d\sigma(a)$.

Il existe alors une fonction C^∞, strictement plurisousharmonique, soit $h(t)$ où $t = -\log \delta(z) + \|z\|^2$, $h(t)$ convexe, croissante telle que si l'on pose

$$W(z) = h\left[-\log \delta(z) + \|z\|^2\right]$$

$H(W,\lambda)$ compense le défaut de plurisousharmonicité de (7). Comme on a $H(W,\lambda) \geqslant h'\left[-\log \delta(z) + \|z\|^2\right]|\lambda|^2$, il suffit de prendre

$$h'(t) = C(p,n)\exp\left[(2p+2)t\right] \quad \sigma\left[\delta(x) \geqslant \frac{1}{4}e^{-t}\right]$$

où $\sigma[\ ]$ désigne la mesure positive portée par l'ensemble défini entre crochets. Soit $\alpha(t)$ une fonction C^∞ positive nulle en dehors du segment $|t| \leqslant 1$ et vérifiant $\int \alpha(t)dt = 1$. On pose $\alpha_\rho(t) = \frac{1}{\rho}\alpha(\frac{t}{\rho})$. On construit $h_\rho(t) = \int h(t+\rho+u)\alpha_\rho(u)du \geqslant h(t)$; $h_\rho(t)$ est C^∞ et est compris entre $h(t+\rho)$ et $h(t+2\rho)$. Finalement on obtient une fonction strictement plurisousharmonique compensatrice qui est C^∞ : $W_1(z) = h_\rho\left[-\log \delta(z) + \|z\|^2\right]$. Elle est majorée par $W_1(z) \leqslant C'(p,n,\rho)\log \delta(z)\left[\delta(z)\right]^{-2p-2}\sigma\left[\delta(a) > k\delta(z)\right]$ où $k > 0$ est une constante. Alors

(8) $$V(z) = U(z) + W_1(z)$$

est plurisousharmonique dans G donc est R^{2n}-sousharmonique.

On a, W_1 étant continue :

$$\lim_{r=0}(\log r)^{-1}\lambda(W_1,0,r) = 0$$

et W_1, qui a servi à obtenir une fonction plurisousharmonique, peut-être négligé. Dans le calcul de la limite (3), il suffit de tenir compte de $U(z)$ défini par (7).

Un point $x \in G$ est centre d'une boule $B(x,R)$ compacte dans G, dans laquelle un nombre fini de ρ_j seulement prennent des valeurs non nulles. Dans la boule $B(x,R')$ où $s = \sup j$, $R' = \inf(R, 2^{-s-2})$ les η_j sont tous de valeur 1, et $U(z)$ se décompose en $U = S_1 + S_2$ où S_1 provient des masses a pour lesquelles $\|a - x\| < 2^{-s-2}$, et S_2 de masses extérieures à $B(x,2^{-s-2})$; en tenant compte de $\sum\rho_j = 1$, $\eta_j = 1$, on a $S_1(z) = \int d\sigma'(a) g_p(a,z)$ où σ' est la restriction de σ à $B(x,R')$. On a alors d'après le théorème 1

$$(9) \qquad \lim_{r=o} (\log r)^{-1} \lambda(S_1,x,r) = \nu(x)$$

qui entraîne

$$\lim_{r=o} (\log r)^{-1} \lambda(V,x,r) = \nu(x).$$

Considérons alors le courant positif fermé (1,1) défini dans G par

$$t_1 = i\pi^{-1} d'd''V = 2dd^cV \quad , \qquad d^c = \frac{i}{4\pi}(d''-d').$$

On a $\sigma' = t_1 \wedge \beta_{n-1} = \frac{1}{2\pi} \Delta V . \beta_n$

(ou encore $\sigma' = (2\pi)^{-1} \Delta V$ avec la notation par une distribution).

Il vient alors pour le calcul de $\nu'(x)$ relatif au courant t_1 :

$$\sigma'(x,r) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,r)} \Delta\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial r} V(x+r\alpha)\, r^{2n-1}\, d\omega_{2n}(\alpha)$$

$$= (2\pi)^{-1} \omega_{2n}\, r^{2n-2} \frac{\partial}{\partial \log r} \lambda(V,x,r) = \tau_{2n-2} r^{2n-2} \frac{\partial}{\partial \log r} \lambda(V,x,r).$$

En remarquant que $\lambda(V,x,r)$ est fonction convexe croissante de $\log r$, on énoncera :

PROPOSITION 1. - <u>Pour un courant</u> $t_1 = i\pi^{-1} d'd''V$ (V <u>plurisousharmonique</u>) on a $\nu'(x) = \lim_{r=o} \frac{\partial}{\partial \log r} \lambda(V,x,r) = \lim_{r=o} (\log r)^{-1} \lambda(U,x,r)$.

Si l'on opère ainsi à partir de la fonction V construite par (8) ,on a d'après (9) :

$$\nu'(x) = \nu(x)$$

c'est-à-dire que t_1 et le courant t ont même nombre $\nu(x)$ en tout point de G, ce qui achève d'établir le théorème 2.

4. - <u>Etude de</u> $-\nu(x)$. Le théorème 2 montre que, étant donné un courant t, positif, fermé, de type (k,k), dans un domaine G pseudo-convexe, on peut représenter son nombre $\nu(x)$ à partir d'une fonction plurisousharmonique V dans G par

$$-\nu(x) = \lim_{r=o} \frac{\lambda(V,x,r)}{\log 1/r} \quad , \qquad r < d(x,bG) .$$

Soit $G_\rho \subset\subset G$ à distance $\geq \rho$ de bG et $M(G_\rho) = \sup V(z)$, pour $z \in G_\rho$. On a :

(10) $$-\nu(x) = \lim_{r=0}\nearrow(\log 1/r)^{-1}\left[\lambda(V,x,r)-M(G_\rho)\right], \quad r<d(x,bG_\rho).$$

En effet l'origine est dans R^2 située dans la région convexe $y > \varphi(u)$, $u = \log 1/r$, $\varphi(u) = u^{-1}\left[\lambda(V,x,e^{-u})-M(G_\rho)\right] \leqslant 0$, et la convexité du graphe assure que dans (10) la limite est atteinte par valeurs croissantes. On a ainsi établi :

THÉORÈME 3. - Soit t un courant positif fermé de type (k,k) défini dans un domaine G pseudo-convexe. Alors sur tout compact de G, $-\nu(x)$ est limite d'une suite croissante de fonctions plurisousharmoniques négatives dans G.

On va étudier plus précisément le cas (1,1). Par le point $x \in G$ faisons passer une droite complexe L : la restriction $V|_L = V(x+uy) = \varphi_{x,y}(u)$ est sousharmonique ou, éventuellement, la constante $-\infty$; ce dernier cas n'intervient que pour $y \in \gamma_x$, cône polaire dans C^n. On a alors, comme dans (10) :

PROPOSITION 2. - Soit $G_\rho \subset\subset G$ et $M(G_\rho) = \sup V(z)$, $z \in G_\rho$. Alors pour $\|y\| < \rho$, $x \in G_{2\rho}$, $r < \rho$, posons $\operatorname{Reg}\sup_x f(x) = \limsup f(x')$ pour $x' \to x$. On a

(11) $$-\nu(x,y) = \lim\nearrow(\log r^{-1})^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(x+rye^{i\varphi})\,d\varphi - M(G_\rho)\right]$$

a/ $-\nu(x,y)$ est défini pour $x \in G_{2\rho}$, $\|y\| < \rho$. On a $-\nu(x,y) = -\infty$ si et seulement si $V(x+uy) \equiv -\infty$, c'est-à-dire $y \in \gamma_x$.

b/ $-\nu(x,y)$ est limite croissante de fonctions plurisousharmoniques de (x,y), négatives.

c/ On a $\nu(x,y) \geqslant \nu(x)$ et $\operatorname{Reg}\sup_y\left[-\nu(x,y)\right] = -\nu(x)$ et pour chaque $x \in G_\rho$, l'ensemble des y où $\nu(x,y)$ est supérieur à $\nu(x)$ est un cône polaire dans C^n.

L'énonce a déja été donné en dimension infinie dans [4,c]. Pour établir c/ on remarque que (11) entraîne $\nu(x,\lambda y) = \nu(x,y)$ de sorte que $\operatorname{Reg}\sup_y\left[-\nu(x,y)\right]$ est une fonction plurisousharmonique de y dans $C^n - \{0\}$ qui est invariante par les homothéties. Elle se prolonge à tout C^n, et, étant bornée, est une constante ξ.

On a $\nu(x,y) \geqslant \xi$. Mais d'après (10) et (11) la moyenne de $\nu(x,y)$ pour y parcourant la sphère unité, vaut ξ. D'où $\xi = \nu(x)$.

Rappelons qu'on note

$$\text{Reg}\ \sup_x f(x) = \limsup_{x' \to x} f(x') .$$

La proposition suivante est importante pour la suite.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> M <u>l'ensemble analytique</u> $z_n = 0$ <u>dans un domaine</u> G <u>de</u> C^n <u>contenant l'origine, et</u> V <u>une fonction plurisousharmonique dans</u> G, $\theta = i\pi^{-1} d'd''V$. <u>On note</u> α <u>un vecteur unité de</u> $C(z_n)$ <u>et pour</u> $z' \in M$, <u>on écrit</u> $z' + r\alpha e^{i\varphi}$ <u>un point de</u> G. <u>On note</u> $\nu(z')$ <u>la restriction de</u> $\nu(z)$ <u>à</u> M, ν <u>étant relatif au courant</u> θ ; <u>on note</u> $\nu(z',\alpha)$, <u>la valeur de</u> $\nu(x,\dot{y})$ <u>défini à la proposition</u> 2, <u>aux points</u> $x = z' \in M$ <u>et</u> $y = \alpha$. <u>Alors on a</u>

$$(12) \qquad \liminf_{\xi \to z'} \nu(\xi,\alpha) = \liminf_{\xi \to z'} \nu(\xi) \qquad \xi,\ z' \in M$$

<u>Ainsi en</u> $z' \in M$, <u>la régularisée inférieure sur</u> M <u>de la restriction de</u> ν <u>à</u> M <u>est égale à la régularisée inférieure en</u> z' <u>de</u> $\nu(x,\alpha)$ <u>quand</u> x <u>parcourt</u> M.

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition 2, on a $\nu(x) \leqslant \nu(x,y)$, ce qui entraîne dans (12) que le membre de gauche soit au moins égal à celui de droite. S'il le surpassait on aurait

$$(13) \qquad \liminf_{\xi \to z'} \nu(\xi') = a \quad \text{et} \quad \nu(\xi,\alpha) \geqslant a+\sigma\ ,\ \sigma > 0 \text{ pour } \xi \in M, \|\xi - z'\| \leqslant \lambda.$$

Mais on a, en posant $M(\xi + r\alpha) = \sup_\theta V(\xi + r\alpha e^{i\varphi})$, $\xi \in M$:

$$\lim_{r=o} (\log r)^{-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\xi + r\alpha e^{i\varphi})d\varphi = \lim_{r=o} (\log r)^{-1} M(\xi + r\alpha) .$$

Supposons $V \leqslant 0$ ce qui est sans inconvénient et appliquons le lemme de Hartogs aux fonctions plurisousharmoniques négatives :

$$U_r(\xi) = (\log \tfrac{1}{r})^{-1} M(\xi + r\alpha) .$$

Il existe $r_o > 0$ tel qu'on ait $U_r(\xi) \leqslant -(a + \frac{\sigma}{2})$ pour $\|\xi - z'\| \leqslant \lambda$ et $r \geqslant r_o$.

Soit β un vecteur unité $\notin M$, écrivons $\beta = \alpha' + \tau\alpha$, $\alpha' \in M$, $0 < \tau < 1$. On a pour $\|\xi - z'\| < \frac{\lambda}{2}$, $\xi \in M$, $r < \inf(r_o, \frac{\lambda}{2})$

$$V(\zeta+\alpha' re^{i\varphi}+\tau\alpha re^{i\varphi}) \leqslant (a+\frac{\sigma}{2})(\log r+\log\tau).$$

D'où $\nu(\zeta,\beta) \geqslant a+\frac{\sigma}{2}$ pour tout $\zeta\in M$, vérifiant $\|\zeta - z'\|\leqslant \frac{\lambda}{2}$, et tout $\beta\notin M$. Alors d'après la proposition 2, on a

$$\nu(\zeta) \geqslant a+\frac{\sigma}{2} \quad \text{pour tout } \zeta\in M \text{ vérifiant } \|\zeta - z'\|\leqslant \frac{\lambda}{2}.$$

Finalement on a $\liminf\limits_{\zeta\to z'} \nu(\zeta) \geqslant a+\frac{\sigma}{2}$, ζ, $z'\in M$, ce qui contredit (13) et établit l'énoncé.

5. - Étude d'une fonction plurisousharmonique au voisinage d'un sous-ensemble analytique.

Rappelons le "théorème des fonctions implicites" donné dans [4,b].

THÉORÈME 4. - Soit $V(z',z_n)$ une fonction plurisousharmonique dans un cylindre $D = \left[z'\in d\subset C^{n-1},\ z_n\in\mathbb{C},\ z_n = r_n e^{i\varphi}\right]$ et $M(z',r) = \sup_\varphi V(z', re^{i\varphi})$. Alors si l'on définit la fonction inverse

$$(13)\qquad \delta(z',m) = \left[\sup r,\quad r>0,\quad M(z',r) < m\right]$$

$-\log\delta(z',m)$ est une fonction plurisousharmonique de $z'\in d$, décroissante et convexe de m et tend vers $-\infty$ quand $m\to+\infty$.
Plus précisément si l'on définit pour $m=-\log|\zeta|$, $\zeta\in C$

$$\delta_1(z',\zeta) = \left[\sup r,\ r>0,\ M(z',r)+\log|\zeta|<0\right]$$

$-\log\delta_1(z',\zeta)$ est plurisousharmonique de $(z',\zeta)\in\Delta$, où Δ est le domaine défini dans $C^n(z')\times C(\zeta)$ pour $z'\in d$, $|\zeta| < e^{-V(z',o)}$.

Appliquons cet énoncé à un problème préliminaire.

PROPOSITION 4. - Soit $V(z',z_n)$ plurisousharmonique dans le cylindre $\left[z'\in d\subset C^{n-1},\ z_n\in\mathbb{C}\right]$. On pose $M(z',r) = \sup_\varphi V(z',re^{i\varphi})$. Alors la limite

$$(14)\qquad c(z') = \lim_{r=\infty} (\log r)^{-1} M(z',r)$$

existe, finie ou infinie pour tout z', et il existe c_o, $0\leqslant c_o\leqslant+\infty$ tel que l'on ait $c(z')\leqslant c_o$ pour $z'\in d$ et que sur tout domaine $d_1\subset\subset d$, l'ensemble $c(z') < c_o$ soit polaire.

Remarque. c_o est le sup des $c \geq 0$, tels que l'ensemble $c(z') < c_o$ soit polaire sur tout $d_1 \subset\subset d$.

Démonstration. La limite (14) existe pour tout $z' \in d$, $M(z',r)$ étant convexe croissant de $\log r$; $c(z'_o) = 0$ si et seulement si l'on a $V(z_o, z'_n) \equiv V(z_o, 0) \neq -\infty$.
On a $c(z') \geq 0$ sauf sur l'ensemble polaire dans d où $V(z', z_n) = V(z', 0) = -\infty$ quel que soit $z_n \in C$.

Soit $d_1 \subset\subset d$ et $A(d_1) = \sup V(z', z_n)$ pour $z' \in \bar{d}_1$, $|z_n| \leq 1$. Alors si l'on définit $M(z',r) = \sup_{\varphi} V(z', re^{i\varphi})$ et $\delta(z',m)$ par (13) $-\log \delta(z',m)$ est défini, négatif pour $z' \in d_1$, $m > A(d_1)$, et plurisousharmonique de $z' \in d_1$. On a d'après (14) :

$$\gamma(z') = -\frac{1}{c(z')} = \lim_{m=+\infty} \nearrow -\frac{\log \delta(z',m)}{m - A(d_1)}$$

le second membre est fonction croissante de m, d'après la convexité en m du numérateur; c'est d'après le théorème 4 une fonction plurisousharmonique de $z' \in d_1$.

Envisageons alors divers cas compte-tenu de $\gamma(z') \leq 0$:

a/ $\gamma^*(z') = \text{Reg.sup.}_{z'} \gamma(z') \equiv 0$, on a $\gamma(z') = 0$ sauf sur un ensemble polaire dans tout $d_1 \subset\subset d$ (cf. [4,d et 4,e]). L'énoncé est établi avec $c_o = +\infty$.

Sinon γ^* est une fonction plurisousharmonique dans d et majorée par un nombre strictement négatif sur tout $d_1 \subset\subset d$.

b/ Supposons qu'on ait $c(z') \leq 0$ pour $z' \in \eta \subset d_1$, $d_1 \subset\subset d$, et η non polaire dans d_1, alors $V(z', z_n) = V(z', 0)$ est indépendant de z_n pour $z' \in \eta$, ce qui entraîne $-\log \delta(z',m) = -\infty$ pout $z' \in \eta \subset d_1$ dès qu'on a $m > A(d_1)$. On a donc $\delta(z',m) \equiv +\infty$ sur tout compact $d' \subset\subset d$ pour $m > A(d')$, V ne dépend pas de z_n et $c(z') \equiv 0$, $z' \in d$.

c/ Considérons les ensembles $e(h) = [z' \in d \; ; \; c(z') \leq h]$.
Les h, $0 < h < +\infty$, tels que $e(h)$ soit non polaire sur au moins un

$d' \subset\subset d$ forment un ensemble non vide et ont une borne inférieure c_o, $0 \leqslant c_o < +\infty$. Soit $e(h)$ pour $h > c_o$: $e(h)$ est non polaire sur un $d_1 \subset\subset d$. Alors, relativement à ce domaine $d_1 \subset\subset d$ construisons :

$$W(z',r) = M(z',r) - A(d_1) - h \log |z_n|$$

puis

$$\begin{cases} W'(z',r) = \sup [W(z',r), 1] & \text{pour} \quad z' \in d_1, \quad |z_n| \geqslant 1 \\ W'(z',r) = 1 & \text{pour} \quad z' \in d_1, \quad |z_n| \leqslant 1 \end{cases}$$

$W'(z',r)$ est plurisousharmonique dans le cylindre $z' \in d_1$, $z_n \in \mathbb{C}$. Si on pose

$$c_1(z') = \lim_{r=\infty} (\log r)^{-1} \quad W'(z',r)$$

on a

$$c_1(z') = \sup [c(z') - h, 0].$$

On a $c_1(z') = 0$, pour $z' \in e(h) \cap d_1$, non polaire dans d_1, donc $c_1(z') \equiv 0$, $z' \in d$ d'après b/.

On a donc $c_1(z') \leqslant h$ pour tout $h > c_o$, donc $c(z') \leqslant c_o$.

D'autre part les ensembles $c(z') < h$ sont polaires sur tout $d_1 \subset\subset d$, pour $h < c_o$, donc il en est encore ainsi de l'ensemble $c(z') < c_o$, la réunion dénombrable de tels ensembles étant encore polaire sur tout $d_1 \subset\subset d$ (cf. [4,d et 4,e]). La proposition 4 est ainsi établie.

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> $V(z',z_n)$ <u>plurisousharmonique dans</u> $[z' \in d,\ 0 < |z_n| < a]$ <u>et</u>

(15) $\quad c(z') = \lim_{r=0} (\log 1/r)^{-1} M(z',r)$, <u>où</u> $M(z',r) = \sup_{\varphi} V(z',re^{i\varphi})$

<u>Alors il existe une constante</u> c_o, $-\infty < c_o \leqslant +\infty$ <u>telle qu'on ait</u> $c(z') \leqslant c_o$ <u>et que l'ensemble</u> $c(z') < c_o$, $z' \in d$, <u>soit polaire dans tout domaine</u> $d_1 \subset\subset d$.

<u>Démonstration</u>. Pour $z' = z'_o$ fixé, le graphe $y = M(z'_o,r) = \varphi(u)$ où $u = -\log r$, est une courbe convexe définie pour $-\log a < u < +\infty$, mais non décroissante en général. On pose $z'_n = z_n^{-1}$, $V_1(z',z'_n) = V(z',z_n^{-1})$

est plurisousharmonique pour $z' \in d$, $|z'_n| > a^{-1}$. On pose $A = \sup V_1(z', z'_n)$ sur le compact défini par $z' \in \bar{d}_1 \subset d$, $|z'_n| = 2a^{-1}$, puis

$$\begin{cases} V_2(z', z'_n) = A + 1 & \text{si} \quad z' \in d_1, \ |z'_n| \leqslant 2a^{-1} \\ V_2(z', z'_n) = \sup\left[(A+1) \ , \ V_1(z', z'_n)\right] & \text{si} \quad |z'_n| \geqslant 2a^{-1}. \end{cases}$$

Alors V_2 est plurisousharmonique dans $\left[z' \in d_1, \ z'_n \in \mathbb{C}\right]$ et la proposition 4 s'applique ; on a $c_1(z') = \sup\left[c_1(z), \ 0\right] = c'_o$, $0 \leqslant c'_o \leqslant +\infty$, l'ensemble $c_1(z') < c'_o$ étant polaire sur tout $d' \subset\subset d$. On a alors deux cas possibles :

a/ $c'_o > 0$. Le théorème 5 est établi avec $c_o = c'_o > 0$; $c_o = \inf h$, tels que $c(z') \leqslant h$ soit non polaire dans un domaine $d_1 \subset\subset d$.

b/ $c'_o = 0$. Alors $V_2(z', z'_n) = V_2(z', 0)$ est majoré sur tout compact au voisinage de $z_n = 0$ et se prolonge comme fonction plurisousharmonique à travers $z_n = 0$. On a $c(z') \leqslant 0$. On a $c(z') = -\infty$ si et seulement si on a $V(z', z_n) = -\infty$ pour tout z_n , $|z_n| < a$, et cela n'arrive que pour z' appartenant à un ensemble polaire dans d.

Définissons alors $c_o = \inf h$, $h \leqslant 0$, tels que $c(z') \leqslant h$ soit non polaire dans un domaine $d_1 \subset\subset d$. Soit $\sigma > 0$ et

$$V_3(z', z_n) = V(z', z_n) + c_o \log |z_n| - \sigma \log |z_n| .$$

Alors $c_2(z')$ calculé selon (15) , mais à partir de V_3 a pour valeur

(16) $\quad c_2(z') = \sup\left[c(z') - c_o + \sigma, \ 0\right]$

On a $\sigma = \inf$, des h tels que $c_2(z') < h$ soit non polaire dans un domaine $d_1 \subset\subset d$; on a donc d'après a/, $c_2(z') = \sigma$, $\sigma > 0$, l'ensemble $c_2(z') < \sigma$ étant polaire dans tout domaine $d' \subset\subset d$; d'après (16) la même propriété vaut pour $c(z')$ et c_o, ce qui établit l'énoncé.

Le théorème 5 s'applique aisément à l'étude du prolongement d'une fonction plurisousharmonique ou d'un courant positif fermé (1,1) à travers un sous-ensemble analytique complexe et l'on retrouverait ainsi des énoncés de [5] ou [1] un peu précisés. Par exemple

PROPOSITION 5. - <u>Si</u> V <u>est plurisousharmonique au voisinage</u>

d'un sous-ensemble N analytique irréductible de codimension 1 dont $\mathring{M}$ est l'ensemble des points ordinaires et s'il existe une direction de droite complexe α non tangente à $\mathring{N}$, telle que le quotient $M(z'+r\alpha)\,|\log r|^{-1} \to 0$ pour les $z' \in \mathring{N}$ d'un ensemble non localement polaire sur $\mathring{N}$, alors V demeure borné au voisinage de N et se prolonge à travers N.

La conséquence suivante du théorème 5 permet l'étude de $\nu(x)$:

PROPOSITION 6. - Soit t un courant positif fermé (1,1) dans le domaine D : $[\|z'\| < a', |z_n| < a_n]$, de C^n. Soit N l'ensemble $z_n=0$ dans D. Il existe c, $0 \leq c < +\infty$ tel que l'on ait $\nu(x) \geq c$ sur N et que l'ensemble défini par $\nu(x) > c$ soit localement polaire sur N.

En effet d'après la proposition 3 appliquée à z' parcourant N et à α vecteur unité de l'axe des z_n, la régularisée inférieure de $\nu(z')$, $z' \in N$, et celle de $\nu(z',\alpha)$ sur N sont égales.

Soit V une solution de l'équation $i\pi^{-1} d'd''V = t$ dans D. Alors on a

$$-\nu(z',\alpha) = \lim_{r=o} (\log 1/r)^{-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(z',r\alpha e^{i\varphi})d\varphi = \lim_{r=o}(\log \tfrac{1}{r})^{-1} M(z',r)$$

où l'on a posé $M(z',r) = \sup_{\varphi} V(z',r\alpha e^{i\varphi})$.

Alors (15) donne

$$-\nu(z',\alpha) = c(z').$$

Le théorème 5 et la proposition 3 montrent pour $z' \in N$

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{Reg}_{z'} \sup[-\nu(z')] = \operatorname{Reg}_{z'} \sup[-\nu(z',\alpha)] = \operatorname{Reg}_{z'} \sup c(z') = c_o.$$

Aussi lorsqu'on parcourt N, la fonction $-\nu(x)$ est une limite (croissante) de fonction plurisousharmonique négative, et sa régularisée supérieure est une constante ne dépendant que de t et de N. La proposition 6 en résulte, l'ensemble où cette limite diffère de sa régularisée constante étant polaire sur $\mathring{N}$ (cf. [4,e]).

D'autre part on a :

PROPOSITION 7. - Le nombre $\nu(x)$ d'un courant positif fermé t de type (1,1) est invariant par les homéomorphismes analytiques complexes.

a/ Soit V(y) une fonction plurisousharmonique au voisinage de l'origine et solution de $i\pi^{-1}d'd''V = t$. Soit d'abord $y' = A(y)$ ou $y'_k = \sum_j a_k^j y_j$ est un homéomorphisme linéaire. Utilisons les nombres $\nu(x,y)$ définis par (11) et la proposition 2 :

$$\nu(0,y') = \lim_{r=0}(\log \frac{1}{r})^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\left[r\ A(y)e^{i\theta}\right]d\theta\ .$$

L'application $y' = A(y)$ est bijective de $C^n - \{0\}$ dans $C^n - \{0\}$. On a $\sup_{y'} \nu(0,y') = \sup_y \nu(0,y)$; ainsi $\nu(0)$ est invariant par A, et égal à leur valeur commune.

b/ Si φ est un homéomorphisme analytique au voisinage de l'origine on décompose $\varphi = A \circ \mathcal{J}$, où A est la transformation tangente et $\mathcal{J}$ a l'identité comme transformation tangente ; A est bijective et conserve donc $\nu(0)$ d'après a/.

Reste à montrer qu'il en est de même de $\mathcal{J}$. Or $\mathcal{J}$ s'écrit

(18) $$y'_k = y_k + \varphi_k(y_1,\dots, y_n) \qquad , \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

où φ_k est d'ordre 2 au moins et vérifie $|\varphi_k(y)| \leqslant C_1\ \|y\|^2$, pour $\|y\| < R$.

Soit σ' l'image de la mesure σ par $y' = \mathcal{J}(y)$.

(19) $$\sigma'(0,r) = \int_{\|y'\| < r} i\pi^{-1}\ d'd''V \wedge \beta_{n-1}$$

Soit $\beta_r = \varphi^{-1}\left[B(0,r)\right]$. D'après (18), on a en posant $v = \|y'\|\ \|y\|^{-1}$: $|v-1| \leqslant C_1\ \|y'\|$ pour $\|y'\| < R$, et β_r vérifie

$$B\left[0,r(1-\varepsilon_r)\right] \subset \beta_r \subset B\left[0,r(1+\varepsilon_r)\right]\ , \text{ où } \varepsilon_r \to 0 \text{ avec } r.$$

Dans (19), d'd"V est invariant par la transformation $y' = \mathcal{J}(y)$.

On a $\beta_{n-1}(y') = \beta_{n-1}(y) + \gamma(y)$ où les coefficients de la forme γ sont majorés par $C_2 r$, pour $\|y'\| < r < R$. Les mesures $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_p \partial \bar{y}_q}$ qui figurent au second membre de (19), quand on explicite $y' = \mathcal{J}(y)$, sont majorés en norme par $C_3 \Delta V \leq C_4 \sigma$, la forme hermitienne $d_z d_{\bar{z}} V$ étant semi-définie positive. Il en résulte pour $r < R$:

(20) $$\sigma\left[0, r(1 - \varepsilon_r)\right](1 - C_4 r) \leq \sigma'(0,r) \leq \sigma\left[0, r(1 + \varepsilon_r)\right](1 + C_4 r)$$

les C_i étant des constantes indépendantes de r : les quotients de $\sigma(0,r)$ et de $\sigma'(0,r)$ par $\tau_{2n-2} r^{2n-2}$ tendent donc vers la même limite quand $r \to 0$.

THÉORÈME 6. - Soit N un ensemble analytique irréductible dans un domaine G pseudo-convexe et $\overset{\circ}{N}$, la variété analytique connexe des points réguliers de N. Alors si t est un courant de type (k,k) dans G, positif, fermé, dans G, il existe $c \geq 0$ tel que sur N on ait $\nu(x) \geq c$, et que l'ensemble $\nu(x) > c$ soit localement polaire sur $\overset{\circ}{N}$. La régularisée inférieure de la restriction de $\nu(x)$ à N est constante sur N.

On substitue à t le courant t' positif fermé, de type (1,1) donné dans G par le théorème 2, t' ayant en tout point x de G le même nombre $\nu(x)$ que t. On est donc ramené au cas d'un courant (1,1). Soit $x_o \in \overset{\circ}{N}$, et codimension n=1. Un homéomorphisme analytique complexe φ amène un voisinage U de x_o sur un voisinage W de l'origine, et $\varphi(U \cap N)$ sur $W \cap [z = 0]$. La propriété de $\nu(x)$ sur $\overset{\circ}{N}$ résulte alors de la proposition 6 et de la proposition 7 : la régularisée inférieure de $\nu(x)$ sur $\overset{\circ}{N}$ est localement constante, donc égale à une constante. De plus en un point x non régulier on a $\nu(x) \geq c$, car $\nu(x)$ est par construction une fonction semi-continue supérieurement, $\nu(x,r)$ et $\sigma(x,r)$ ayant cette propriété : la restriction de $\nu(x)$ à N est donc semi-continue supérieurement.

Soit maintenant N de codimension > 1 et $t = i\pi^{-1} d'd''V$, où V est plurisousharmonique dans G. La propriété à établir étant locale, on se ramène par un homéomorphisme analytique complexe au cas où N est un sous-espace N défini par $z_{p+1} = \dots = z_n = 0$ dans le domaine

$D = \left[|z_k| < a \ , \ 1 \leqslant k \leqslant p \ , \ \sum_{p+1}^{n} |z_j|^2 < R^2 \right]$. D'après le théorème 2, il existe V plurisousharmonique dans D de manière que l'on ait, si $r < d(x, bD)$:

$$(21) \qquad \nu(x) = \lim_{r=0} (\log r)^{-1} \lambda(V,x,r) \quad , \ x \in D.$$

Remplaçons V par sa moyenne dans C^{n-p+1}, en posant $z_j = \zeta\alpha_j$, $p+1 \leqslant j \leqslant n$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $\sum_{p+1}^{n} |\alpha_j|^2 = 1$ et soit

$$V'(z_1,\ldots,z_p,\zeta) = \omega_{2n-2p}^{-1} \int V(z_1,\ldots,z_p,\zeta\alpha_{p+1},\ldots,\zeta\alpha_n) \, d\omega_{2n-2p}(\alpha)$$

V' est plurisousharmonique de $z' = (z_1,\ldots,z_p)$ et de ζ , dans $D' = \left[|z_k| < a, \ \ 1 \leqslant k \leqslant p \ , \ |\zeta| < R \right]$. D'autre part pour $x = (z', \ z_{p+1} = 0 \ \ldots \ z_n = 0) \in N$, on a

$$(22) \qquad \lambda(V, \ x, \ r) = \lambda'(V', \ z', \ r)$$

où λ' désigne la moyenne sur la sphère de çentre $(z',0)$ dans $C^{p+1}(z_1,\ldots,z_p, \zeta) = C^{p+1}(z', \zeta)$. De (21) et (22) résulte que les deux courants $i\pi^{-1}d'd''V$ dans D et $i\pi^{-1}d'd''V'$ dans D' ont même nombre ν en un point $z' \in N$. Dans D', N est de codimension 1 et on conclut en appliquant a/ au courant construit à partir de V'.

6. - Passage de l'ensemble localement polaire à l'ensemble analytique.

Rappelons un théorème du à H.Skoda (cf. [6 , p. 406]) et établi à partir du théorème de Hörmander-Bombieri (cf. [8] et [2 , p. 96]). Le résultat de H.Skoda s'énonce dans le cas (1,1) :

PROPOSITION 8 (H.Skoda). *Soit* t *un courant positif fermé* (1,1) *dans* $G \subset C^n$ *pseudo-convexe : si* $\nu(x)$ *est le nombre de Lelong de* t *et* E_c, *l'ensemble* $[x \in G; \ \nu(x) \geqslant c \ ]$, *il existe un ensemble analytique* X *dans* G *tel qu'on ait*

$$(23) \qquad E_c \subset X \subset E_{c/n} \ .$$

Pour appliquer ce résultat montrons d'abord

PROPOSITION 9. - <u>Soit</u> M <u>un ensemble analytique irréductible dans</u> G <u>pseudo-convexe et</u> t <u>un courant positif (1,1) dans</u> G. <u>Alors si</u> $[M]$ <u>est le courant d'intégration sur</u> M, <u>et</u> c_M <u>la constante définie au théorème 6, le courant</u>

$$t' = t - c_M [M]$$

<u>est un courant positif fermé (1,1) dans</u> G.

<u>Démonstration</u>. 1°/ Soit d'abord codimension $M = 1$, $x_o \in M$ et $U(x_o)$ un voisinage de x_o ; on a $t = i\pi^{-1} d'd''V_1$, $[M] = i\pi^{-1} d'd''V_2$, V_1 et V_2 étant deux fonctions plurisousharmoniques dans $U(x_o)$. On peut remplacer, si besoin est, x_o par un point ordinaire $x_1 \in U(x_o)$. Par un homéomorphisme analytique complexe, on se ramène au cas $x_1 = 0$, M étant défini par $z_n = 0$ au voisinage de 0. Alors $V_1' - V_2'$ est plurisousharmonique dans un domaine $\Delta = [(z', z_n), \|z'\| < b, 0 < |z_n| < a]$, et l'on applique le théorème 5 en remarquant qu'on a $c(z') \leq 0$ pour $\|z'\| < b$, donc pour z' appartenant à un ensemble ouvert et non polaire. Alors $W' = V_1' - V_2'$ est borné au voisinage de $z_n = 0$ et se prolonge à travers $z_n = 0$. Revenant à la figure primitive, on voit que $W = V_1 - V_2$ se prolonge comme fonction plurisousharmonique à travers M, ce qui établit la propriété de $t' = i\pi^{-1} d'd''W$.

2°/ Si cod. $M > 1$, on opère au voisinage d'un point ordinaire $x_1 \in \overset{\circ}{M}$ comme à la démonstration du théorème 6, et l'on se ramène au cas de la codimension 1.

On va maintenant établir qu'on peut remplacer les ensembles polaires par des sous-ensembles analytiques, ou des réunions dénombrables de sous-ensembles analytiques.

PROPOSITION 10. - <u>Soit dans un domaine pseudo-convexe</u> $G \subset C^n$ <u>un ensemble analytique irréductible</u> M <u>de dimension</u> q , $0 \leq q \leq n$, <u>et</u> t <u>un courant positif fermé (1,1) défini dans</u> G . <u>Alors l'ensemble</u> $E_c = [x \in G \ ; \nu(x) \geq c]$, <u>où</u> ν <u>est relatif à</u> t, <u>contient</u> M <u>ou bien</u> $E_c \cap M$ <u>est contenu dans un sous-ensemble analytique de</u> M_o.

L'énoncé est évident pour $q = 0$; on procède par récurrence de $q - 1$ à q. Soit $q \geqslant 1$: si la constante $\nu(M)$ relative à t et à M vérifie $\nu(M) \geqslant c$, on a $M \subset E_c$ et l'énoncé est établi. Sinon on considère le courant d'intégration $[M]$ sur M et on forme :

$$t' = t - \nu(M) \, . \, [M] \, .$$

Relativement à t' et à M, on a $\nu'(M) = 0$ et si l'on pose $\gamma = c - \nu(M)$ et $E'_\gamma = [x \in G \; ; \; \nu'(x) \geqslant \gamma]$ on a $(E'_\gamma \cap M) = (E_c \cap M)$. Alors t' étant un courant positif fermé, d'après la proposition 9, l'énoncé de H.Skoda, rappelé à la proposition 8, donne l'existence d'un ensemble analytique $X \subset G$ qui vérifie :

$$E'_\gamma \subset X \subset E''_{\gamma/n} \tag{24}$$

c'est-à-dire

$$(E_c \cap M) = (E'_\gamma \cap M) \subset (X \cap M) \subset (E'_{\gamma/n} \cap M) \, .$$

Mais d'après le théorème 6, $E'_{\gamma/n}$ est localement polaire sur $\overset{\circ}{M}$. On n'a pas $M \subset X$, car $M \subset X$ entraîne $\overset{\circ}{M} \subset M \subset X \subset E'_{\gamma/n}$ contrairement au fait que $E'_{\gamma/n}$ est localement polaire sur $\overset{\circ}{M}$. Donc $M \cap X$ est un sous-ensemble analytique M' de M, et on a

$$(E_c \cap M) = (E'_\gamma \cap M) \subset M'$$

avec $\dim M' \leqslant q-1$, ce qui établit l'énoncé.

7. - Démonstration de l'analyticité des ensembles $\nu(x) \geqslant C$ (théorème de Y.T.Siu).

On va établir

THÉORÈME (Siu) . - Soit un courant positif fermé t_p de type (p,p) au voisinage de l'origine dans C^n. Alors si $\nu(x)$ est le nombre de Lelong relatif à t, l'ensemble E_c défini par $\nu(x) \geqslant c$, $c > 0$ est un ensemble analytique.

Démonstration. a/ Dans une boule de centre 0, soit $B(0,R)$, on remplace t_p par t positif fermé de type $(1,1)$, qui a même nombre de Lelong $\nu(x)$ que t_p en tout point $x \in B(0,R)$ (théorème 2).

b/ L'ensemble E_c est contenu dans un sous-ensemble analytique, il suffit donc d'établir pour tout entier q, $0 \leq q \leq n-1$ et pour tout germe d'ensemble analytique M_q de dimension q à l'origine que $M_q \cap E_c$ est un germe d'ensemble analytique. La démonstration sera faite par récurrence sur l'entier $q \geq 0$. Pour q = 0, il s'agit de 0 lui-même et l'énoncé est évident. Pour $q \geq 1$, M_q est irréductible dans une boule $B(0,R_q)$ et ou bien on a $M_q \subset E_c$, ou bien $M_q \cap E_c$ est contenu dans un sous-ensemble analytique $W_{q-1} \subset M_q$. Soit $M_{q-1}^{(j)}$, $j = 1 \ldots s$, l'ensemble (éventuellement vide) des germes de W_{q-1} en 0. D'après la proposition pour q-1, $E_c \cap M_{q-1}^{(j)} = A_{q-1}^j$ est un ensemble analytique. On a donc soit $E_c \cap M_q = \bigcup_j A_{q-1}^j$, soit $E_c \cap M_q = M_q$ dans une boule $B(0,R_{q-1})$, $R_{q-1} < R_q$ de rayon non nul, ce qui établit l'énoncé.

B I B L I O G R A P H I E

1. HARVEY (R.) et POLKING (J.). - Extending analytic objects (à paraître).

2. HÖRMANDER (L.). - Complex analysis in several complex variables, 2e éd., North-Holland, 1973.

3. KING (J.). - The currents defined by analytic varieties. Acta Math., t. 127, p. 185-220, 1971.

4. LELONG (P.). - a/ Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France, t. 85, p. 239-262, 1957.

b/ Fonctions entières et fonctionnelles analytiques, Cours publié par les Presses de l'Université de Montréal, 1967.

c/ Plurisubharmonic functions in topological vector spaces: polar sets and problems of measure. Proceedings on infinite dimensional holomorphy, Lecture-Notes n° 364, Springer, p. 58-69, 1974.

d/ Fonctions entières de type exponentiel dans C^n. Ann. Inst. Fourier, t. 16, p. 269-318, 1966.

e/ Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires. Sém. d'Analyse, Lecture-Notes n° 116, Springer, p. 1-20, 1969.

5. SIU (Y.-T.). - Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of meromorphic maps. Bull. Am. Math. Soc. 79, p. 1200-1205, 1973.

6. SKODA (H.). - a/ Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans C^n. Bull. S.M.F., t. 100, p. 353-408, 1972.

b/ Séminaire P.Lelong, Lecture-Notes n° 410, Springer, p. 117-142, 1973.

. THIE (P.). - The Lelong number in a point of a complex analytic set. Math. Ann., t. 172, p. 269-312, 1967.

. BOMBIERI (E.). - Algebraic values of meromorphic maps. Inv.Math., Berlin, t. 10, p. 267-287, 1970.