

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

F. PHAM

Connexion de Gauss-Manin microlocale

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1976, tome 23
« Exposés de : H.J. Borchers, A. Martin et F. Pham », , exp. n° 4, p. 81-90

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1976__23__81_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONNEXION de GAUSS-MANIN MICROLOCALE

par F. PHAM*
 Université de Nice

Pour entrer de plain-pied dans le sujet, nous donnons ici directement la définition "microlocale" de la connexion de Gauss-Manin, motivée par l'exposé précédent (cf. [5] ou [6]). Le lien avec la définition traditionnelle ("locale") est relégué en appendice.

1. Soit $Z = X \times Y$ un germe de variété analytique complexe, produit d'une variété X de dimension n et d'une variété Y de dimension k . Soit $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ un germe de fonction analytique auquel on pensera comme à une déformation, paramétrée par X , d'un germe de fonction $\varphi_0 : Y \rightarrow \mathbb{C}$ ($\varphi_0(y) = \varphi(0, y)$). On suppose que φ_0 a un point critique isolé à l'origine.

Notons $(\Omega_{Z/X}^\bullet, d_y)$ le "complexe de De Rham" des formes différentielles relatives de Z au-dessus de X (familles de formes différentielles sur Y paramétrées par X). D'après un lemme de Poincaré ce complexe est acyclique, c'est-à-dire qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega_Z \xrightarrow{d_y} \Omega_{Z/X}^1 \xrightarrow{d_y} \Omega_{Z/X}^2 \xrightarrow{d_y} \dots \xrightarrow{d_y} \Omega_{Z/X}^k \longrightarrow 0.$$

On a d'autre part la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega_Z \xrightarrow{d_y \varphi^\wedge} \Omega_{Z/X}^1 \xrightarrow{d_y \varphi^\wedge} \Omega_{Z/X}^2 \xrightarrow{d_y \varphi^\wedge} \dots \xrightarrow{d_y \varphi^\wedge} \Omega_{Z/X}^k$$

("C'est le lemme de De Rham" généralisé, qui résulte de ce que φ_0 est à point critique isolé, de sorte que $\varphi'_{y_1}, \dots, \varphi'_{y_k}$ forme ce que les algébristes appellent une "suite régulière").

* Exposé fait le 21 Mai 1976 à la Rencontre de Strasbourg entre Mathématiciens et Physiciens.

Définissons $\tilde{\mathcal{O}} = \begin{cases} \mathcal{O}_{Z/X}^k / d_y \varphi \wedge d_y \mathcal{O}_{Z/X}^{k-2} & \text{si } k > 1 \\ \mathcal{O}_{Z/X}^1 / d_y \varphi \cdot \mathcal{O}_X\{\varphi\} & \text{si } k = 1. \end{cases}$

On déduit des lemmes ci-dessus que tout $\omega \in \mathcal{O}_{Z/X}^k$ peut s'écrire $\omega = d_y \chi$, et que la classe de $d_y \varphi \wedge \chi$ dans $\tilde{\mathcal{O}}$ ne dépend que de la classe de ω dans $\tilde{\mathcal{O}}$.

L'application $D_t^{-1} : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$
 $[\omega = d \chi] \longmapsto [d_y \varphi \wedge \chi]$

ainsi définie est un homomorphisme de \mathcal{O}_X -modules, et l'on vérifie aisément qu'elle est injective (la notation D_t^{-1} sera justifiée par la suite).

Remarque 1 : $\mathcal{O} / D_t^{-1} \mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z/X}^k / d_y \varphi \wedge \mathcal{O}_{Z/X}^{k-1}$
 $= \mathcal{O}_Z / (\varphi'_{y_1}, \dots, \varphi'_{y_k}) \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X^\mu,$

où μ est le "nombre de Milnor" du germe de fonction φ_0 .

Cette remarque est la clef du théorème suivant :

Théorème 1 : \mathcal{O} est un $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$ module libre de rang μ , où

$\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$ est l'anneau des séries formelles

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r D_t^{-r} \in \mathcal{O}_X[[D_t^{-1}]]$$

telles que $\sum_{r=0}^{\infty} c_r \frac{T^r}{r!}$ définisse un germe de fonction holomorphe de x et de T .

L'analogie formel de ce théorème est facile à démontrer, et se trouve déjà dans Malgrange [3]. Le passage du "formel" au "convergent" (au sens de la convergence dans $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$) se fait par des majorations assez fines [5], dont l'idée revient également à Malgrange (qui les utilise dans un autre problème [4]).

2. Structure de $\tilde{\mathcal{G}}$ comme $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}/X}^{(0)}$ -module.

L'anneau $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$ peut s'interpréter dans $X \times \mathbb{C} \ni (x, t)$ comme un anneau d'opérateurs microdifférentiels d'ordre ≤ 0 (familles paramétrées par X d'opérateurs microdifférentiels $\sum c_r D_t^{-r}$ à coefficients constants). En permettant aux coefficients c_r de dépendre aussi de t on obtient l'anneau $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}/X}^{(0)}$ des familles d'opérateurs microdifférentiels d'une variable t (à coefficients quelconques).

L'action de $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$ sur $\tilde{\mathcal{G}}$ s'étend en une action de $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}/X}^{(0)}$ définie en identifiant t à la multiplication par $\varphi(x)$. $\tilde{\mathcal{G}}$ est ainsi un $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}/X}^{(0)}$ -module, dont la filtration évidente $\tilde{\mathcal{G}} \supset D_t^{-1}\tilde{\mathcal{G}} \supset D_t^{-2}\tilde{\mathcal{G}} \supset \dots$ est compatible avec la filtration naturelle de $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}/X}^{(0)}$. Le choix d'une base de $\tilde{\mathcal{G}}$ comme $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$ -module, possible grâce au théorème 1, permet d'identifier l'action de t à la multiplication à gauche par une matrice $A = A_0 + A_1 D_t^{-1} + A_2 D_t^{-2} + \dots$ (matrice $\mu \times \mu$ à coefficients dans $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$).

Exercice 2.1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice

$A_0 : \chi(A_0) = \det(t \mathbb{1} - A_0)$ a pour lieu des zéros l'ensemble

$$\Delta = \{(x, t) \in X \times \mathbb{C} \mid \exists y : \varphi'_{y_1}(x, y) = \dots = \varphi'_{y_k}(x, y) = 0, t = \varphi(x, y)\}$$

("lieu discriminant" de l'application $\phi : X \times Y \longrightarrow X \times \mathbb{C}$).

$$x, y \longmapsto x, \varphi(x, y)$$

Idée : le module $\tilde{\mathcal{G}} / D_t^{-1}\tilde{\mathcal{G}}$ a pour support l'ensemble critique Σ de l'application ϕ . Or ce module admet la présentation

$$\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}^{\mu} \xrightarrow{t \mathbb{1} - A_0} \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}^{\mu} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} / D_t^{-1}\tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow 0.$$

Exercice 2.2 Montrer que le $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}/X}^{(0)}$ -module $\tilde{\mathcal{G}}$ admet la présentation

$$\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)\mu} / \mathcal{X} \xrightarrow{t \mathbf{I} - A} \mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)\mu} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow 0.$$

Idée : ce résultat se déduit de la définition de A , moyennant un petit travail de substitution de séries convergentes (dans $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}/\mathcal{X}$), pour lequel il est utile de remarquer que la matrice $A_0(x)$ a toutes ses valeurs propres très petites pour $\|x\|$ assez petit (conséquence de l'exercice 2.1).

3. Structure de $\tilde{\mathcal{Q}}$ comme $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ -module

Soit maintenant $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ l'anneau des germes d'opérateurs microdifférentiels d'ordre ≤ 0 de l'espace $X \times \mathbb{C}$ dans la codirection $0 dx + 1 dt$: ces opérateurs peuvent être représentés par des séries formelles de monômes des variables $D_{x_1} D_t^{-1}, D_{x_2} D_t^{-1}, \dots, D_{x_n} D_t^{-1}, D_t^{-1}$, à coefficients dans $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}$, astreintes à une condition de convergence convenable (cf. l'exposé de Malgrange). Pour définir une structure de $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ -module sur $\tilde{\mathcal{Q}}$, il faut donc définir l'action des $D_{x_i} D_t^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Exercice 3.1. Vérifier que les formules

$$D_{x_i} D_t^{-1}[\omega] = D_t^{-1}[\partial_{x_i} \omega] - [\varphi'_{x_i} \cdot \omega]$$

remplissent toutes les conditions requises pour définir sur $\tilde{\mathcal{Q}}$ une structure de $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ -module. (On tâchera d'abord de dresser une liste aussi complète que possible des conditions requises!).

Vérifier que le support de ce $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ -module est le fibré conormal au lieu discriminant Δ .

Exemple : $\varphi = y^3 + xy$ ($n = k = 1$)

$\tilde{\mathcal{Q}} / D_t^{-1} \tilde{\mathcal{Q}} = \Omega_{\mathbb{Z}/\mathbb{X}}^1 / \mathcal{O}_{\mathbb{Z}} \cdot d_y \varphi$ admet comme $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ -module une base constituée par $[dy]$ et $[y dy]$. Dans cette base l'action de t sur $\tilde{\mathcal{Q}}$ s'identifie à la multiplication à gauche par $A_0 + A_1 D_t^{-1}$, où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2x}{3} \\ -\frac{2x^2}{9} & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On vérifie que $\chi(A_0) = \det(t \mathbb{1} - A_0) = t^2 + \frac{4}{27} x^3$ est l'équation du lieu discriminant Δ .

D'autre part l'action de $D_x D_t^{-1}$ s'identifie à la multiplication à gauche par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{x}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(Exercice : vérifier les affirmations précédentes) .

4. Déformations holonome d'un $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -module

Si nous essayons d'abstraire les résultats obtenus, nous sommes conduits à la notion de "déformation holonome d'un $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -module" : c'est la donnée d'un $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ -module holonome dont le gradué associé est libre sur $\mathcal{O}_X[\tau]$ et dont le support a pour seul point situé au-dessus de $(x=0, t=0)$ la codirection $0 dx + 1 dt$. On en déduit par une démonstration identique à celle du Théorème 1 que ce module est libre de type fini sur $\mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}$. Il admet alors comme $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}/X$ -module une présentation analogue à celle de l'exercice 2.2. : l'action de t s'identifie à la multiplication à gauche par une matrice

$$A = A_0 + A_1 D_t^{-1} + A_2 D_t^{-2} + \dots \quad (\text{matrice } \mu \times \mu \text{ à coefficients dans } \mathcal{O}_X\{\{D_t^{-1}\}\}).$$

De même la structure de $\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}}^{(0)}$ -module s'obtient en identifiant l'action de $D_{x_i} D_t^{-1}$ à la multiplication à gauche par une matrice

$$B^i = B_0^i + B_1^i D_t^{-1} + B_2^i D_t^{-2} + \dots$$

Exercice 4.1. Démontrer que chacune des matrices B^i ci-dessus doit être reliée à A par l'identité

$$[A, B^i] + \left(\frac{\lambda A}{\lambda x_i} + B^i \right) D_t^{-1} - \nabla B^i \cdot D_t^{-2} = 0$$

où $\nabla B^i = B_1^i + 2 B_2^i D_t^{-1} + 3 B_3^i D_t^{-2} + \dots$

Idée : calculer le commutateur $[t - A, D_{x_i} D_t^{-1} - B^i]$.

Problème : développer une théorie de la versalité des déformations holonomes.

Exercice 4.2 Montrer que l'équation différentielle scalaire $(t D_t - \sigma) u = 0$ (où $\sigma \in \mathbb{C}$) définit un $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -module stable par déformations holonomes (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 4.1).

Conjecture : si φ est une déformation verselle de φ_0 , sa connexion de Gauss-Manin est une déformation holonome verselle de celle de φ_0 .

Exemple : si φ_0 a une singularité quadratique non dégénérée (donc stable), sa connexion de Gauss-Manin est stable en vertu de l'exercice 4.2.

Exercice 4.3. Vérifier la conjecture sur d'autres exemples (ou bien donner un contre-exemple!).

Dans l'étude des déformations holonomes de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -modules, une attention toute particulière devrait être réservée aux $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -modules "réguliers" : nous entendons par là les $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -modules $\mathcal{M}^{(0)}$ tels que $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}'^{(0)}$, où $\mathcal{M}'^{(0)}$ est un $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ -module de type fini stable par $t D_t$ (cette notion est la traduction microlocale de la notion classique de "singularité régulière" d'un système différentiel ; un théorème célèbre de Brieskorn [1] garantit que la connexion de Gauss-Manin est à singularité régulière)

A tout $\mathcal{E}_C^{(0)}$ -module régulier on peut associer un "indicateur de croissance" β défini exactement comme l'exposant β de [6] (n°2.3) sauf que le module \mathcal{C}_0^∞ de [6] est remplacé par l'ensemble de toutes les microfonctions solutions de notre (micro)-système. Il est tentant de conjecturer que cet indicateur β est semicontinu inférieurement par toutes déformations holonomes du micro-système.

REMARQUE FINALE : (pour me faire pardonner par les physiciens de leur avoir infligé tout ce qui précède).

Il est difficile de ne pas être frappé par l'analogie entre les exposants β définis ci-dessus (ou dans [6]) et les "exposants critiques" de la théorie des transitions de phase.

J'ignore si la théorie des déformations holonomes de systèmes micro-différentiels (qui reste à faire!) est susceptible d'apporter des lumières sur les exposants critiques. Telle que je la vois pour le moment, cette théorie devrait être à la théorie de Thom (théorie des déformations de fonctions, ou théorie des catastrophes) ce que B.K.W. est à l'optique géométrique (cf. [6]).

APPENDICE

Nos données géométriques, qui se résument par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z = X \times Y & \xrightarrow{\quad \bar{\phi} \quad} & X \times C \\ x, y & \longrightarrow & x, \phi(x, y) \\ U & & U \\ \Sigma & \longrightarrow & \Delta \\ \text{(lieu critique)} & & \text{(lieu discriminant)} \end{array}$$

sont un cas particulier de la situation dans laquelle on définit la "connexion de Gauss-Manin locale" (d'une intersection complète à singularité isolée : cf. Saito [7], Greuel [2]).

1er point de vue

Soit $H = H^{k-1}(\Omega_{\Phi}^{\bullet})$

où Ω_{Φ}^{\bullet} désigne le complexe de De Rham relatif à la projection Φ ,

et soit $H(\Delta) = H \otimes_{\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}} \mathcal{O}(\Delta)$

où $\mathcal{O}(\Delta)$ désigne le faisceau des fonctions méromorphes sur $X \times \mathbb{C}$ à lieu polaire inclus dans Δ ; on met sur $H(\Delta)$ une structure de $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module (module sur l'anneau des opérateurs différentiels holomorphes) en posant

$$\begin{aligned} H(\Delta) &\longrightarrow H(\Delta) \\ D_t : [\chi] &\longmapsto \left[\frac{d_y \chi}{d_y \varphi} \right] \\ D_{x_i} : [\chi] &\longmapsto [\partial_{x_i} \chi] - \varphi'_{x_i} D_t [\chi] \end{aligned}$$

(exercice : vérifier que cette définition concorde avec celle de Greuel et Saito).

2ème point de vue

On pose $\mathcal{G} = \Omega_{Z/X}^k / d_y \varphi \wedge d_y \Omega_{Z/X}^{k-2}$, et l'on met sur $\mathcal{G}(\Delta) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}} \mathcal{O}(\Delta)$

une structure de $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Delta) &\longrightarrow \mathcal{G}(\Delta) \\ D_t : [\omega] &\longmapsto \left[d_y \left(\frac{\omega}{d_y \varphi} \right) \right] \\ D_{x_i} : [\omega] &\longmapsto [\partial_{x_i} \omega] - D_t [\varphi'_{x_i} \omega] . \end{aligned}$$

Cette structure de $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module provient de la précédente par l'isomorphisme

$$H(\Delta) \xrightarrow{d_y \varphi \wedge} Q(\Delta)$$

qui transforme $D_t H$ en Q .

Théorème : (cf. [2] ou [7]) Q est un $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}$ -module libre de rang μ si $k > 1$, et de rang $\mu + 1$ si $k = 1$.

La particularité du cas où $k = 1$ provient de ce qu'on a une injection

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}} &\longrightarrow Q = \Omega^1_{Z/X} \\ f(x, t) &\longmapsto f(x, \varphi(x, y)) d_y \varphi \end{aligned}$$

compatible avec la structure de $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module de $Q(\Delta)$. ($\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}$ est muni de sa structure évidente de $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module). On pourra se débarrasser de cette particularité en considérant le $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module "réduit"

$\tilde{Q}(\Delta) = \tilde{Q}_{X \times \mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}(\Delta)$ obtenu en divisant Q (ou $Q(\Delta)$) par l'image de cette injection lorsque $k = 1$, et en posant $\tilde{Q} = Q$ lorsque $k > 1$.

Lemme (facile) D_t est un isomorphisme dans $\tilde{Q}(\Delta)$.

Exercice : microlocalisons !

Vérifier que

$$\tilde{Q} \subset D_t \tilde{Q} \subset D_t^2 \tilde{Q} \subset \dots \quad (\subset \tilde{Q}(\Delta))$$

est une "bonne" filtration du $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module $\tilde{Q}(\Delta)$ (au sens de [8]).

En déduire que $\tilde{Q}(\Delta)$ a pour variété caractéristique le fibré conormal à Δ : on remarquera que ce fibré conormal s'identifie au lieu critique Σ par l'application

$$\begin{aligned} \Sigma &\longrightarrow P^*(X \times \mathbb{C}) \\ x, y &\longmapsto \left(x, \varphi(x, y) ; dt - \sum_1 \varphi'_{x_1} dx_1 \right). \end{aligned}$$

En déduire également, à l'aide du lemme précédent, que $\tilde{G}(\Delta)$ est "égal à son propre microlocalisé", c'est-à-dire que

$$\tilde{G}(\Delta) = \mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}} \tilde{G}(\Delta)$$

avec les abus de notation évidents (tous les faisceaux peuvent être "remontés" dans Σ).

Remarque : il est clair que l'opération de "réduction" est triviale après microlocalisation, puisque

$$\mathcal{E}_{X \times \mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}} \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}} = 0 \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Brieskorn : Die monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen
Manuscripta Math. 2. (1970) pp. 103-161
- [2] G.M. Greuel : Der Gauss-Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten
Math. Ann. 214 (1975) pp. 235-266
- [3] B. Malgrange : Intégrales asymptotiques et monodromie
Ann. Sc. Norm. Sup. 7 (1974) pp. 405-430
- [4] B. Malgrange : Frobenius avec singularités
(prétirage Grenoble 1975)
- [5] F. Pham : Caustiques, phase stationnaire et microfonctions à paraître dans Acta Scientiarum Vietnamicarum
- [6] F. Pham : Caustics and microfunctions à paraître dans Proc. of 1976 Uji Seminar on Algebraic Analysis (Kyoto)
- [7] K. Saito : Regularity of Gauss-Manin connection of a flat family of isolated singularities
in Quelques journées singulières (Ecole Polytechnique, Paris 1973)
- [8] Séminaire sur les opérateurs différentiels et pseudodifférentiels (exposés de M. Lejeune et B. Malgrange), Grenoble 1976.