Jean-Pierre Ferrier

Représentation intégrale et calcul fonctionnel

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1975, tome 22
« Exposés de : H. Araki, H.J. Borchers, J.P. Ferrier, P. Krée, J.F. Pommaret, D. Ruelle, R. Stora et A. Voros », , exp. n° 6, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1975__22__A6_0>

REPRESENTATION INTEGRALE ET CALCUL FONCTIONNEL

par Jean-Pierre Ferrier

0.- Introduction

Le calcul fonctionnel holomorphe individuel des algèbres de Banach est issu du théorème de représentation intégrale de Cauchy. Ce dernier a été généralisé à n dimensions par Fantappié, Leray, et un calcul fonctionnel holomorphe pluri-individuel y correspond (cf [10], [2], [5] par exemple). Notre point de départ sera une généralisation de ce calcul fonctionnel à des algèbres plus générales, pour lesquelles les spectres d'éléments ne sont plus compacts, due à L. Waelbroeck [9].

Commençons par donner deux exemples, tirés du mémoire de L. Waelbroeck, d'algèbres qui interviendront.

Exemple 1 : Soit une fonction $\delta \geqslant 0$ sur $\mathbf{C}^n$ telle que

1) $|\delta(z) - \delta(z')| \leq |z-z'|$ pour $z, z' \in \mathbf{C}^n$,

2) $\delta(z) = O(1/|z|)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini,

où l'on a posé $|z| = (\sum_{i=1}^{n} |z_i|)^{\frac{1}{2}}$ si $z = (z_1, \dots, z_n)$.

On note Ω l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ tels que $\delta(z) > 0$. On considère alors l'ensemble $\mathcal{C}(\delta)$ des fonctions numériques complexes f sur Ω telles que $\delta^N |f|$ soit uniformément bornée pour un certain entier naturel N. On vérifie aussi que $\mathcal{C}(\delta)$ est une algèbre contenant la fonction constante 1 et les fonctions coordonnées $z_1, \dots, z_n$. Cependant $\mathcal{C}(\delta)$ n'est pas une algèbre de Banach; c'est la réunion de la suite d'espaces de Banach ${}_N\mathcal{C}(\delta)$ obtenus en fixant dans la définition l'entier naturel N.

Nous utiliserons comme modèle de la théorie l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ des fonctions f de $\mathcal{C}(\delta)$ qui sont holomorphes dans Ω ; c'est la réunion de la suite ${}_N\mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta) \cap {}_N\mathcal{C}(\delta)$ d'espaces de Banach.

Les analystes fonctionnels savent, puisque les applications identiques ${}_N\mathcal{O}(\delta) \to {}_{N+1}\mathcal{O}(\delta)$ sont compactes, que la limite inductive localement convexe est un espace ultrabornologique et que les ensembles bornés de cette limite sont exactement ceux qui le sont dans un des ${}_N\mathcal{O}(\delta)$. Ces considérations sont toutefois inutiles; nous nous contenterons de retenir que dans cette algèbre est définie la notion de partie bornée : une partie B de $\mathcal{O}(\delta)$ est bornée si elle l'est dans un des ${}_N\mathcal{O}(\delta)$, i.e. s'il existe un entier naturel N et une constante positive M tels que $\delta^N|f| \leq M$ pour toute fonction f de B.

Comme cas particulier de poids δ, signalons la fonction δ_o définie par

$$\delta_o(z) = (1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}} ;$$

l'algèbre correspondante $\mathcal{O}(\delta_o)$ est celle des polynômes. Plus généralement, si Ω est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$, on pose

$$\delta_\Omega(z) = \operatorname{Min}\left[\delta_o(z),\ d(z, \complement\Omega)\right] ;$$

l'algèbre $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$ correspondante s'appelle algèbre des fonctions holomorphes à croissance polynomiale dans Ω.

Exemple 2 : On considère un espace vectoriel réel E de dimension n et dans son dual E^* un ensemble ouvert convexe Γ. Soit alors D l'adhérence dans E de l'ensemble des ξ tels que $\langle \xi, \xi^* \rangle$ soit minoré sur Γ.

On désigne par $A(\Gamma)$ l'ensemble des distributions u à son support dans D telles que pour tout $\xi^* \in \Gamma$, l'ensemble des distributions $e^{\langle x-t, \xi^* \rangle} u(x-t)$ soit borné dans $\mathcal{D}'(E)$ lorsque t parcourt E. On vérifie facilement que $A(\Gamma)$ est une algèbre pour la convolution contenant la distribution de Dirac δ et les dérivations partielles $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$.

Dans cette algèbre on a encore la notion de partie bornée: $B \subset A(\Gamma)$ est bornée si $e^{\langle x-t, \xi^* \rangle} u(x-t)$ est bornée dans $\mathcal{D}'(E)$ indépendamment de $t \in E$ et $u \in B$ (Rappelons qu'une partie β de $\mathcal{D}'(E)$ est bornée si chaque fois qu'on se donne un compact K de E et une suite $(M^p)_{p \geq 0}$ de nombres positifs, alors $\int u(x)\,\varphi(x)\,dx$ est borné indépendamment de $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ à support dans K vérifiant $|D^p \varphi| \leq M_p$ et de $u \in \beta$). Ce n'est pas une algèbre de Banach, mais elle possède la propriété :

(C) chaque partie bornée B est contenue dans une autre B' qui est convexe équilibrée et telle que l'espace vectoriel $E_{B'}$, engendré par B', muni de la jauge de B', soit un espace de Banach.

Il suffit de définir B' comme l'ensemble des $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $x_i \in B$ et $\sum_{i \in I} |\lambda_i| \leq 1$. Alors $A(\Gamma)$ apparaît comme réunion des espaces de Banach $E_{B'}$.

1.- Théorie spectrale

Nous appellerons b-algèbre une algèbre sur $\mathbf{C}$ dans laquelle on a défini une notion d'ensemble borné pour laquelle la propriété (C) soit vérifiée et l'ensemble des parties bornées contienne les points, soit héréditaire à gauche et stable par réunions finies, homothéties et produits finis.

Il s'agit donc simplement d'une réunion d'espaces de Banach avec certaines propriétés. L'essentiel est que l'on puisse intégrer les fonctions à valeurs dans une telle algèbre.

Pour toute la suite A désignera une b-algèbre commutative à unité et $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de A^n. Le spectre (joint ou simultané) de $(a_1, \ldots, a_n)$ est l'ensemble des $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que l'idéal $(a_1 - s_1)A + \ldots + (a_n - s_n)A$ ne contienne pas 1 (si $n = 1$, c'est le complémentaire de l'ensemble des $s \in \mathbf{C}$ tels que $a - s$ soit inversible). Cette notion est cependant insuffisante pour construire un calcul symbolique, car en l'absence de continuité de l'inverse, on a besoin de davantage d'information pour les points s du complémentaire du spectre.

On considère d'abord l'ensemble $\sigma(a)$ des parties S de $\mathbf{C}^n$ telles que l'on puisse trouver des fonctions bornées $u_1, \ldots, u_n$ de $\complement S$ dans A pour lesquelles

$$(a_1 - s_1)\, u_1(s) + \ldots + (a_n - s_n)\, u_n(s) \quad = \quad 1$$

si $s \in \complement S$.

Il est facile de voir que $\sigma(a)$ est un filtre sur $\mathbf{C}^n$ dont l'intersection est le spectre usuel. Dans le cas où A est une algèbre de Banach, c'est le filtre des voisinages du spectre. Au contraire si par exemple $A = \mathcal{O}(\delta_D)$ où D est le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ et $a = z$, alors $D \in \sigma(a)$ et $\sigma(a)$ est le filtre des parties contenant l'ouvert D.

Cette notion est suffisante pour développer un calcul fonctionnel holomorphe, mais nous aurons besoin de préciser encore. On définit pour cela l'ensemble $\Delta(a)$ des fonctions $\varphi \geq 0$ sur $\mathbf{C}^n$ telles que l'on puisse trouver des fonctions bornées $u_0, \ldots, u_n$ de $\mathbf{C}^n$ dans A pour lesquelles

$$(*) \qquad (a_1 - s_1)\, u_1(s) + \ldots + (a_n - s_n)\, u_n(s) + \quad (s)\, u_0(s) \quad = \quad 1$$

si $s \in \mathbf{C}^n$.

La relation avec ce qui précède est simple : si $\varphi \in \Delta(a)$, alors l'ensemble des z où $\varphi(z) \neq 0$ est dans $\sigma(a)$; inversement si $S \in \sigma(a)$, la fonction caractéristique χ_S de S est dans $\Delta(a)$. Cependant la nouvelle relation indique plus : $\varphi(s)$ représente une "distance" entre la fonction 1 et l'idéal $(a_1 - s_1)A + \ldots + (a_n - s_n)A$; la rapidité avec laquelle $\varphi(s)$ peut tendre vers zéro au voisinage de certains points apporte une information sur l'algèbre.

Nous aurons besoin par la suite d'un certain nombre de propriétés concernant $\Delta(a)$:

a) La fonction δ_0 appartient à $\Delta(a)$.

b) Si φ, φ' sont dans $\Delta(a)$, alors $\mathrm{Min}(\varphi, \varphi')$ l'est aussi.

c) Si $\varphi \in \Delta(a)$ et $\varphi' \geq \varepsilon\varphi^N$ pour $\varepsilon > 0$ et N entier, alors $\varphi' \in \Delta(a)$.

d) Si $\varphi \in \Delta(a)$, il existe $\varphi' \leq \varphi$ dans $\Delta(a)$ telle que $|\varphi(z) - \varphi(z')| \leq |z - z'|$ pour $z_1 z' \in \mathbf{C}^n$.

La propriété a) résulte de l'identité $\langle a - s, U(s)\rangle + Y(s) = 1$ où

$$U(s) = -\bar{s}\ (1 + |s|^2)^{-1} \ ,$$

$$Y(s) = \langle 1 + a, \bar{s}\rangle\ (1 + |s|^2)^{-1}.$$

On en déduit que si l'on peut trouver des fonctions $u_0, \ldots, u_n$ de $\mathbf{C}^n$ dans A à croissance polynomiale vérifiant (*) , alors $\varphi \in \Delta(a)$. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} 1 &= \langle a - s, U(s)\rangle + Y(s)\left[\langle a - s, u(s)\rangle + \varphi(s)\, u_0(s)\right] \\ &= \langle a - s, U(s) + Y(s)\, u(s)\rangle + \varphi(s)\, Y(s)\, u_0(s). \end{aligned}$$

Les nouveaux coefficients ont maintenant une croissance plus lente que les précédents; on recommence l'opération jusqu'à l'obtention de coefficients bornés.

La propriété b) se voit aussitôt. La propriété c) est claire pour N = 1; il suffit de voir que $\varphi^N \in \Delta(a)$ dès que $\varphi \in \Delta(a)$, et d'élever pour cela ([1]) à la puissance N en redistribuant les termes. En effet pour vérifier d) on introduit la fonction $\tilde{\varphi}$ donnée par

$$\tilde{\varphi}(s) = \inf_{s' \in \mathbf{C}^n} \left\{|s - s'| + \varphi(s)\right\}.$$

Il s'agit de voir que si $\varphi \in \Delta(a)$, alors $\tilde{\varphi} \in \Delta(a)$. Or de (*), on tire

$$\langle a - s, u(s')\rangle + \langle s - s', u(s')\rangle + \varphi(s')\, u_0(s') = 1,$$

soit

$$\langle a - s, u(s')\rangle + \left\{|s - s'| + \varphi(s')\right\} u_0'(s') = 1$$

où $u_0'(s') \in B$, dès que B est convexe équilibré et contient les images de $u_0, \ldots, u_n$. En choisissant alors s_p' tel que $\tilde{\varphi}(s) \leq |s - s_p'| + \varphi(s_p') + 2^{-p}$, on obtient,

$$<a-s,\ u(s'_p)> + \tilde{\varphi}(s)\, u''_0(s'_p) + 2^{-p}\, u''_0(s'_p) = 1,$$

où $u''_0(s'_p) \in B$. Le seul problème est de montrer que l'on peut passer à la limite quand p tend vers l'infini. On emploie pour cela un procédé sommatoire qui consiste, si x_p désigne la somme des deux premiers termes et y_p le dernier, à écrire

$$x_{p+1} - x_p = x_{p+1}\, y_p - x_p\, y_{p+1} ,$$

ce qui établit la convergence de la série $\sum_{p=0}^{\infty} (x_{p+1} - x_p)$, puisque $y_p = O(2^{-p})$.

Il résulte en particulier de ce qui précède que si $S \in \sigma(a)$, alors la fonction δ_{S^o} est dans $\Delta(a)$. D'autre part $\Delta(a)$ possède une "base" de fonctions qui vérifient les propriétés 1) et 2) de l'exemple 1). Si δ est une telle fonction, alors $\mathcal{O}(\delta)$ est définie et on construit un homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{O}(\delta)$ dans A qui envoie 1 sur 1 et la fonction coordonnée z_i sur l'élément a_i. Ce morphisme est le calcul fonctionnel holomorphe; si $f \in \mathcal{O}(\delta)$, on note $f[a]$ l'image de f.

2.- Calcul de Heaviside

On reprend ici la situation de l'exemple 2), et on identifie E et E^* à $\mathbb{R}^n$; on s'intéresse à l'algèbre $A(\Gamma)$ et à l'élément $\partial = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ de $[A(\Gamma)]^n$. Alors

Proposition.- <u>L'ensemble</u> $S = \Gamma + i\,\mathbb{R}^n$ <u>est dans</u> $\sigma(\partial)$.

On en déduit un homomorphisme de $\mathcal{O}(\delta_S)$ dans $A(\Gamma)$ qui est le calcul symbolique de Heaviside par rapport aux opérateurs de dérivation partielle. Cet exemple est l'une des justifications de la théorie de L. Waelbroeck.

Pour établir la proposition nous utiliserons seulement le

Lemme.- <u>Soient</u> $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$ <u>et</u> $\tau \in \mathbb{C}$, $\tau \neq 0$. <u>Si</u> $<\xi, \xi^*> - \operatorname{Re}\tau \geqslant 0$ <u>pour tout</u> $\xi^* \in \Gamma$, <u>alors</u> $<\xi, \partial> - \tau\delta$ <u>est inversible dans</u> $A(\Gamma)$ <u>et son inverse est borné indépendamment de</u> ξ, τ.

L'inverse de $<\xi, \partial> - \tau\delta$ est formellement la mesure $u_{\xi,\tau}$ définie par

$$u_{\xi,\tau}(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda\xi)\, e^{\lambda\tau}\, d\lambda .$$

On vérifie d'abord que $u_{\xi,\tau}$ a son support dans D; de plus la masse totale de $e^{<x,\xi^*>} u_{\xi,\tau}(x)$ est majorée par le nombre

$$\{<\xi,\ \xi^*> - \operatorname{Re}\tau\}^{-1} ,$$

qui est l'inverse de la distance de ξ^* à l'hyperplan $<\xi , \xi^*> - \mathrm{Re}\, \tau = 0$ de E^*; puisque cet hyperplan ne rencontre pas Γ , le nombre en question est majoré par l'inverse de la distance de ξ^* au complémentaire de Γ , ce qui achève la démonstration du lemme.

La proposition découle alors facilement; si $s = \xi_o^* + i\eta_o^* \notin \Gamma + i\mathbb{R}^n$, on peut trouver $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, tel que

$$<\xi , \xi^*> \, > \, <\xi , \xi_o^*>$$

quel que soit $\xi^* \in \Gamma$. Si alors $\tau = <\xi , s>$, on a $<\xi , \xi^*> - \mathrm{Re}\,\tau \geqslant 0$, de sorte que $<\xi , \partial> - \tau\delta$ admet pour inverse $u_{\xi,\tau}$ qui est borné indépendament de s. La démonstration se termine en remarquant que

$$<u_{\xi,\tau}\xi , \partial - s\delta> = u_{\xi,\tau}\{<\xi , \partial> - \tau\delta\} = \delta \quad .$$

3.- Construction du calcul fonctionnel holomorphe

Soit $\delta \in \Delta(a)$ vérifiant les propriétés 1) et 2) de l'exemple 1). L'idée est d'écrire pour $f \in \mathcal{O}(\delta)$ la relation

$$(^2) \quad f[a] = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n n! \int_{\mathbf{C}^n} f(s)\, d''u_1(s) \wedge \ldots \wedge d''u_n(s) \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n ,$$

formule qui s'obtient en transformant par la formule de Stokes la formule de Cauchy-Fantappié-Leray. Naturellement cela n'aura de sens que si les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ sont assez régulières pour que l'on puisse les différentier et si la forme différentielle $d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''u_n$ décroît assez vite au bord de Ω pour compenser la croissance éventuelle de f; il resterait encore à établir que l'élément $f[a]$ ainsi défini ne dépend pas du choix des fonctions auxiliaires $u_1, \ldots, u_n$. Nous nous contenterons de donner des indications sur les deux premiers points.

Régularisation des coefficients. Le fait que $\delta \in \Delta(a)$ se traduit par l'existence de fonctions $u_1, \ldots, u_n$, y de $\mathbf{C}^n$ dans A d'une part vérifiant

$$(^3) \qquad <a-s, u(s)> + y(s) = 1$$

pour tout point s de $\mathbf{C}^n$ et d'autre part telles que $u_1, \ldots, u_n$ soient bornées et que $y(s) = O(\delta(s))$. Pour trouver des coefficients différentiables, on utilise des partitions de l'unité. Partons d'une fonction φ indéfiniment différentiable à support compact sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\sum_t \varphi(s+t) \equiv 1$, la sommation étant étendue à l'ensemble des points $t \in \mathbb{Z}^n + i\mathbb{Z}_1^n$. Pour tout entier p, nous posons

$$U_p(s) = \sum_t \varphi(2^p t - s)\, u(2^{-p} t)$$

et

$$Y_p(s) = \sum_{\delta(t) > C\,\delta^{-p}} (2^p t - s)\; y(2^{-p} t),$$

où C est une constante suffisamment grande. Définissons enfin W_p par

$$(4) \qquad \langle 1 - s,\, U_p(s)\rangle + Y_p(s) + W_p(s) = 1.$$

Une vérification facile donne les estimations suivantes

$$\begin{cases} U_p(s) = O(1) \\ Y_p(s) = O(\delta(s)) \\ W_p(s) = O(2^{-p}) \end{cases},$$

alors que pour toute dérivation partielle D d'ordre 1, il vient:

$$\begin{cases} (DU_p)(s) = O(2^p) \\ (DY_p)(s) = O(2^p) \\ (DW_p)(s) = O(2^p) \end{cases}.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir des coefficients différentiables par un procédé sommatoire convenable. Elevons pour cela la relation (4) à la puissance 4; en renommant les coefficients, il vient

$$\langle a - s,\, U_p(s)\rangle + Y_p(s) + W_p^4(s) = 1,$$

où U_p, Y_p vérifient les mêmes estimations que précédemment alors que les dérivées d'ordre 1 de $W_p^4(s)$ sont maintenant des $O(2^{-2p})$. En désignant alors par x_p la somme des deux premiers termes de la précédente relation, on vérifie facilement que

$$x_{p+1} - x_p = O(2^{-p}),$$

ce qui permet le passage à la limite cherchée.

<u>Convergence de l'intégrale</u>. Reprenons la relation (3) dans laquelle les fonctions $u_1, \ldots, u_n$, y sont maintenant supposées avoir des dérivées bornées. En élevant cette relation à la puissance N, on se ramène aussitôt au cas où

$$y = O(\delta^N(s))$$

et

$$Dy = O(\delta^{N-1}(s)),$$

pour toute dérivation partielle D d'ordre 1. Dans ces conditions, on peut écrire

$$\begin{aligned} d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''u_n &= \left[\langle a-s, u\rangle + y\right] d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''u_n \\ &= y\, d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''u_n \\ &\quad + u_1\, d''\left[(a_1-s_1)u_1\right] \wedge d''u_2 \wedge \ldots \wedge d''u_n + \ldots \\ &\quad + u_n d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''\left[(a_n-s_n)u_n\right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est un $O(\delta^N)$; le second peut, compte tenu de (^{3}) s'écrire

$$-u_1\, d''y \wedge d''u_2 \wedge \ldots \wedge d''u_n \ ,$$

et est donc un $O(\delta^{N-1})$; il en est de même pour les autres. Par conséquent, si N est assez grand, la forme

$$f\, d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''u_n \ ,$$

se prolonge continûment par 0 hors de Ω ; on peut même la rendre intégrable sur $\mathbf{C}^n$.

Il faut noter que $f[a]$ peut encore être défini par la relation

$$f[a] = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \frac{(n+k)!}{k!} \int_{\mathbf{C}^n} f\,(y^k)\, d''u_1 \wedge \ldots \wedge d''u_n \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \ ,$$

valable cette fois-ci pour k assez grand.

4. Représentation intégrale.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où A est une algèbre du type $\mathcal{O}(\delta)$ et où $a_i = z_i$, $i=1,\ldots,n$. On s'attend à ce que dans certains cas, la fonction δ soit dans $\Delta(z)$; le calcul fonctionnel holomorphe sera alors l'application identique de $\mathcal{O}(\delta)$, ce qui donnera une représentation intégrale des fonctions de $\mathcal{O}(\delta)$. Une condition suffisante, qui n'est pas loin d'être nécessaire est donnée par l'énoncé suivant dû à I. Cnop [1] :

Théorème.- Si $-\log\delta$ est plurisousharmonique sur Ω , alors $\delta \in \Delta(z)$.

La démonstration nécessite l'utilisation des estimations de type L^2 de L. Hörmander pour la d"-cohomologie [4] . Un corollaire est la

Proposition 1.- Si Ω est pseudoconvexe, alors $\Omega \in \sigma(z)$.

En effet, Ω est pseudoconvexe si et seulement si $-\log \delta_\Omega$ est plurisousharmonique, et cela presque par définition.

Nous allons étudier un cas un peu plus général, à savoir celui où Ω , sans être nécessairement pseudoconvexe, possède une enveloppe d'holomorphie $\widehat{\Omega}$ qui est un domaine de $\mathbf{C}^n$. Nous définissons alors une fonction $\hat{\delta}$ sur $\widehat{\Omega}$ en prenant pour $-\log \hat{\delta}$ la plus grande minorante plurisousharmonique de $-\log \delta$ sur $\widehat{\Omega}$ (qui est la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure des fonctions plurisousharmoniques sur $\widehat{\Omega}$ qui minorent $-\log \delta$). On peut alors énoncer la

Proposition 2.- <u>La fonction</u> $\hat{\delta}$, <u>prolongée par zéro hors de</u> $\widehat{\Omega}$, <u>vérifie les conditions</u> 1), 2) <u>de l'exemple</u> 1. <u>De plus les algèbres</u> $\mathcal{O}(\delta)$ <u>et</u> $\mathcal{O}(\hat{\delta})$ <u>sont identiques</u>.

En particulier $\hat{\delta} \in \Delta(z)$.

Toute la difficulté consiste à prouver que $\hat{\delta}$ vérifie la condition de Lipschitz 1); cela revient aussi à prouver que les opérations $\sim$ et $\wedge$ commutent. Or il se trouve qu'il en est ainsi sur tout ouvert pseudoconvexe. De façon précise:

Lemme.- <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert pseudoconvexe de</u> $\mathbf{C}^n$ <u>et</u> φ <u>une fonction positive sur</u> Ω ; <u>on note</u> $\tilde{\varphi}$ <u>la plus grande minorante de</u> φ <u>qui soit nulle hors de</u> Ω <u>et vérifie la condition de Lipschitz</u> 2); <u>on définit d'autre part</u> $\widehat{\varphi}$ <u>en prenant pour</u> $-\log \widehat{\varphi}$ <u>la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure des minorantes plurihypoharmoniques de</u> $-\log \varphi$.

<u>Alors les opérations</u> $\sim$ <u>et</u> $\wedge$ <u>commutent</u>; <u>en particulier</u>

a) <u>si</u> $-\log \varphi$ <u>est plurihypoharmonique</u> (resp. <u>plurisousharmonique</u>) <u>sur</u> Ω , <u>alors</u> $-\log \tilde{\varphi}$ <u>l'est aussi</u>;

b) <u>si</u> φ , <u>prolongée par</u> 0 <u>hors de</u> Ω , <u>vérifie la condition de Lipschitz</u> 1), <u>alors</u> $\widehat{\varphi}$, <u>prolongée par</u> 0, <u>le vérifie aussi</u>.

On se ramène pour cela à prouver le point a) et on introduit l'ouvert Ω_1 de $\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}$ des points (s, t) tels que $|t| < \varphi(s)$. On vérifie facilement que Ω_1 est pseudoconvexe et que si $\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}$ est muni de la norme $(s, t) \mapsto |s| + |t|$, alors

$$\tilde{\varphi}(s) = d((s, 0), \complement \Omega_1).$$

En particulier, $-\log \tilde{\varphi}$ est plurisousharmonique.

5.- <u>Convexité holomorphe</u>

On déduit aussitôt de la proposition 1 le

Corollaire.- <u>Si</u> Ω <u>est un ouvert pseudoconvexe de</u> $\mathbf{C}^n$, <u>alors</u> Ω <u>est le domaine d'existence d'une fonction de</u> $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$.

Il suffit de montrer qu'en tout point s du bord de Ω , il existe une fonction de $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$ qui ne peut pas se prolonger au voisinage de ce point. Raisonnons par l'absurde en supposant que chaque fonction de $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$ puisse se prolonger au voisinage de s. D'après la proposition 1, il existe des fonctions $z \longmapsto u_1(s, z), \ldots, z \longmapsto u_n(s, z)$ dans $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$ telles que

$$\langle z-s, u(s, z)\rangle = 1 .$$

Si ces fonctions peuvent être prolongées au voisinage de s, la relation se prolonge et l'on obtient une absurdité pour $z = s$.

Par conséquent l'enveloppe d'holomorphie d'un domaine Ω tel que $\widehat{\Omega}$ soit un domaine de $\mathbf{C}^n$ peut s'obtenir à partir des fonctions de $\mathcal{O}(\delta_{\widehat{\Omega}})$ et a fortiori à partir des fonctions de $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$.

Pour des résultats plus fins, on renvoie à P. Pflug [6] . Signalons tout de même que ces énoncés peuvent également se déduirent d'un résultat de H. Skoda [8] qui est le suivant:

<u>Soient</u> Ω <u>un ouvert pseudoconvexe de</u> $\mathbf{C}^n$, ψ <u>une fonction plurisous-harmonique dans</u> Ω <u>et</u> $g_1, \ldots, g_p$ <u>des fonctions holomorphes dans</u> Ω . <u>On pose</u> $q = \inf(n, p-1)$ <u>et on choisit</u> $\alpha > 1$. <u>Alors pour toute fonction</u> f <u>holomorphe dans</u> Ω <u>et telle que</u>

$$\int_\Omega |f|^2 \, |g|^{-2\alpha q - 2} \, e^{-\psi} d\lambda < +\infty ,$$

<u>où</u> $d\lambda$ <u>est la mesure de Lebesgue dans</u> $\mathbf{C}^n$, <u>il existe des fonctions</u> $h_1, \ldots, h_p$ <u>holomorphes dans</u> Ω <u>telles que</u>

$$f = \langle g, h\rangle$$

<u>et</u>

$$\int_\Omega |h|^2 \, |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 \, |g|^{-2\alpha q - 2} \, e^{\psi} \, d\lambda .$$

Pour obtenir par exemple la proposition 1, on se place dans le cas où $\psi = -N \log \delta_\Omega$, où g_i est la fonction $z \longmapsto z_i - s_i$ qui dépend du paramètre $s \notin \Omega$ et où $f = 1$. Dans ce cas $q = n-1$ et $|g|$ est minoré par δ_Ω ; on choisit alors N assez grand pour que

$$\int |z-s|^{-2\alpha q - 2} \, \delta_\Omega^N(z) \, d\lambda(z) \leq C < +\infty .$$

Il en résulte l'existence de fonctions $z \longmapsto u_i(s, z)$ vérifiant

$$1 = \langle z-s, u(s, z)\rangle$$

et

$$\int_{\Omega} |u(s, z)|^{2} \; |z - s|^{-2\alpha q} \; \delta_{\Omega}^{N}(z) \, d\lambda(z) \; \leqslant \; \frac{\alpha}{\alpha - 1} \, C \; .$$

En utilisant alors les propriétés de moyenne des fonctions holomorphes, il est facile d'établir l'existence de constantes C', N' telles que

$$|u(s, z)| \; \delta_{\Omega}^{N'} \leqslant C' \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

[1] CNOP (I.).- Spectral study of holomorphic functions with bounded growth; Ann. Inst. Fourier,

[2] FANTAPPIE (L.).- Ann. Mat. Pura. Appl. 22 (1943).

[3] FERRIER (J.-P.).- Spectral theory and complex analysis; North-Holland mathematics studies n°4, Amsterdam (1973).

[4] HORMANDER (L.).- L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator, Acta Math. 113 (1965), p. 89-152.

[5] LERAY (J.).- Fonction de variable complexe; sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires; R. C. Acad. Lincei, (8) 20 (1956), 589-590.

[6] PFLUG (P.).- Eigenschaften der Fortstzungen von in speziellen Gebieten holomorphen polynomialen Funktionen in die Holomorphiehülle; thèse, Göttingen (1972).

[7] SIBONY (N.).- Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées; C.R. Acad. Sci. Paris 273 (1971), p. 503-505.

[8] SKODA (H.).- Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids; Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, 4ème série, 5 (1972), p. 545-579.

[9] WAELBROECK (L.).- Etude spectrale des algèbres complètes; Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém., (1960).

[10] WEIL (A.).- L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables; Math. Ann. 111 (1935).

Université de Nancy I
Sciences Mathématiques
Case Officielle 140
54037 - NANCY Cedex