Jacques Carmona

Représentations des groupes de Lie d'après B. Kostant

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 16
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. n° 2, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__16__A2_0>

REPRESENTATIONS DES GROUPES DE LIE

D'APRES B. KOSTANT

par

Jacques CARMONA

I . INTRODUCTION .

Depuis qu'ils ont entrepris l'étude des représentations unitaires de dimension infinie des groupes localement compacts (Bargmann V [1] et Naimark M.A. [1] et [2]) les chercheurs ont essayé de proposer des méthodes permettant de construire un grand nombre de représentations et, si possible, d'obtenir des critères d'irréductibilité et des méthodes de décomposition. Le but poursuivi est la détermination de toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes étudiés.

Dans ce domaine, l'outil de base est la théorie des représentations induites (Mackey G.W. [1] et [2]) ; étant donnés un groupe localement compact séparable G, un sous groupe fermé Γ et une représentation unitaire χ de Γ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ on construit la représentation unitaire induite U^{χ} sur l'espace $\mathcal{H}^{\chi}$ des fonctions mesurables $f : G \to \mathbb{C}$ qui vérifient :

(I,1) $f(g\,a) = \chi\,(a)^{-1}\,f(g)$; $(g \in G,\ a \in \Gamma)$,

(I,2) $\int_{G/\Gamma} \|f(p)\|^2\, d\,\mu\,(p) < +\infty$ (μ = mesure quasi-invariante sur G/Γ et $\|.\|$ = norme sur $\mathcal{H}$)

(I,3) $U^{\chi}\,(g)\,f\ \ (p) = f\,(g.p)\,\left(\frac{d\mu(g.p)}{d\mu\ (p)}\right)^{\frac{1}{2}}$, $(g \in G,\ p \in G/\Gamma)$.

En fait, on n'utilise que la structure de groupe localement compact ; même dans le cadre de cette théorie, il est nécessaire lorsqu'on étudie un groupe de Lie G, d'utiliser les propriétés de la structure de variété différentiable de G . Dans sa thèse, M.F. Bruhat ([1]) utilise les propriétés de nucléarité de certains espaces de fonctions différentiables sur G et leur applique le théorème des noyaux. Il obtient ainsi des critères d'irréductibilité plus précis et il peut construire des représentations (séries complémentaires des groupes de Lie semi-simples) qui n'entraient pas dans le schéma initial de Mackey. Les résultats ainsi obtenus permettent de traiter complètement le cas de certains groupes connexes comme les groupes nilpotents ou, dans une moindre mesure, les groupes semi-simples complexes. La situation est moins satisfaisante pour les groupes semi-simples réels ou les groupes résolubles, même losqu'on se limite aux groupes résolubles de type I .

Essayons "d'expliquer" intuitivement les raisons de cette situation. La théorie des représentations induites est intéressante si :
- On peut choisir un sous-groupe fermé inducteur Γ assez "gros" pour que l'espace $\mathcal{H}^{\chi}$ soit "petit" et la représentation induite irréductible.

- On peut, parmi les représentations χ de Γ , choisir suffisamment de représentations "simples" χ , par exemple des représentations de dimension un que nous utiliserons systématiquement par la suite. Pour cela, il faut que la structure algébrique de Γ ne soit pas trop "compliquée" (par exemple si Γ est abélien, ou nilpotent en un produit semi-direct d'un groupe abélien et d'un groupe nilpotent).

Exemple :

On désigne par G un groupe de Lie semi-simple connexe réel, par A un sous-groupe de Cartan de G , par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}$ leurs algèbres de Lie respectives, par $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P}$ une décomposition de Cartan de $\mathcal{G}$ associée à une conjugaison compacte ι telle que $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ ($\mathcal{K}$ = ensemble de points fixes de ι).

On note E_c le (respment. la) complexité (e) d'un sous-espace (respmt. d'une sous-algèbre) E de $\mathcal{G}$, $\Delta \subset (\mathcal{A}_c)'$ l'ensemble des racines de $\mathcal{G}_c$ relativement à $\mathcal{A}_c$, Δ^+ l'ensemble des racines positives pour un ordre convenablement choisi sur Δ (voir Harish Chandra [1] p. 212). A tout élément $\alpha \in \Delta$ on associe un vecteur non nul $x_\alpha \in \mathcal{G}_c$ défini à une constante complexe près par la relation : $[h, x_\alpha] = \alpha(h)\, x_\alpha$, $(h \in \mathcal{A}_c)$. Si N' est le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathcal{N}' = \left(\sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathbb{C}\, x_\alpha\right) \cap \mathcal{G}$ et si M est le centralisateur de $\mathcal{A}_p = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ dans K sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathcal{K}$, on choisit habituellement $\Gamma = A_p\, M\, N'$ où $A_p = \mathrm{Exp}\,(\mathcal{A}_p)$. Si $\mathcal{A}_p$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathcal{P}$ (ce qui est toujours le cas si G est un groupe semi-simple complexe), la représentation U^{χ} est irréductible pour presque tous les caractères unitaires χ (on peut même construire U^{χ} unitaire irréductible pour certains caractères non unitaires χ). Si $\mathcal{A}_p$ n'est pas abélienne maximale dans $\mathfrak{P}$ (cas général des groupes de Lie semi-simples réels connexes), M (qui est réductif) est trop "gros", et la structure de $\underline{\Gamma}$ est trop compliquée ; si on remplace MA_p par A,Γ est trop "petit".

Pour remplacer l'espace $\mathcal{H}^{\chi}$ par un sous-espace invariant fermé, plus petit, on complète la condition d'invariance globale (I,1) par une condition d'invariance infinitésimale obtenue de la façon suivante :

à tout élément x de $\mathcal{G}$ (et même de $\mathcal{G}_c$ par $\mathbb{C}$ - linéarité) on associe l'opérateur différentiel $r(x)$ sur G défini pour f de classe C^1 dans un voisinage de $g \in G$ par : (I,4) $(r(x)f)(g) = \frac{d}{dt} f\,(g\,e^{tx})\big|_{t=o}$. Si $\tilde{\mathcal{F}}_c$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}_c$, invariante par $Ad\Gamma$ (où $g \to Adg$ est la représentation adjointe de G dans $\mathcal{G}$ prolongée à $\mathcal{G}_c$), et contenant l'algèbre de Lie $\mathcal{C}$ de Γ , l'espace $\mathcal{H}^{\chi}$ est formé de fonctions f qui vérifient la condition :

$$\text{(I,5)} \quad r(x)\, f = l(x) f \quad , \quad (x \in \tilde{\mathcal{F}}_c) \quad , \quad \text{où} \quad l \in (\tilde{\mathcal{F}}_c)'.$$

Si $x = y + \sqrt{-1}\, z \longrightarrow \bar{x} = y - \sqrt{-1}\, z$, ($y$ et $z \in \mathcal{G}$), est la conjugaison de $\mathcal{G}_c$ définie par $\mathcal{G}$, on suppose que $\tilde{\mathcal{F}}_c + \bar{\tilde{\mathcal{F}}}_c$ est une sous algèbre de $\mathcal{G}_c$ de telle sorte que, si $X = G/\Gamma$ est l'espace quotient et $\theta : G \to X$ l'application canonique, l'image par la différentielle θ_* de θ de $r\,(\tilde{\mathcal{F}}_c)$ est une distribution involutive sur X, invariante par l'action de G .

Plus récemment, une deuxième idée, dûe à Kirillov (voir [1]) s'est révélée particulièrement fructueuse : la différentielle l d'un caractère unitaire χ de Γ définit une forme linéaire réelle $f = (2\pi\sqrt{-1})^{-1}\, d\,l$ sur vérifiant la condition :

$$(I,6) \quad < f, [\mathcal{C},\mathcal{C}] > = 0 .$$

Si f peut se prolonger en une forme linéaire, notée encore f, sur $\mathcal{G}$ vérifiant

$$(I,7) \quad < f, [\mathcal{C},\mathcal{G}] > = 0 ,$$

on obtient une condition qui s'interprète à partir de la représentation contragrédiente $(g,f) \to {}^t(\mathrm{Ad}\, g^{-1})\,(f) = \rho(g)\,(f)$, $(g \in G,\ f \in \mathcal{G}')$, de la façon suivante ; $\mathcal{C}$ est contenu dans l'algèbre $\mathcal{G}_f$ du centralisateur G_f de f dans G relativement à f. Kirillov a remarqué que si $X = G/\Gamma$ et $\theta : G \to X$ est l'application canonique, il existe une 2- forme fermée invariante par G et une seule ω sur X vérifiant : $\theta^*(\omega) = d\,f$ de plus, ω définit sur X une structure symplectique invariante par l'action de G.

Nous allons résumer les résultats fondamentaux de Géométrie Différentielle utilisée par Kostant dans sa théorie de la Quantification. On précisera les résultats qui, combinés aux travaux récents de Auslander et Moore (voir [1]) ont permis à Auslander et Kostant d'obtenir les résultats annoncés en [1] .

II . VARIETES SYMPLECTIQUES .

1 . Définition II.1.

On appelle variété simplectique le couple (X,ω) formé d'une variété différentiable X (supposée paracompacte) et d'une 2-forme réelle ω fermée et non singulière sur X .

On utilise les notations suivantes :

- X_p : plan tangent à X en un point $p \in X$;
- $X_p^c = X_p + \sqrt{-1}\, X_p$: son compléxifié ;
- $\Omega^k(X)$: espace des k formes différentiables sur X (à valeurs complexes) ;
- $\mathcal{U}(X)$: espace des champs de vecteurs différentiables sur X (à valeurs complexes).

Alors, la valeur ω_p de ω en $p\in X$ est une forme antisymétrique sur X_p^c et

- ω est réelle si, pour tout $p\in X$, ω_p est réelle sur $X_p x X_p$;
- ω est fermée si $d\omega = 0$, où d est la dérivation extérieure définie par :

$$(\text{II.1}) \quad (d\beta)(\xi_1,\ldots,\xi_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \xi_j\{\beta(\xi_1,\ldots,\hat{\xi}_j,\ldots,\xi_{k+1}) + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{1\le i<j\le k+1} \beta([\xi_i,\xi_j],\xi_1,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\hat{\xi}_j,\ldots,\xi_{k+1}) \quad ,$$
$$(\beta\in\Omega^k(X) \; ; \; \xi_1,\ldots,\xi_{k+1} \in \mathcal{U}(X))$$

- ω est non singulière si, pour tout $p\in X$, ω_p est non singulière ; alors la dimension de X est paire $(\dim X = 2n)$ et la forme ω^n n'est jamais nulle.

2 . La suite exacte fondamentale :

L'opérateur $i(\xi)$ de contraction par un vecteur $\xi \in \mathcal{U}(X)$ est défini par :

(II.2) $\{i(\xi)\beta\}(\xi_1,\ldots,\xi_k) = \beta\,(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_k)$, $(\beta \in \Omega^{k+1}(X)\ ;\ \xi_1,\ldots,\xi_k \in \mathcal{U}(X))$.

Le fait que ω soit non singulière implique que l'application $\beta : \mathcal{U}(X) \to \Omega^1(X)$ qui à $\xi \in \mathcal{U}(X)$ associe $\beta_\xi = i(\xi)\,\omega \in \Omega^1(X)$ est une bijection.

Définition II.2.

On dira qu'un champ de vecteurs ξ est localement hamiltonien si β_ξ est fermée, on dira que ξ est hamiltonien si β_ξ est exacte.

Si on note $\theta(\xi) = d \circ i(\xi) + i(\xi) \circ d$ la dérivée de Lie associée à un vecteur ξ , on vérifie sans difficulté que β_ξ est fermée si et seulement si $\theta(\xi)\omega = 0$. Désignons par $\mathcal{A}$ (respmt. $\mathcal{A}_o$) l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens (respmt. localement hamitoriens).

Théorème II.1.

Si la k-forme $\beta \in \Omega^k(X)$ est fermée, la k-forme $\theta(\xi)\beta$ est exacte.

C'est évident.

Corollaire .

$[\mathcal{A}_o,\mathcal{A}_o] \subseteq \mathcal{A}$

Cette relation résulte immédiatement de la formule :

$[\theta(\xi), i(\eta)] = i([\xi,\eta]), (\xi \text{ et } \eta \in \mathcal{U}(X))$.

<u>Théorème II.2.</u>

<u>L'application</u> $\gamma : \varphi \to \xi_\varphi$ de $\Omega^0 = \mathcal{C}^\infty(X) = C$ <u>dans</u> $\mathcal{U}(X)$ <u>définie par la relation</u>

(II.3) $d\varphi = \theta(\xi_\varphi)(\omega) = \theta_{\xi_\varphi}$, $(\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X))$,

<u>est telle que la suite ci-dessous soit exacte</u> :

(II.4) $0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^\infty(X) \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{A} \to 0$,

<u>où</u> j <u>est l'injection canonique.</u>

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1(X) & \\
& \mathcal{U}(X) \supset \mathfrak{A} \arrow[ul, "\rho"'] \\
\Omega^0(X) = \mathcal{C}^\infty(X) \arrow[uu, "d"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

On définit sur $\mathcal{C}^\infty(X)$ une structure d'algèbre de Lie à partir du crochet de Poisson.

(II.5) $[\varphi,\psi] = \xi_\varphi(\psi) = \omega(\xi_\psi, \xi_\varphi)$,

$(\varphi \text{ et } \psi \in \mathcal{C}^\infty(X))$.

La suite (II.4) est alors une suite exacte d'algèbres de Lie.

3 . <u>Espaces Homogènes symplectiques</u> :

Dans tout ce qui suit G désigne un groupe de Lie connexe et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie.

<u>Définition II.3.</u>

<u>Etant donnée une variété symplectique</u> (X,ω) <u>qui est aussi un G-espace, on dira que</u> (X,ω) <u>est un G-espace symplectique si</u> ω <u>est invariante par l'action de</u> G.

On dira que (X,ω) est un G-espace homogène symplectique si (X,ω) est un G-espace symplectique et si G agit transitivement sur X .

On peut exprimer l'invariance de ω par G à l'aide de l'homorphisme canonique $\sigma' : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(X)$ défini par :

(II.6) $(\sigma'(x)\varphi)(p) = \frac{d}{dt}\ \varphi\,(e^{-tx}.p)\,|_{t=0}$, $(p \in X,\ x \in \mathcal{G},\ \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(X))$.

L'invariance de ω est caractérisée par la condition $\sigma'(\mathcal{G}) \subset \mathfrak{A}_o$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathcal{C}^{\infty}(X) \arrow[r, "\lambda"] & \mathfrak{A} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{G} \arrow[r, "\sigma'"] & \mathfrak{A}_o \arrow[u] \arrow[d] & \\ & & & \mathcal{U}(X) & \end{tikzcd}$$

Définition II.4.

On dira que (X,ω) est un G-espace fortement symplectique si $\sigma'\,(\mathcal{G}) \subset \mathfrak{A}$.

Exemple :

$X = O$ est une G-orbite de $f \in \mathcal{G}'$ dans $\mathcal{G}'$ (voir l'introduction pour les notations) et ω a été définie plus haut. (X,ω) est alors un G-espace homogène fortement symplectique et il existe un relèvement $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^{\infty}(X)$ qui est un homomorphisme d'algèbre de Lie :

(II.7) $(\lambda(x))(f) = \langle f,x \rangle$, $(x \in \mathcal{G},\ f \in \mathcal{G}')$;

(II.8) $(\sigma'(x))(y)|_f = \langle f,[x,y] \rangle$, $(x \text{ et } y \in \mathcal{G} ;\ f \in \mathcal{G}')$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathcal{C}^{\infty}(X) \arrow[r, "\chi"] & \mathfrak{a} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{G} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\sigma'"'] & & \end{tikzcd}$$

Question :

Peut-on construire tous les G-espaces homogènes fortement symplectiques à partir de ceux cités dans l'exemple ci-dessus ? On suppose que G est simplement connexe et on utilise deux procédés standards de construction.

Première construction :

Si (X,ω_X) est un G-espace homogène symplectique et si (Y,τ) est un recouvrement de X , il existe une action de G sur Y et une 2-forme ω_Y sur Y telles que :

(i) $\tau^*(\omega_X) = \omega_Y$;

(ii) (Y,ω_Y) est un G-espace symplectique ;

(iii) τ est équivariant, c'est-à-dire :

(II.9) $\tau(g.q) = g.\tau(q)$, $(g\in G,\ q\in Y)$.

En outre, pour que X soit fortement symplectique (respmt transitif), il faut et il suffit que Y le soit.

Deuxième construction :

Soit $1 \to K \to H \to G \to 1$ une extension centrale de G par K . Comme K agit trivialement sur $\mathcal{H}'$ dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de H , les orbites de H dans $\mathcal{H}'$ définissent, par passage au quotient, des G-espaces homogènes fortement symplectiques.

Théorème II.3.

Il existe une extension centrale $1 \to K \to H \to G \to 1$ où

(i) H est simplement connexe,

(ii) K est connexe,

possèdant la propriété suivante :

Tout G-espace homogène fortement symplectique (X,ω) est isomorphe à un relèvement d'une orbite O' de G dans le dual $\mathcal{H}'$ de l'algèbre de H. Pour que O' soit isomorphe à une orbite de G dans $\mathcal{G}'$, il faut et il suffit qu'il existe un relèvement $\lambda\_ : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^{\infty}(X)$ de σ'.

L'algèbre $\mathcal{K}$ de K est le dual de $H^2(\mathcal{G})$ deuxième groupe de cohomologie de $\mathcal{G}$ et l'algèbre $\mathcal{H}$ de H est l'extension centrale de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{K}$ correspondant à l'identité de $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{K};\mathcal{K})$ $H^2(\mathcal{G};\mathcal{K})$ (voir Séminaire Sophus Lie [1], Exposé 4).

III - FIBRES LINEAIRES.

On veut construire les représentations dans des espaces dont les éléments ne seront plus des fonctions mais des sections d'un fibré linéaire (voir exemple 2 du 1. ci-dessous). Le but de paragraphe est d'énoncer les résultats qui permettent de différencier ces sections et de disposer d'une application analogue à l'application "valeur absolue".

1° - Structure de fibré linéaire :

Définition III.1.

On dira qu'un triplet (L,X,σ) est un fibré linéaire au-dessus d'une variété différentiable X si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. L <u>est une variété différentiable et</u> $\sigma : L \to X$ <u>est une application différentiable surjective.</u>

2. <u>Pour tout élément</u> $p \in X$, $\sigma^{-1}(p)$ <u>est un espace vectoriel complexe à une dimension.</u>

3. <u>Il existe un recouvrement ouvert</u> $\mathcal{U} = \{U_i / i \in I\}$ <u>et une famille</u> $\{s_i / i \in I\}$ <u>de sections différentiables</u> $s_i : U_i \to L$ <u>telles que</u> :

(i) s_i <u>ne s'annule jamais sur</u> U_i, $(i \in I)$;

(ii) <u>L'application</u> $\eta_i : \mathbb{C} \times U_i \to L$ <u>définie pour</u> $(c,p) \in \mathbb{C} \times U_i$ <u>par</u> $\eta_i(c,p) = c.s_i(p)$, <u>est un difféomorphisme de</u> $\mathbb{C} \times U_i$ <u>sur</u> $\sigma^{-1}(U_i)$, $(i \in I)$.

On dira que deux fibrés linéaires (L,X,σ) et (L',X,σ') au dessus de X sont isophormes s'il existe un difféomorphisme $\tau : L \to L'$ vérifiant :

(i) $\sigma'.\tau = \sigma$

(ii) pour tout $p \in X$, la restriction de τ à $\sigma^{-1}(p)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\sigma^{-1}(p)$ sur $\sigma'^{-1}(p)$.

L'isomorphisme définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des fibrés linéaires au-dessus de X , on notera $\mathcal{L}$ l'ensemble quotient et $[(L,X,\sigma)]$ (ou plus simplement $[(L,\sigma)]$) la classe d'un fibré (L,X,σ).

<u>Exemple 1.</u>

L est la variété produit $\mathbb{C} \times X$ et $\sigma : L \to X$ la projection canonique. Les sections $s : X \to L$ relatives à σ sont de la forme $s : p \to (p,f(p))$ où $f : X \to \mathbb{C}$: elles sont en bijection canonique avec les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$.

Le fibré (L,X,σ) est appelée fibré linéaire trivial au dessus de X.

<u>Exemple 2 :</u>

Reprenons pour G, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, f, G_f, $X = G/G_f$, ω et $\theta : G \to X$ les notations et les hypothèses du I/ ou de II/3°/ (exemple) ; on suppose que χ est un caractère de G_f de différentielle $2\pi\sqrt{-1}\, f$.

On veut établir une correspondance entre les fonctions $\phi : G \to \mathbb{C}$ qui vérifient la condition

$$\begin{tikzcd} G \times \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi'"'] & L \arrow[d, "\sigma"] & L^* \arrow[l, "inj"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ G \arrow[r, "\theta"] & G/G_f = X & \end{tikzcd}$$

$$\text{(III.1)} \quad \phi\,(g.a) = \chi(a)^{-1}\,\phi\,(g),(a\in G_f, g\in G),$$

et certaines sections $s : X \to L$ au dessus d'un fibré linéaire (L, X, σ) sur X convenablement choisi. Notons $\pi' : G \times \mathbb{C} \to G$ la projection canonique et L le quotient de $G \times \mathbb{C}$ par la relation d'équivalence :

$(g,c) \sim (g',c') \Leftrightarrow (\exists\ a\in G_f)(g'=ga \text{ et } c'=\chi(a)^{-1}c)$, $(g \text{ et } g'\in G, c \text{ et } c'\in\mathbb{C})$;

notons $[g,c]$, $(g\in G, c\in\mathbb{C})$, l'image de (g,c) par l'application canonique : $G\times\mathbb{C} \to L$. La relation $\sigma\,([g,c]) = \theta(g)$, $(g\in G, c\in C)$, définit bien une application : $L \to X$ et, pour $g\in G$, $\sigma^{-1}\,(\theta(g)) = \{[g,c]/c\in\mathbb{C}\}$ est un espace vectoriel complexe de dimension un. Notons que le fibré construit possède quelques propriétés supplémentaires.

- Le groupe $G \times C^*$ agit par multiplication à gauche sur L et σ est équivariant lorsqu'on restreint cette action à $G \times \{1\}$.

- Si $L^* = \lambda\,(G\times C)$ est l'ensemble des éléments non nuls de L, il existe une 1-forme et une seule α sur L^* telle que , (III.1) $\lambda^*(\alpha) = \pi'^* (f) + (0, \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \quad \frac{dz}{z})$ sur $G \times \mathbb{C}^*$, où f est considérée comme une forme sur G invariante par l'action de G ; cette 1-forme α possède les propriétés suivantes :

(i) α est invariante par l'action de $G \times \mathbb{C}^*$ sur L^*

(ii) si π est la restriction de σ à L^* : $\pi^*(\omega) = d\,\alpha$.

On sait que le triplet (L^*,X,π) est appelé fibré principal associé au fibré linéaire (L, X, σ).

Enfin, si χ est unitaire, l'application $q = [g,c] \to |q| = |c|$ est bien définie et $|g!q| = q$, (g et $g' \in G$, $c \in C$).

On remarque qu'à toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(ga) = f(g)\, \chi\, (a)^{-1}$, $(g \in G,\ a \in G_f)$, la relation $s(\theta(g))=[g,f(g)]$, $(g \in G)$, associe une section $s : X \to L$ relative à σ .

Etant donnée une variété symplectique $(X,)$ nous allons passer rapidement en revue les résultats relatifs à la classification des fibrés linéaires $(L,X,)$ au-dessus de X, ainsi que l'existence de structure hermitiennes invariantes $q \to |q|$; enfin, dans le cas où (X,ω) est un G-espace symplectique et (L,X,σ) un fibré linéaire au-dessus de X muni d'une connexe α on discutera l'existence d'un relèvement de l'action de G à L^* possèdant des propriétés convenables.

Résumons les définitions et les résultats fondamentaux relatifs à la cohomologie de Cech sur X . Si $\mathfrak{U} = \{U_i / i \in I\}$ est un recouvrement

ouvert de X, A un groupe abélien noté additivement et n un entier positif, on appelle n-cochaîne sur X à valeurs dans A (et relative à $\mathfrak{U}$) une application qui associe à toute famille $(i_o, i_1, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$ d'indices tels que $U_{i_o} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$ un élément $c_{i_o \ldots i_n} \in A$.
L'ensemble $C_{\mathfrak{U}}^{k+1}(X,A)$ des n-cochaines ainsi déterminé est un groupe abélien noté additivement ; on définit une application $d_{\mathfrak{U}}^k : C_{\mathfrak{U}}^k \to C_{\mathfrak{U}}^{k+1}$ en définissant pour $c = (c_{i_o \ldots i_n}) \in C_{\mathfrak{U}}^k$

$$(III.2) \quad (d_{\mathfrak{U}}^k c)_{i_o \ldots i_{k+1}} = \sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^{\nu} c_{i_o \ldots \hat{i}_{\nu} \ldots i_{k+1}} \,, \quad (U_{i_o} \cap \ldots U_{i_{k+1}} \neq \emptyset) .$$

Le kienne groupe de Cohomologie de X relatif à A (et $\mathfrak{U}$) est défini par :

$$(III.3) \quad H_{\mathfrak{U}}^k (X;A) = \operatorname{Im} d_{\mathfrak{U}}^{k-1} / \operatorname{Ker} d_{\mathfrak{U}}^k .$$

On dira que le recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ est contractible si, pour tout $(i_o, i_1, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$ tel que $U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$ l'ouvert $U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_n}$ est contractible.

<u>Exemple</u> :

Munissons la variété paracompacte X d'une structure riémannienne. Considérons les ouverts U possédant la propriété suivante : étant donné deux points p et q, il existe une géodésique et une seule, de longueur minimale, contenue dans U joignant p et q ; ces ouverts sont contractibles et on peut donc construire un recouvrement contractible plus fin que tout recouvrement donné.

Le raffinement des recouvrements permet de construire un système inductif de kièmes groupes de cohomologie $H^k_{\mathfrak{U}}(X ; A)$; le k-groupe de cohomologie est la limite inductive $H^k(X ; A)$ de ce système. On démontre que si $\mathfrak{U}$ est contractible, l'injection canonique $H^k_{\mathfrak{U}}(X ; A) \rightarrowtail H^k(X ; A)$ est un isomorphisme ce qui permet d'utiliser le premier comme réalisation du second.

Si $\widetilde{\mathcal{L}}$ est l'ensemble des fibres linéaires $\tilde{\ell} = (L,\sigma)$ au-dessus de X, on considère un recouvrement contractible $\mathfrak{U} = \{U_i/i\in I\}$, une famille $\{s_i/i\in I\}$ de sections non nulles $s_i : U_i \to L$ relatives à $\sigma : L \to X$ et les fonctions de transition $\{c_{ij}/(i,j)\in I^2$ et $U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$ définies sur $U_i \cap U_j$ par :

(III.4) $s_i \, c_{ij} = s_j$.

Si on définit $f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ par $c_{ij} = e^{2\pi\sqrt{-1}\, f_{ij}}$ la fonction $\eta_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$ est constante sur $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ et sa valeur est entière. On définit ainsi un élément $\tilde{\gamma}(\tilde{\ell}) = (\eta_{ijk}) \in C^2_{\mathfrak{U}}(X ; Z)$.

<u>Théorème III.1.</u>

<u>La correspondance</u> $\tilde{\gamma} : \widetilde{\mathcal{L}} \to C^2_{\mathfrak{U}}(X ; Z)$ <u>définit, par passage au quotient, un isomorphisme</u> $\gamma : \mathcal{L} \to H^2(X ; Z)$.

2° <u>Fibrés linéaires munis d'une connexion</u> :

Si V est un espace complexe à une dimension et si $u : \mathbb{C} \to V$ est un isomorphisme linéaire, la 1-forme $u^* \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dz}{z}\right)$ sur $V^* = V - \{0\}$ est indépendante de l'application u choisie ; on la note β_V .

Définition III.2 :

Si (L, X, σ) est un fibré linéaire sur la variété X, on appelle connexion sur L toute 1-forme α sur l'ensemble L^* des éléments non nuls de L vérifiant :

(III.5) c1/ α est invariant par l'action de C^* sur L^* ;

(III.6) c2/ Pour tout $p \in X$, $\alpha \Big|_{\{\sigma^{-1}(p)\}^*} = \beta_{\sigma^{-1}(p)}$.

Théorème III.2 :

Si α est une connexion sur un fibré linéaire (L,X,σ) au-dessus de la variété X, il existe une 2-forme fermée et une seule ω sur X telle que :

(III.7) $\pi^*(\omega) = d\,\alpha$;

ω est appelée courbure de la connexion α .

Inversement, soient $\mathfrak{U} = \{U_i / i \in I\}$ un recouvrement contractible de la variété X et ω une 2-forme fermée sur X. Pour tout $i \in I$, $\omega|_{U_i} = d\alpha_i$ où α_i est une 1-forme sur U_i ; pour tout couple $(i,j) \in I \times I$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\alpha_i - \alpha_j = df_{ij}$ sur $U_i \cap U_j$; enfin, pour tout triplet $(i, j, k) \in I^3$ tel que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $\eta_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$ est une constante sur $U_i \cap U_j \cap U_k$; le système (η_{ijk}) définit un élément $\mu(\omega)$ de $H^2(X, \mathbb{C})$. D'autre part, le fait que les cochaines soient des fonctions permet de définir, par composition des applications et par passage au quotient, une application

$$i : H^2(X ; Z) \rightarrow H^2(X ; \mathbb{C}) .$$

Théorème III.3 :

Etant donné une 2-forme fermée ω sur une variété X, pour qu'il existe un fibré linéaire (L,X,σ) au-dessus de X et une connexion α sur L admettant ω pour courbure, il faut et il suffit que $\mu(\omega) \in i\ (H^2(X\ ;\ Z))$; on dit alors que $\mu(\omega)$ est entière.

On note $\mathcal{L}_\omega$ l'ensemble des classes de fibrés ainsi déterminé.

3°Les fibrés linéaires munis d'une structure hermitienne invariante :

Si (L,X,σ) est un fibré linéaire au-dessus de X muni d'une connexion α, $\mathfrak{U} = \{U_i/i\in I\}$ un recouvrement de X pour lequel il existe une famille $\{s_i/i\in I\}$ de sections non nulles $s_i : U_i \to L^*$, $(i\in I)$, relatives à σ, à toute section $s : X \to L$ relative à σ on associe la famille $\{f_i/i\in I\}$ de fonctions $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ définies par :

$$\text{(III.8)} \quad s = f_i s_i \quad \text{sur } U_i\ ,\ (i\in I).$$

Alors pour tout $\xi \in \mathcal{U}(X)$ et toute section différentiable $s : X \to L$, il existe une section et une seule, notée $\nabla_\xi s$, indépendante du recouvrement $\mathfrak{U}$ et telle que :

$$\text{(III.9)} \ \nabla_\xi s = (<\xi,f_i> + 2\pi\sqrt{-1}\ <s_i^*(\alpha),\xi> f_i>)s \ ;\ \text{sur } U_i,(i\in I).$$

Définition III.3 :

$\nabla_\xi s$ est appelée dérivée covariante de s dans la direction ξ.

De même, si $\gamma : [0,1] \to X$ est une courbe différentiable (ou différentiable par morceaux) de X, $s : [0,1] \to L$ une section différentiable de σ au-dessus de γ et :

$f_i : [0,1] \cap \gamma^{-1}(U_i) \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $s(t) = f_i(t)\, s_i(t)$, $(t \in [0,1] \cap \gamma^{-1}(U_i)\ ;\ i \in I)$, l'élément.

$$\text{(III.10)} \quad u(t) = \{\frac{df_i}{dt} + 2\pi\sqrt{-1} < s_i^*(\alpha),\ \gamma'(t) > f_i(t)\}\, s_i(\gamma(t)),$$

est indépendant du recouvrement $\mathfrak{U}$; on le note $\nabla_{\gamma'(t)} s(t)$.

Définition III.4 :

On dit que la section s est autoparallèle au-dessus de γ si :

$$\text{(III.11)} \quad \nabla_{\gamma'(t)} s(t) = 0 \quad , \quad (t \in [0,1]).$$

Théorème III.4 :

Si $\gamma : [0,1] \to X$ est une courbe différentiable par morceaux, pour tout $q \in \sigma^{-1}(\gamma(0))^*$ il existe une section auto-parallèle au-dessus de γ et une seule s telle que $s(0)=q$. L'application : $l_\gamma : q \to s(1)$ définit un isomorphisme linéaire de $\sigma^{-1}(\gamma(0))$ sur $\sigma^{-1}(\gamma(1))$.

Désignons par Γ l'ensemble des courbes fermées différentiables par morceaux, de X ; si $\gamma \in \Gamma$, il existe un nombre $\hat{l}(\gamma) \in \mathbb{C}$ tel que, pour toute section autoparallèle s au dessus de γ :

$$\text{(III.12)} \quad l(1) = \hat{l}(\gamma)\ s(0).$$

Définition III.5 :

On appelle structure hermitienne sur (L,X,σ) toute application $|L| : q \to |q|$, $(q \in L)$, de L dans R_+ , telle que pour tout $p \in X$, la restriction de $|L|$ à $\sigma^{-1}(p)$ soit une norme hermitienne , et que l'application $q \to |q|^2$ soit différentiable.

On dit que $|L|$ est invariante si, pour toute courbe γ différentiable par morceaux de X et toute section s autoparallèle au-dessus de γ : $|s(o)| = |s(1)|$.

Théorème III.5 :

Désignons par (L, X, σ) un fibré linéaire au-dessus de X muni d'une connexion α , et par ω la courbure associée. Il existe sur L une structure hermitienne invariante si et seulement si :

$$\text{(III.13)} \quad \hat{1}(\Gamma) \subset T^1 = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\} .$$

De plus, si $\mu(\omega)$ est entière, l'ensemble

$$\text{(III.14)} \quad \mathcal{H}_\omega = \{1\text{-}\ [L,\sigma] \in \mathcal{L}_\omega \;/\; \hat{1}(\Gamma) \subset T^1\}$$ est non vide.

4° Le relèvement à L* de l'action de G .

Désignons par (X,ω) un G-espace homogène symplectique, par (L,X,σ) un fibré linéaire au-dessus de X , par α une connexion sur X de courbure ω , par L^* l'ensemble des éléments non seuls de L et par π la restriction de σ à L^* .

Définition III.6 :

On dit qu'une action de G sur L^* est un relèvement de l'action de G sur X si :

1. - $\pi : L^* \to X$ est équivariant ;

2. - Pour tout $g \in G$ et tout $p \in X$, la restriction de $\tau_g : q \mapsto gq$ à $\sigma^{-1}(p)$ est un isomorphisme linéaire : $\sigma^{-1}(p) \to \sigma^{-1}(g.p)$;

3.- α est invariante par G.

Théorème III.6 :

1. - Si l'action de G se relève à L^*, X est fortement symplectique et il existe un relèvement $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^\infty(X)$ de l'homorphisme $\sigma' : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ (voir II.6).

2. - Réciproquement, si G est connexe et simplement connexe, si X est fortement symplectique et s'il existe un relèvement de l'homomorphisme $\sigma' : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$, l'action de G se relève à L^*.

On utilise un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(X)$ sur l'algèbre $\mathcal{V}(L^*)$ des transformations infinitésimales de L^* invariantes par l'action de $\mathbb{C}^*$ en définissant :

(III.15) $\forall\ \xi \in \mathcal{U}(X)$, $\tilde{\xi} \in \mathcal{V}(L^*)$ tel que $\begin{cases} \langle \alpha, \tilde{\xi} \rangle = 0 , \\ \pi_*(\tilde{\xi}) = \xi . \end{cases}$

(III.16) $\forall\ \psi \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $\eta(\psi) \in \mathcal{V}(L^*)$ tel que :

$$(\eta(\psi)\ \phi)\ (q) = \frac{d}{dt}\ ((\mathrm{Exp}(2\pi\sqrt{-1}\ t\ \psi_o \pi\ (q)).q)|_{t=0},\ (\phi \in \mathcal{C}^\infty(L^*), q \in L^*).$$

L'isomorphisme $\psi \to \eta_\psi$ est alors défini par

$$(III.17) \quad \eta_\psi = (\xi_\psi)^\sim + \eta(\psi) \ , \ (\psi \in \mathcal{C}^\infty(X)).$$

IV . POLARISATION ET QUANTIFICATION.

1° Polarisation.

Etant donnés une variété X et un point $p \in X$, on note toujours $X_p^{\mathbb{C}}$ le complexifié du plan X_p tangent en p à X et on désigne par r un entier ≥ 0.

Définition IV.1.

On appelle distribution infinitésimale de dimension r sur X toute correspondance $F : p \to F_p$ qui associe à tout point $p \in X$ un sous-espace F_p de $X_p^{\mathbb{C}}$ de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $p \in X$, $\dim_{\mathbb{C}} F_p = r$;

(ii) Pour tout $p \in X$, il existe un voisinage ouvert V_p de p dans X, il existe une suite $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ d'éléments de $\mathcal{U}(V_p)$ tels que, pour tout $q \in V_p$:

$$(IV.1) \quad F_q = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{C}\,(\xi_j)_q \ .$$

On désignera par $\mathcal{U}(F)$ le sous-espace de $\mathcal{U}(X)$ formé des éléments $\xi \in \mathcal{U}(X)$ vérifiant, pour tout $p \in X$: $\xi_p \in F_p$.

Définition IV.2 :

On dira que la distribution F est involutive si $\mathcal{U}(F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{U}(X)$.

Définition IV.3 :

On appelle polarisation d'une variété symplectique (X,ω) de dimension $2n$, toute distribution involutive F sur X vérifiant :

(i) Pour tout $p \in X$, $\dim_{\mathbb{C}} F_p = n$;

(ii) Pour tout $p \in X$, $\omega_p|_{F_p} = 0$.

On dira que la polarisation est admissible si, de plus :

(iii) Pour tout $p \in X$, $\dim_{\mathbb{C}}(F_p \cap \bar{F}_p) = k$ est constante ;

(iv) La correspondance $p \to F_p + \bar{F}_p$ est une distribution involutive sur X .

2° Les espaces C_F et C_F^k .

Soit k un entier positif ou nul ; on définit :

$$C_F = \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X) \;/\; \forall \eta \in \mathcal{U}(F) \quad \eta(\varphi) = 0 \} ,$$
$$= \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X) \;/\; \xi_\varphi \in \mathcal{U}(F) \} ;$$
$$C_F^k = \{ \psi \in \mathcal{C}^\infty(X) / (\forall U \subset X,\ U \text{ ouvert})(\forall \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(U))([\varphi_0,[\ldots,[\varphi_k,\psi]]] = 0)\} .$$

Théorème IV.1 :

C_F est une sous-algèbre abélienne de $\mathcal{C}^\infty(X)$; si F est admissible :

$$\text{(IV.1)} \quad [C_F^k, C_F^l] \subset C_F^{k+l-1} \quad (k \text{ et } l \in \mathbb{N},\ k + l \geq 1).$$

On vérifie facilement que $[C_F, C_F^k] \subset C_F^{k-1}$, $(k\geq 1)$; si F est admissible, l'utilisation d'un système de coordonnées convenable permet de démontrer que $C_F = C_F^o$; le reste s'en déduit par récurrence.

Définition IV.4.

Les éléments de l'algèbre C_F^1 sont appelés fonctions quantifiables.

Théorème IV.2.

Désignons par φ un élément de C_F^1 tel que $\xi_\varphi \in \mathfrak{a}$ engendre un sous-groupe à un paramètre $t \to \mathrm{Exp}(t\,\xi_\varphi)$, $(t\in R)$, de difféomorphismes agissant sur X. Alors la distribution F est invariante par ce groupe, c'est-à-dire que :

$$\text{(IV.2)} \quad \mathrm{Exp}\,(t\,\xi_\varphi)(F_p) = F_{(\mathrm{Exp}\,t\,\xi_\varphi)(p)}\ , \quad (t\in R,\ p\in X).$$

On le vérifie par un calcul direct.

Désignons par S l'espace des sections différentiables $s:X \to L$ relatives à σ, lorsque (L,σ) est un fibré linéaire au-dessus de X muni d'une connexion α, de courbure ω ; définissons :

$$S_F = \{s\in S \ /\ \forall \xi \in \mathcal{U}(F)\ ,\ \nabla_\xi s = 0\}.$$

Théorème IV.3 :

Associons à tout élément $\varphi\in \mathcal{C}^\infty(X)$ l'endomorphisme $\nu(\varphi)$: $s \to \nabla_{\xi_\varphi} s + 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi s$, $(s\in S)$, de S. Le sous-espace S_F est stable par $\nu(C_F^1)$ et ν définit un homomorphisme d'algèbre de Lie de C_F^1 dans $\mathrm{End}(S_F)$.

On utilise la relation,

(IV.3) $[\nabla_{\xi_\varphi} + 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi, \nabla_\eta] = \nabla_{[\xi_\varphi,\eta]}$, $(\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X), \eta \in \mathcal{U}(X)$,

et le fait que, localement, tout $\eta \in \mathcal{U}(F)$ est de la forme ξ_ψ où $\psi \in C_F$.

3° Application à la construction de représentations.

Supposons que G soit un groupe de Lie connexe et simplement connexe, et que le couple (X,ω) ci-dessus soit un G-espace fortement symplectique ; désignons par $\sigma' : \mathcal{G} \to \mathfrak{A}$ l'homomorphisme d'algèbre induit et par $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^\infty(X)$ un relèvement de σ' (voir II.3°/ pour les notations) tel que $\lambda(\mathcal{G}) \subset C_F^1$. L'action de G sur X se relève à L (Théorème III.6) et F est invariante par G (Théorème IV.2) . L'application $x \to \nu(\lambda(x))$ définit une représentation de l'algèbre $\mathcal{G}$ sur S_F pouvant définir une représentation $\rho_F : G \to \mathrm{Aut}\, S_F$ de G sur S_F. On peut même, dans certaines conditions, construire une représentation unitaire de G sur un sous-espace hilbertien invariant de S_F.

C'est le cas par exemple si $[(L,\sigma)] \in \mathcal{H}_\omega$ (voir (III.14)) et si F est une distribution Kählérienne. On construit sur L une structure hermitienne invariante $|L|$ et on utilise la mesure positive Ω associée à la 2n-forme ω^n sur X. L'espace de représentation est le sous-espace S_F^2 de S_F formé des sections de S_F de carré intégrable, et la structure hilbertienne de S_F^2 est définie par la forme :

(IV.4) $\|s\| = \{\int_X |s(p)|^2 \, d\,\Omega\,(p)\}^{\frac{1}{2}}$.

Dans le cas général, il faut postuler l'existence d'une structure convenable sur l'espace quotient de X par la relation d'équivalence définie par la distribution $p \to F_p \cap \bar{F}_p \cap X_p$.

V - LE CAS DES ORBITES .

Dans tout ce qui suit, on suppose que le groupe de Lie G est connexe et simplement connexe.

1° La condition d'intégrabilité.

On conserve les notations de la fin du §I et de l'exemple du §II-3°/ ; on désigne par $\mathcal{G}_f = \{x \in \mathcal{G} / x.f = 0\}$ l'algèbre de Lie de G_f .

Théorème V.1.

L'homomorphisme d'algèbre de Lie $2\pi\sqrt{-1}\, f : \mathcal{G}_f \to \mathbb{C}$ se relève en un homomorphisme de groupe $\chi_f : G_f \to \mathbb{C}$ si et seulement si $\mu(\omega)$ est entière (voir Théorème III.3).

On démontre que la condition est nécessaire en utilisant la construction exposée dans l'exemple 2 du §III-1°/ et le Théorème III.3.

On démontre que la condition est suffisante en utilisant les Théorèmes III.3 et III.6 et en remarquant que, si $q \in \pi^{-1}(f)$,

(V,1) $a.q = \chi_f(a)\, q$, $(a \in G_f)$,

où χ_f est le caractère cherché.

2° Existence d'une polarisation admissible invariante.

On conserve les notations et les hypothèses ci-dessus et on désigne par F une polarisation admissible de l'orbite X de $f \in \mathcal{G}'$.

Théorème V.2.

Pour que la polarisation F soit G-invariante, il faut et il suffit que le relèvement $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^{\infty}(X)$ de $\sigma' : \mathcal{G} \to \mathfrak{A}$ vérifie :

$$(V.2) \quad \lambda(\mathcal{G}) \subset C_F^1 .$$

On utilise les deux faits suivants :

(i) C_F^1 si et seulement si, pour tout ouvert U de X, $[\varphi, C_F(U)] \subset C_F(U)$;

(ii) F est G-invariante si, pour tout ouvert U de X, $\{\sigma'(\mathcal{G})\}(C_F(U)) \subset C_F(U)$.

3° Polarisations G-invariantes.

Identifions le plan tangent à G en 1 à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G . L'application $\sigma' : \mathcal{G} \to \mathfrak{A}$ induit une application $\eta : \mathcal{G}_c \to X_f^c$ de la complexifiée de $\mathcal{G}$ sur le complexifié du plan tangent à X en f.

Théorème V.3.

La correspondance $F \to \mathfrak{F} = \eta^{-1}(F_f)$ définit une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}_G(X,\omega)$ des polarisations G-invariantes de (X,ω) sur l'ensemble $\mathfrak{S}_f$ des sous-algèbres $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{G}_c$ qui vérifient :

(i) $(\mathcal{G}_f)_c \subset \mathfrak{F} \subset \mathcal{G}_c$;

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{F}/(\mathcal{G}_f)_c = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G}_c/\mathfrak{F}$;

(iii) $<f, [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]> = 0$.

<u>La polarisation est admissible si et seulement si</u> :

(iv) $\mathfrak{F} + \bar{\mathfrak{F}}$ <u>est une sous-algèbre de</u> $\mathcal{G}_c$.

On le vérifie directement à partir des définitions.

<u>4° Exemple</u> :

Si G est semi-simple, la forme bilinéaire $(x,y) \to tr(ad\, x_o ady)$, ($x$ et $y \in \mathcal{G}$) non dégénérée permet d'identifier $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ et de se limiter à l'étude des orbites de la représentation adjointe de G dans $\mathcal{G}$ Si f est un élément semi-simple de $\mathcal{G}$, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ telle que $f \in \mathcal{H}$. Si on note, (voir Exemple du §I pour les notations),

$$(V.3) \quad \Delta_f = \{\alpha \in \Delta / \alpha(f) = 0\} ,$$

on vérifie sans peine que :

$$(V.4) \quad (\mathcal{G}_f)_c = \mathcal{H}_c + \sum_{\alpha \in \Delta_f} \mathbb{C}\, x_\alpha ,$$

est une sous-algèbre réductive de $\mathcal{G}_c$. On peut alors démontrer que $\mathfrak{S}_f$ est identique à l'ensemble des sous-algèbres paraboliques de $\mathcal{G}_c$ admattant $(\mathcal{G}_f)_c$ comme facteur de Lévy.

B I B L I O G R A P H I E .

AUSLANDER L. et KOSTANT B. [1] Quantization and representations of solvables Lie Groups, Bull. Amer. Math. Soc., (1967), 692-695.

AUSLANDER L. et MOORE C.C. [1] Unitary representations of solvable Lie groups, Memoirs of Amer. Math. Soc., 62 , (1966) .

BARGMANN V. [1] Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math.,(2) 48 (1947), 568-640 .

BRUHAT F. [1] Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. Fr., 84 (1956), 97-205 .

GELFAND I.M. et NAIMARK M.A. [1] Unitary representations of the classical groups, Tudy Math. Steklov, 36 (1950), 288 .

[2] Unitary representations of the Lorentz group, Izsv. Akad. Nauk. SSSR (1947),411-504.

HARISH CHANDRA [1] Fourier Transforms on a semi-simple Lie algebra I, Amer. J. Math., 79 (1957), 193-257 .

KIRILLOV A.A. [1] Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Ups. Math. Nauk., 17 (1962),57-110.

MACKEY G.W. [1] Induced representations of locally compact groups I, Ann. of Math.,(2) 55 (1952), 101-139 .

[2] Induced representations of locally compact groups II, Ann. of Math.,(2) 58 (1953),193-221.

SEMINAIRE SOPHUS LIE [1] Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, Secrétariat Mathématiques, Paris (1955).