Hubert Goldschmidt

Le formalisme de Hamilton-Cartan en calcul des variations

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 15
« Conférences de : R. Balian, H.J. Borchers, J.J. Duistermaat J.P. Eckmann, H. Goldschmidt et C.V. Stanojević », , exp. nº 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__15__A5_0>

LE FORMALISME DE HAMILTON-CARTAN EN CALCUL DES VARIATIONS

Hubert GOLDSCHMIDT

Nous donnons ici un exposé de la géométrie du calcul des variations à plusieurs variables indépendantes d'après [2] . Nous montrons de quelle manière le formalisme hamiltonien intervient en mécanique, en espérant que cela puisse être de quelque utilité en théorie des champs. Nous retrouvons les résultats classiques du calcul des variations des intégrales simples et de la mécanique théorique (cf. [3]) en indiquant les notions qui n'admettent pas de généralisation au cas de plusieurs variables.

— . —

§ 1 . LES EQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

Soit X une variété différentiable de dimension n dont le fibré tangent sera noté T . Soit $\pi : Y \to X$ un fibré sur X (qu'on pourra, si l'on veut, supposer trivial) ; une section $s : X \to Y$ de Y est une application différentiable telle que $\pi \circ s$ soit l'application identité de X . Si $y_0 \in Y$, on peut choisir un système de coordonnées $(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)$ pour Y sur un voisinage U de y_0 tel que $(x^1,\dots,x^n)$ soit un système de coordonnées pour X sur πU . Si s est une section de Y sur un voisinage V de $x_0 = \pi(y_0)$ avec $s(V) \subset U$, alors s est représentée par les fonctions

$$s^j = y^j \circ s \ , \ j = 1,\dots,m \ .$$

On dira que deux sections s, s' de Y sur un voisinage de $x_o = \pi(y_o)$ sont équivalentes en x_o si $s(x_o) = s'(x_o) = y_o$ et

$$\frac{\partial s^j}{\partial x^i}(x_o) = \frac{\partial s'^j}{\partial x^i}(x_o)$$

$(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$. La classe d'équivalence d'une telle section s s'appelle le jet d'ordre 1 de s en x_o et sera notée $j_1(s)(x_o)$; on écrira $\pi_o(j_1(s)(x_o)) = s(x_o)$ et $\pi(j_1(s)(x_o)) = x_o$. L'ensemble $J_1(Y)$ des jets d'ordre 1 de sections (locales) de Y est un fibré sur X dont la structure de variété différentiable est caractérisée par le fait que, si s est une section de Y sur un ouvert V de X, la section

$$x \mapsto j_1(s)(x)$$

de $J_1(Y)$ sur V soit différentiable ; alors $\pi_o : J_1(Y) \to Y$ est un fibré. Le système de coordonnées (x^i, y^j) sur Y considéré plus haut nous donne un système de coordonnées (x^i, y^j, y^j_i) sur $\pi_o^{-1} U \subset J_1(Y)$ tel que, pour toute section s de Y sur πU avec $s(\pi U) \subset U$

$$y^j_i(j_1(s)(x)) = \frac{\partial s^j}{\partial x^i}(x) \qquad , \quad x \in \pi U .$$

Supposons maintenant que X soit orientée par une forme de volume ω. Soit L une fonction à valeurs réelles sur $J_1(Y)$ qu'on appellera le lagrangien. Pour tout compact $A \subset X$ et pour toute section s de Y sur un voisinage de A, on pose

$$I_A[s] = \int_A L(j_1(s))\omega$$

Le problème principal du calcul des variation est de trouver des sections s qui sont des extrema de cette fonctionnelle. Si A est une sous-variété à bord de X, on cherchera, par exemple, une section s telle que

$$I_A[s] \leq I_A[s']$$

pour toute section s' sur un voisinage de A avec $s'= s$ sur ∂A ; on dira que s est alors un minimum de I_A . S'il en est ainsi, alors la variation première

(1) $$\frac{d}{dt} I_A[s_t]\Big|_{t=0}$$

est nulle, pour toute famille à 1-paramètre de sections de Y avec $s_o = s$ et $s_t = s$ sur ∂A . Si l'expression (1) est nulle pour tout compact $A \subset X$, alors on dit qu'une section s de Y sur X est une extrémale, et cette section vérifie l'équation d'Euler-Lagrange, qu'on peut écrire à l'aide des coordonnées (x^i, y^j, y^j_i) sur $J_1(Y)$ considérées plus haut pour lesquelles l'on ait

$$\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

sur πU , sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial y^j}(j_1(s)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial y^j_i}(j_1(s))\right) = 0$$

$(j = 1,\ldots,m)$. C'est un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 .

§ 2 . LE FORMALISME HAMILTONIEN

Soit $V(Y)$ le fibré sur Y des vecteurs tangents aux fibres de $\pi : Y \to X$. Le fibré $\pi_o : J_1(Y) \to Y$ est un fibré affine, c'est-à-dire, la fibre $J_1(Y)_y = \pi_o^{-1}(y)$ est un espace affine pour tout $y \in Y$. Son fibré vectoriel associé est le fibré $T^* \otimes_Y V(Y)$ sur Y dont la fibre en $y \in Y$ est $T^*_{\pi(y)} \otimes V_y(Y)$; cet espace opère comme translations dans $J_1(Y)_y$. Pour des détails quant à la structure de fibré affine de $J_1(Y)$, nous renvoyons le lecteur à [1] ; on va se servir de cette structure pour définir la transformation de Legendre.

Soit W un espace affine d'espace vectoriel associé V . L'espace tangent $T_p(W)$ de W en p s'identifie de manière canonique à V , donc $T^*_p(W)$ à V^*. Si f est une fonction à valeurs réelles, alors $(df)(p) \in V^*$ et $df : W \to V^*$

envoie p dans $(df)(p)$.

La fonction L sur $J_1(Y)$, par restriction à l'espace affine $J_1(Y)_y$ nous donne donc une application

$$dL : J_1(Y)_y \to T_{\pi(y)} \otimes V_y^*(Y)$$

pour $y \in Y$, et par conséquent une application de fibrés sur Y , qu'on appelle la <u>transformation de Legendre</u>

$$\sigma(L) : J_1(Y) \to T \otimes_Y V^*(Y)$$

où $T \otimes_Y V^*(Y)$ est le fibré vectoriel sur Y dont la fibre en y est $T_{\pi(y)} \otimes V_y^*(Y)$.
En coordonnées locales, si $p \in J_1(Y)$

$$\sigma(L)p = \sum_{i,j} \frac{\partial L}{\partial y_i^j}(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^j .$$

L'outil essentiel du formalisme hamiltonien est la forme différentielle donnée par la

PROPOSITION 1.- <u>Il existe une et une seule forme différentielle</u> Θ <u>de degré</u> n <u>sur</u> $J_1(Y)$ <u>telle que</u>

1) $j_1(s)^* \Theta = L(j_1(s))\omega$ <u>pour toute section</u> s <u>de</u> Y ;

2) $\eta \lrcorner \Theta = \pi^*((\sigma(L)p.(\pi_{o*}\eta)) \lrcorner \omega)$

<u>pour</u> $p \in J_1(Y)$, $\eta \in T_p(J_1(Y))$ <u>satisfaisant</u> $\pi_*\eta = 0$, <u>et où</u> $\sigma(L)p$ <u>est considéré comme élément de</u> $\mathrm{Hom}(V_{\pi_o(p)}(Y), T_{\pi(p)})$.

LEMME 1.- a) <u>Soit</u> s <u>une section de</u> Y <u>sur</u> X , <u>alors si</u> $u = j_1(s)$

(2) $u^*(\eta \lrcorner d\Theta) = 0$ <u>pour tout champ de vecteurs</u> η <u>sur</u> $J_1(Y)$ <u>vérifiant</u> $\pi_{o*}\eta = 0$.

b) <u>Si</u> $\sigma(L) : J_1(Y) \to T \otimes_Y V^*(Y)$ <u>est une immersion, toute section</u> u <u>de</u> $J_1(Y)$ <u>sur</u> X <u>vérifiant la condition</u> (2) <u>est de la forme</u> $u = j_1(s)$, <u>où</u> s <u>est une section de</u> Y <u>sur</u> X .

THEOREME 1.- <u>Si</u> $\sigma(L) : J_1(Y) \to T \otimes_Y V^*(Y)$ <u>est une immersion et si</u> u <u>est une section de</u> $J_1(Y)$ <u>sur</u> X , <u>alors la condition</u>

(3) $$u^*(\xi \lrcorner d\,\Theta) = 0 \quad \text{pour tout champ de vecteurs } \xi \text{ sur } J_1(Y)$$

<u>est équivalente au fait que</u> u <u>soit</u> <u>de la forme</u> $u = j_1(s)$, <u>où la section</u> s <u>de</u> Y <u>sur</u> X <u>est une extrémale.</u>

Si γ est la section de $\Lambda^n T$ sur X déterminée par $<\gamma,\omega> = 1$, alors la condition (3) est équivalente à l'équation

(4) $$u_*\gamma \lrcorner d\,\Theta = 0 ,$$

la forme hamiltonienne de l'équation d'Euler-Lagrange.

Si (x^i, y^j, y^j_i) sont les coordonnées usuelles sur un ouvert $U \subset J_1(Y)$ avec

$$\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad \text{sur } \pi U ,$$

alors

$$\Theta = \sum_{i,j} (-1)^{i+1} dp^i_j \wedge dy^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n - dH \wedge \omega ,$$

où

$$p^i_j = \frac{\partial L}{\partial y^j_i}$$

et

$$H = \sum_{i,j} \frac{\partial L}{\partial y^j_i} y^j_i - L .$$

Si $\sigma(L)$ est un difféomorphisme de U sur $\sigma(L)U$ alors (x^i, y^j, p^i_j) sont des coordonnées pour $J_1(Y)$ sur U . L'équation (4) s'écrit en coordonnées locales

$$\frac{\partial H}{\partial y^j}(u(x)) = - \sum_i \frac{\partial u^i_j}{\partial x^i}(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p^i_j} (u(x)) = \frac{\partial u^j}{\partial x^i}(x) ,$$

où $u(x) = (x^i, u^j(x), u^i_j(x))$ avec

$$u^j = y^j \circ u \quad , \qquad u^i_j = p^i_j \circ u \; .$$

§ 3 . LES INTEGRALES SIMPLES.

Si Y est le fibré trivial $X \times M$, où M est une variété différentiable de dimension m, alors $J_1(Y)$ s'identifie à la variété des jets d'ordre 1 d'applications de X dans M, et par conséquent au fibré $\mathrm{Hom}(T, T(M)) = T^* \otimes_Y T(M)$ de base Y; au jet d'ordre 1 d'une fonction $f : X \to M$ en $x \in X$ correspond $f_* : T_x \to T_{f(x)}(M)$. Le fibré $T^* \otimes_Y V(Y)$ s'identifie à $T^* \otimes_Y T(M)$, et la transformation de Legendre est donc une application

$$\sigma(L) : T^* \otimes_Y T(M) \to T \otimes_Y T^*(M) \; .$$

Le hamiltonien $H : T^* \otimes_Y T(M) \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$H(p) = \langle p, \sigma(L)p \rangle - L(p) \; , \tag{5}$$

où $p \in T^* \otimes_Y T(M)$ et $\langle \; , \; \rangle$ est la forme bilinéaire mettant en dualité $T^* \otimes_Y T(M)$ et $T \otimes_Y T^*(M)$. Le hamiltonien n'est bien défini que lorsque Y est un fibré trivialisé.

En particulier si $X = \mathbb{R}$ et $x^1 = t$ est la coordonnée de $\mathbb{R}$, et $\omega = dt$, alors T, T^* sont trivialisés et

$$T^* \otimes_Y T(M) \simeq \mathbb{R} \times T(M)$$

$$T \otimes_Y T^*(M) \simeq \mathbb{R} \times T^*(M) \; .$$

Des coordonnées $(q^1, \ldots, q^m)$ sur un ouvert U de M induisent des coordonnées $(q^1, \ldots, q^m, \dot q^1, \ldots, \dot q^m)$ sur $T(M)$; si $y \in U$, $\xi \in T_y(M)$, alors

$$\xi = \sum_{j=1}^{m} \dot q^j(\xi) \frac{\partial}{\partial q^j}$$

et

$$\sigma(L)(t,\xi) = \sum_{j=1}^{m} p^j(t,\xi)\, dq^j$$

où

$$p^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ .$$

PROPOSITION 2.- (i) <u>Si</u> $X = \mathbb{R}$ <u>et si</u> $\sigma(L)$ <u>est une immersion, il existe un et un seul champ de vecteurs</u> ζ , <u>le champ d'Euler, sur</u> $J_1(Y)$ <u>tel que</u>

a) $\zeta \lrcorner d\Theta = 0$

b) $<\zeta, \pi^* \omega> = 1$.

(ii) <u>Une section</u> s <u>de</u> Y <u>sur</u> $\mathbb{R}$ <u>est une extrémale si et seulement si la courbe</u> $u = j_1(s)$ <u>dans</u> $J_1(Y)$ <u>est tangente à</u> ζ , <u>c'est-à-dire si</u>

$$j_1(s)_* \frac{\partial}{\partial t} = \zeta \circ j_1(s) \ .$$

Si $Y = \mathbb{R} \times M$, le champ d'Euler ζ s'écrit en coordonnées locales

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p^j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^j} \ ,$$

où H est le hamiltonien (5), et la forme hamiltonienne de l'équation d'Euler-Lagrange est donc

$$\frac{\partial q^j}{\partial t}(j_1(s)) = \frac{\partial H}{\partial p^j}(j_1(s))$$

$$\frac{\partial p^j}{\partial t}(j_1(s)) = - \frac{\partial H}{\partial q^j}(j_1(s))$$

$(j = 1,\ldots,m)$. Le champ d'Euler n'admet pas de généralisation si dim $X > 1$.

§ 4 . THEOREME DE NOETHER.

Revenons maintenant au cas général considéré au § 2 . Soient s_t une famille à 1-paramètre de sections de $J_1(Y)$ et $\bar{\varphi}_t$ une famille à 1-paramètre de difféomorphismes de X qui préservent l'action dans le sens suivant

$$\bar{\varphi}_t^* L(j_1(s_t))\omega = L(j_1(s))\omega \tag{6}$$

où $s = s_o$. Alors pour tout compact $B \subset X$

$$I_{\bar{\varphi}_t(B)}[s_t] = I_B[s] .$$

Si l'on pose $u_t = j_1(s_t)$, l'équation (6) s'écrit d'après la proposition 1

$$\bar{\varphi}_t^* u_t^* . \Theta = u^* \Theta \tag{7}$$

où $u = j_1(s)$. Si $\bar{\xi} = \frac{d\bar{\varphi}_t}{dt}\Big|_{t=0}$ est le générateur infinitésimal de la famille $\bar{\varphi}_t$ et $\xi = \frac{du_t}{dt}\Big|_{t=0}$ est le champ de vecteurs le long de u sur $J_1(Y)$ tangent à la famille u_t , alors on a d'après (7)

$$d(\bar{\xi} \lrcorner u^*\Theta) + \bar{\xi} \lrcorner u^* d\Theta + u^* d(\xi \lrcorner \Theta) + u^*(\xi \lrcorner d\,\Theta) = 0 .$$

Le deuxième terme est nul puisque $u^* d\Theta$ est une forme de degré $n+1$ sur X ; si s est une extrémale, alors le quatrième terme l'est aussi. Donc la forme de degré $n-1$ sur X

$$\bar{\xi} \lrcorner u^*\Theta + u^*(\xi \lrcorner \Theta)$$

est fermée lorsque s est une extrémale. On aurait pu supposer que u_t était une variation de u , comme sections de $J_1(Y)$. On obtient donc le

THEOREME DE NOETHER. *Si* s *est une extrémale,* u_t *est une famille à 1-paramètre de sections de* $J_1(Y)$ *avec* $u_o = u = j_1(s)$ *et* $\bar{\varphi}_t$ *est une famille à 1-paramètre de difféomorphismes de* X *vérifiant* (7), *alors la forme de degré* $n-1$ *sur* X

$$L(j_1(s))\bar{\xi} \lrcorner \omega + u^*(\xi \lrcorner \Theta)$$

<u>est fermée, où</u> $\xi = \frac{du_t}{dt}\Big|_{t=0}$ <u>et</u> $\bar{\xi} = \frac{d\bar{\varphi}_t}{dt}\Big|_{t=0}$.

§ 5 . <u>CROCHET DE POISSON</u>

La forme $\Omega = d\Theta$ de degré $n+1$ sur $J_1(Y)$ joue un rôle crucial en mécanique. On dira qu'un champ de vecteurs ξ sur $J_1(Y)$ est localement hamiltonien si la dérivée de Lie de Ω le long de ξ est nulle, i.e.

$$\mathcal{L}_\xi \Omega = 0 .$$

Puisque $d\Omega = 0$, cette condition équivaut à

$$d(\xi \lrcorner \Omega) = 0 .$$

On peut donc écrire localement $\xi \lrcorner \Omega = d\tau$, où τ est une forme de degré $n-1$. On dira qu'un champ de vecteurs ξ sur $J_1(Y)$ est (globalement) hamiltonien s'il existe une forme τ de degré $n-1$ sur $J_1(Y)$ telle que

(8) $$\xi \lrcorner \Omega = d\tau .$$

Si ξ_1, ξ_2 sont des champs de vecteurs localement hamiltoniens sur $J_1(Y)$, alors

$$[\xi_1, \xi_2] \lrcorner \Omega = \mathcal{L}_{\xi_1}(\xi_2 \lrcorner \Omega)$$

et

$$d([\xi_1, \xi_2] \lrcorner \Omega) = \mathcal{L}_{\xi_1}(d(\xi_2 \lrcorner \Omega)) = 0 .$$

Donc $[\xi_1, \xi_2]$ est localement hamiltonien, et les champs de vecteurs localement hamiltoniens sur $J_1(Y)$ forment une algèbre de Lie. Si ξ_2 est hamiltonien, alors il existe une forme τ_2 de degré $n-1$ sur $J_1(Y)$ avec

$$\xi_2 \lrcorner \Omega = d\tau_2 .$$

On a

$$[\xi_1,\xi_2] \lrcorner \Omega = \mathcal{L}_{\xi_1} d\tau_2 = d(\mathcal{L}_{\xi_1}\tau_2) \tag{9}$$

et par conséquent $[\xi_1,\xi_2]$ est globalement hamiltonien. L'ensemble $\mathfrak{G}$ des champs de vecteurs hamiltoniens sur $J_1(Y)$ est donc un idéal de l'algèbre de Lie des champs localement hamiltoniens. Si $\xi_2 \lrcorner \Omega = 0$, alors d'après (9), $[\xi_1,\xi_2] \lrcorner \Omega = 0$. Donc les champs ξ de $\mathfrak{G}$ vérifiant

$$\xi \lrcorner \Omega = 0 \tag{10}$$

forment un idéal de l'algèbre des champs localement hamiltoniens. L'algèbre quotient $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ par cet idéal s'appelle l'algèbre hamiltonienne ; on notera $[\xi]$ l'image dans $\mathfrak{H}$ d'un élément ξ de $\mathfrak{G}$.

Soit $\mathfrak{P}$ l'espace des formes τ de degré $n-1$ vérifiant la relation (8) avec $\xi \in \mathfrak{G}$. Un élément τ de $\mathfrak{P}$ détermine $[\xi] \in \mathfrak{H}$ et l'on a donc une application surjective $\mathfrak{P} \to \mathfrak{H}$. L'espace $Z^{n-1}(J_1(Y))$ des formes de degré $n-1$ fermées sur $J_1(Y)$ est un sous-espace de $\mathfrak{P}$ et la suite

$$0 \to Z^{n-1}(J_1(Y)) \to \mathfrak{P} \to \mathfrak{H} \to 0 \tag{11}$$

est exacte. Soit P le quotient de $\mathfrak{P}$ par le sous-espace $B^{n-1}(J_1(Y))$ des formes de degré $n-1$ exactes. Par passage au quotient, l'application $\mathfrak{P} \to \mathfrak{H}$ nous donne une application $P \to \mathfrak{H}$ et (11) nous donne la suite exacte

$$0 \to H^{n-1}(J_1(Y),\mathbb{R}) \to P \to \mathfrak{H} \to 0 \,. \tag{12}$$

Définissons une opération anti-symétrique

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \to \mathfrak{P} \quad ,$$

le crochet de Poisson. Si $\tau_1,\tau_2 \in \mathfrak{P}$ et

$$d\tau_1 = \xi_1 \lrcorner \Omega$$

$$d\tau_2 = \xi_2 \lrcorner \Omega \quad ,$$

où $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$, posons

$$(13) \qquad \{\tau_1, \tau_2\} = \xi_1 \lrcorner d\tau_2 = \xi_1 \lrcorner \xi_2 \lrcorner \Omega \ .$$

La dernière de ces expressions montre que le crochet de Poisson est anti-symétrique et que $\{\tau_1, \tau_2\}$ est une forme de degré $n-1$ bien définie. D'après (9), on a

$$(14) \qquad d\{\tau_1, \tau_2\} = [\xi_1, \xi_2] \lrcorner \Omega \ .$$

Examinons l'identité de Jacobi. D'après (14), on a

$$\begin{aligned} \{\{\tau_1, \tau_2\}, \tau_3\} &= [\xi_1, \xi_2] \lrcorner d\tau_3 \\ &= \mathcal{L}_{\xi_1}(\xi_2 \lrcorner d\tau_3) - \xi_2 \lrcorner \mathcal{L}_{\xi_1} d\tau_3 \\ &= \mathcal{L}_{\xi_1}\{\tau_2, \tau_3\} - \xi_2 \lrcorner d\{\tau_1, \tau_3\} \\ &= \xi_1 \lrcorner d\{\tau_2, \tau_3\} + d(\xi_1 \lrcorner \{\tau_2, \tau_3\}) - \{\tau_2, \{\tau_1, \tau_3\}\}, \end{aligned}$$

ou

$$(15) \qquad \{\{\tau_1, \tau_2\}, \tau_3\} = \{\tau_1, \{\tau_2, \tau_3\}\} + \{\{\tau_1, \tau_3\}, \tau_2\} + d(\xi_1 \lrcorner \xi_2 \lrcorner \xi_3 \lrcorner \Omega) .$$

Par conséquent, l'identité de Jacobi est vraie pour $\mathcal{P}$ au terme $d(\xi_1 \lrcorner \xi_2 \lrcorner \xi_3 \lrcorner \Omega)$ près. Si $n = 1$, ce terme est nul puisque Ω est une forme de degré 2 ; dans ce cas $\mathcal{P} = P$ est une algèbre de Lie.

Le crochet de Poisson de $\mathcal{P}$ passe au quotient d'après (13) et nous donne un crochet de Poisson sur P . D'après (15) pour ce crochet de Poisson, l'identité de Jacobi est vraie; donc P est une algèbre de Lie, l'algèbre de Poisson. D'après (14), la suite (12) est une suite exacte d'algèbres de Lie, où $H^{n-1}(J_1(Y), \mathbb{R})$ est considéré comme un idéal abélien de P .

Si $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R} \times M$, la fibre de $J_1(Y)$ au-dessus de $t \in \mathbb{R}$ s'identifie à $T(M)$, et au-dessus de t la transformation de Legendre est une application

$$\sigma(L)_t : T(M) \to T^*(M) \ ,$$

que l'on supposera être une immersion. Si β est la 2-forme symplectique sur $T^*(M)$, alors la 2-forme $\sigma(L)_t^*\beta$ nous donne une structure symplectique sur $T(M)$; d'où pour $t \in \mathbb{R}$, un crochet de Poisson défini à l'aide de cette structure sur l'espace $C^\infty(\{t\} \times T(M))$ des fonctions différentiables à valeurs réelles sur la fibre de $J_1(Y)$ au-dessus de t, qui devient alors une algèbre de Lie. Si $\sigma(L)$ est une immersion, alors pour $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\mathcal{P} \to C^\infty(\{t\} \times T(M)) , \tag{16}$$

qui à une forme $f \in \mathcal{P}$ de degré 0 fait correspondre sa restriction à la fibre de $J_1(Y)$ au-dessus de t, est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Ceci découle du fait que f appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe un champ de vecteurs ξ <u>vertical</u> sur $J_1(Y)$ tel que

$$df = \xi \lrcorner \Omega ,$$

qui est bien déterminé par cette condition, ou si $\zeta . f = 0$, c'est-à-dire si f est localement constant le long des courbes de la forme $u = j_1(s)$, où s est une extrémale. En coordonnées locales (cf. §3), on a

$$\xi = - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial p^j} \frac{\partial}{\partial q^j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^j}$$

et si $f, g \in \mathcal{P}$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p^j} - \frac{\partial f}{\partial p^j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) .$$

Donc l'algèbre $\mathcal{P}$ peut être considérée comme un espace de "fonctions sur l'ensemble des extrémales".

Si le champ d'Euler ζ engendre un groupe à 1-paramètre de difféomorphismes φ_t de $J_1(Y)$, l'application (16) est un isomorphisme d'algèbres de Lie, et P est de dimension infinie. Les opérateurs de la mécanique quantique proviennent d'une représentation (fidèle) de l'algèbre $C^\infty(\{t\} \times T(M))$ et donc de P.

Revenons maintenant au cas général. Il semblerait que, si $n \geq 3$, en général l'algèbre P soit de dimension finie. Par contre, on peut, d'une manière purement formelle, considérer P comme un espace de "fonctions sur l'ensemble des extrémales". Pour toute extrémale s et tout $\tau \in \mathcal{P}$, on a

$$du^*\tau = u^*d\tau = u^*(\xi \lrcorner \Omega) = 0$$

si $u = j_1(s)$ et si τ vérifie (8), d'après le théorème 1 ; donc $u^*\tau$ est une forme fermée de degré $n-1$ sur X dont la classe de cohomologie $[\tau](s)$ dans $H^{n-1}(X,\mathbb{R})$ ne dépend que de l'image de τ dans P. Tout élément de P définit ainsi une fonction sur l'ensemble des extrémales à valeurs dans $H^{n-1}(X,\mathbb{R})$. Supposons maintenant que X soit de la forme $X = \mathbb{R} \times X_o$, où X_o est une variété orientée de dimension $n-1$ et que le support de τ vérifie la condition suivante. Si $pr_1 : \mathbb{R} \times X_o \to \mathbb{R}$ est la projection sur le premier facteur, on suppose que $pr_1 : \pi(\operatorname{supp} \tau) \to \mathbb{R}$ soit propre. Considérons les "surfaces genre espace" $Z_t = \{t\} \times X_o$, si $t \in \mathbb{R}$. Si ι_t est l'injection de Z_t dans X, on obtient une forme fermée $\iota_t^* u^*\tau$ de degré $n-1$ sur Z_t à support compact ; l'intégrale

$$\hat{\iota}(s) = \int_{Z_t} \iota_t^* u^*\tau$$

est indépendante de t et on obtient ainsi, pour chaque élément de P, une fonction $\hat{\tau}$ à valeurs réelles sur l'ensemble des extrémales.

Supposons qu'une famille à 1-paramètre de difféomorphismes $\Psi_t : J_1(Y) \to J_1(Y)$ soit une symétrie du système, i.e.

$$\Psi_t^*\Theta = \Theta .$$

Si ξ est le générateur infinitésimal de Ψ_t, alors

$$0 = \mathcal{L}_\xi\Theta = \xi \lrcorner \Omega + d(\xi \lrcorner \Theta),$$

de sorte que l'on ait (8) avec $\tau = -\xi \lrcorner \Theta$. Donc à toute symétrie correspond un élément $\tau \in P$. Supposons que Ψ_t satisfasse à $\pi \circ \Psi_t = \bar{\varphi}_t \circ \pi$, où $\bar{\varphi}_t$ est une famille à 1-paramètre de difféomorphismes de X . Si u est une section de $J_1(Y)$ sur X , en posant $u_t = \Psi_t \circ u \circ \bar{\varphi}_t^{-1}$, l'équation (7) est vérifiée. Si $\bar{\xi}$ est le générateur infinitésimal de $\bar{\varphi}_t$, alors le champ de vecteurs le long de u tangent à u_t est

$$\xi \circ u - u_* \bar{\xi} \ ;$$

donc si s est une extrémale et $u = j_1(s)$, alors la forme fermée de degré $n-1$ donnée par le théorème de Noether est précisément $-u^* \tau$.

Université scientifique et médicale
de
GRENOBLE

REFERENCES

[1] H. GOLDSCHMIDT Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations.
J. Differential Geometry, 1 (1967), pp. 269-307 .

[2] H. GOLDSCHMIDT and S. STERNBERG
The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[3] S. STERNBERG Lectures on differential geometry.
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1964.