Haïm Brézis

Nouveaux théorèmes de régularité pour les problèmes unilatéraux

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1971, tome 12 « Conférences de H. Brézis, D. Ruelle et F. Takens et un texte de R. Gérard et Mme A. Sec », , exp. nº 1, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1971__12__A1_0>

NOUVEAUX THEOREMES DE REGULARITE POUR LES PROBLEMES UNILATERAUX

par Haïm BREZIS

On rencontre en physique et en mécanique un certain nombre de phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles et soumis "en plus" à des <u>contraintes unilatérales</u>. Par exemple, on impose à la solution d'être supérieure à une valeur critique ψ et lorsque la solution u atteint la valeur ψ, alors le problème "change de nature" de manière à préserver la contrainte $u \geq \psi$.

Pour simplifier l'exposé, nous considérons seulement le cas d'opérateurs elliptiques d'ordre 2, mais des problèmes de même nature peuvent être posés pour des opérateurs paraboliques ou hyperboliques. En général on ne pourra pas obtenir de solution au sens classique (C^2 par exemple). Dans une première étape on est donc amené à envisager une formulation faible (variationnelle). On établit ensuite que la solution appartient aux espaces de Sobolev $W^{2,p}$ (résultat comparable à celui de [2] et [8]). Enfin on atteint <u>le seuil de régularité dans les espaces de Sobolev fractionnaires</u> en montrant que $u \in W^{s,p}$ pour tout $1 < p < +\infty$ et $s < 2 + \frac{1}{p}$.

I. <u>FORMULATION ABSTRAITE VARIATIONNELLE</u>.

Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ de dual V'.

Soit A un opérateur linéaire continu et coercif de V dans V', i.e. $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V, \ \alpha > 0$.

Soit φ une fonction convexe s.c.i. de V dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$. On pose $D(\varphi) = \{u \in V \ ; \ \varphi(u) < +\infty\}$.

<u>THEOREME 1</u>. - <u>Pour tout</u> $f \in V'$, <u>il existe</u> $u \in D(\varphi)$ <u>unique solution de l'inéquation</u>

(1) $$(Au , v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f , v-u) \qquad \forall v \in D(\varphi) \ .$$

Le théorème 1 est dû à F. Browder [4] . C'est une variante d'un résultat antérieur de G. Stampacchia [10] qui avait considéré le cas particulier où φ est la fonction indicatrice d'un convexe fermé K de V

i.e. $\varphi(u) = I_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \in K \\ +\infty & \text{si} \quad u \notin K \end{cases}$.

<u>Remarque 1</u>.

Dans le cas particulier où φ est <u>différentiable</u>, l'inéquation (1) s'écrit $Au + \varphi'(u) = f$. Plus généralement, en utilisant la notation commode du <u>sous-différentiel</u>

$$\partial\varphi(u) = \{g \in V' \ ; \ \varphi(v) - \varphi(u) \geq (g,v-u) \qquad \forall v \in D(\varphi)\}$$

l'inéquation (1) s'écrit $Au + \partial\varphi(u) \ni f$.

<u>Remarque 2</u>.

Lorsque $A^* = A$, il est aisé de vérifier que l'inéquation (1) est équivalente au problème de minimisation

$$\underset{v \in V}{\text{Min}} \left\{ \tfrac{1}{2}(Av,v) + \varphi(v) - (f,v) \right\} \quad .$$

En particulier si $\varphi = I_K$, on cherche à minimiser l'"énergie" d'un système soumis à des contraintes unilatérales représentées par le convexe K .

<u>QUELQUES EXEMPLES</u>.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière très régulière Γ .

Soit $V = H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\}$

Soit $Au = -\Delta u$ ou plus précisément $(Au,v) = \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx$.

Exemple 1.

Soit $\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi \leq 0$ sur Γ et soit $K = \{v \in H_0^1(\Omega)$; $v \geq \psi$ p.p. sur $\Omega\}$. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe, d'après le théorème 1 , $u \in K$ unique vérifiant

$$\sum_i \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \geq \int_\Omega f.(v-u)dx \qquad \forall v \in K .$$

On en déduit formellement que p.p. sur Ω on a

ou bien $\quad u > \psi \quad$ et $\quad -\Delta u = f$

ou bien $\quad u = \psi \quad$ et $\quad -\Delta u \geq f$.

Par ailleurs, d'après la Remarque 2, u minimise sur K la fonctionnelle $\frac{1}{2}\int_\Omega |\text{grad} v|^2 dx - \int_\Omega f.\,v\,dx$.

En particulier si $f = 0$ et $\Omega =]0,1[$, on vérifie aisément que la solution u peut être "matérialisée" en tendant un fil joignant dans $\mathbb{R}^2$ les points $(0,0)$ et $(1,0)$ passant au-dessus du graphe de ψ .

Exemple 2.

Soit j une fonction convexe s.c.i. de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty,+\infty]$, $j \not\equiv +\infty$ et soit $\beta = \partial j$. β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i.e. β est une application multivoque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son graphe monotone, éventuellement discontinu, contient pour tout x l'intervalle $[\beta(x-), \beta(x+)]$.

Il est clair que la fonction $\quad \varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u)dx & \text{si } j(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$

est convexe s.c.i. sur V .

Dans ce cas, l'interprétation formelle de l'inéquation (1) est $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ sur Ω , $u = 0$ sur Γ au sens suivant :

si β est univoque en u , on a $-\Delta u + \beta(u) = f$

si β est multivoque en u , on a $f + \Delta u \in \beta(u)$.

Cas particuliers.

a) $j(r) = |r|$, on a alors

$$\begin{array}{lll} -\Delta u + 1 = f & \text{sur} & [u > 0] \\ -\Delta u - 1 = f & \text{sur} & [u < 0] \\ -1 \leq \Delta u + f \leq +1 & \text{sur} & [u = 0] \end{array}$$

b) $j(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \geq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}$, on a alors

$$\begin{array}{lll} -\Delta u = f & \text{sur} & [u > 0] \\ -\Delta u \geq f & \text{sur} & [u = 0] \end{array}$$

On notera que le problème considéré à l'exemple 1 s'écrit aussi $-\Delta u + \beta(u-\psi) \ni f$. Lorsque $\psi = 0$ sur Γ , on peut d'ailleurs se ramener après le changement de u en $u + \psi$ à un problème de la forme $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ sur Ω et $u = 0$ sur Γ .

Remarque 3.

De nombreux autres choix de φ conduisent à des problèmes d'intérêt physique (cf. [1]) . En particulier $\varphi = I_K$ où $K = \{v \in H_0^1(\Omega)\ ;\ |\text{grad}\, v| \leq 1$ p.p. sur $\Omega\}$, $\varphi(v) = \int_\Omega |\text{grad}\, v|\, dx$, $\varphi(v) = \int_\Gamma j(v)\, d\Gamma$ etc....

II. REGULARITE.

Nous nous limiterons à l'étude détaillée du problème présenté à l'exemple 2 i.e. $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ sur Ω $u = 0$ sur Γ . La solution explicite exhibée à l'exemple 1 montre que, en général, même si f est très régulière, $u \notin C^2$ et $u \notin W^{3,p}$ pour $p \geq 1$ (1) .

---

(1) On désigne par $W^{s,p}$ l'espace de Sobolev d'ordre s sur L^p , s entier ou fractionnaire.

Il est donc intéressant de déterminer avec précision <u>le seuil de régularité</u> de u, i.e. la régularité optimale de u en supposant f très régulière.

Dans la suite on désigne par β un graphe maximal monotone dans $R \times R$ tel que $0 \in \beta(0)$. Voici un premier résultat comparable à ceux obtenus dans [2] et [8].

<u>THEOREME 2</u>. - <u>Soit</u> $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < +\infty$. <u>Il existe</u> $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ <u>unique vérifiant</u>

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f \qquad \text{p.p. sur } \Omega .$$

<u>De plus</u> $f \in \beta(u)$ p.p. <u>sur</u> $\{x \in \Omega ; \beta$ <u>est multivoque en</u> $u(x)\}$. <u>On a l'estimation</u>

(2) $$\|\Delta u\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}$$

<u>et en particulier</u> $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ <u>si</u> $f \in L^\infty(\Omega)$.

<u>D'autre part, désignons par</u> u <u>et</u> $\hat{u}$ <u>les solutions respectives associées à</u> f <u>et</u> $\hat{f}$; <u>on a alors</u>

(3) $$\|\Delta(u-\hat{u})\|_{L^1} \leq 2\|f-\hat{f}\|_{L^1} .$$

Nous résumons dans le lemme suivant quelques propriétés élémentaires des graphes maximaux monotones (cf. par exemple [5]).

<u>LEMME 1</u>. - Soit β un graphe maximal monotone dans $R \times R$. Alors $R(I+\lambda\beta) = R$ pour tout $\lambda > 0$ et $(I+\lambda\beta)^{-1}$ est une contraction de R dans R. La régularisée Yosida β_λ de β, définie par $\beta_\lambda(r) = \frac{1}{\lambda}(r - (I+\lambda\beta)^{-1}r)$ est monotone croissante et lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

On a $\beta_\lambda(r) \in \beta((I+\lambda\beta)^{-1}r)$ pour tout $r \in R$.

Pour tout $r \in R$, $\beta(r)$ est un intervalle fermé ; on pose $D(\beta) = \{r \in R ; \beta(r) \neq \emptyset\}$ et $\beta^0(r)$ = projection de 0 sur $\beta(r)$.

Pour tout $r \in D(\beta)$, $|\beta_\lambda(r)| \le |\beta^o(r)|$ et $\beta_\lambda(r) \to \beta^o(r)$ quand $\lambda \to 0$.

Enfin si $f_n \in L^2(\Omega)$, $u_n \in L^2(\Omega)$, $f_n \in \beta(u_n)$ p.p. sur Ω , $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ faible, alors $f \in \beta(u)$ p.p. sur Ω . On utilisera aussi dans la démonstration du théorème 2 le

<u>LEMME 2</u>. - <u>Soit</u> $u \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ <u>et soit</u> γ <u>un graphe maximal monotone dans</u> $R \times R$ <u>tel que</u> $0 \in \gamma(0)$. <u>Soit</u> $g \in L^2(\Omega)$ <u>tel que</u> $g(x) \in \gamma(u(x))$ p.p. <u>sur</u> Ω , <u>alors</u>

$$\int_\Omega -\Delta u . g \, dx \ge 0 \, . \tag{4}$$

<u>DEMONSTRATION DU LEMME 2</u>. - On procède par régularisations successives.

a) Le lemme 2 est immédiat si de plus $\gamma \in C^1(R)$, $|\gamma| \le M$ et $|\gamma'| \le M$: on intègre par parties et on utilise le fait que $\gamma(u) = 0$ sur Γ ainsi que $\gamma' \ge 0$.

b) L'inégalité (4) est vérifiée à partir de a) lorsque γ est de plus lipschitzien et borné sur R en régularisant par exemple γ par convolution.

c) Il suffit de supposer γ lipschitzien en se ramenant au cas b) par troncature

$$\gamma^n(r) = \begin{cases} n & \text{si} \quad \gamma(r) \ge n \\ \gamma(r) & \text{si} \quad |\gamma(r)| \le n \\ -n & \text{si} \quad \gamma(r) \le -n \end{cases} \, .$$

Noter que $\gamma^n(u) \to \gamma(u)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$ d'après le théorème de Lebesgue.

d) On a $-\int_\Omega \Delta u . \gamma^o(u)\, dx \ge 0$; en effet, soit γ_λ la régularisée Yosida de γ . Grâce à c) il vient $-\int_\Omega \Delta u . \gamma_\lambda(u)\, dx \ge 0$. Or $\gamma_\lambda(u) \to \gamma^o(u)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\lambda \to 0$. Par conséquent $-\int_\Omega \Delta u . \gamma^o(u)\, dx \ge 0$; on achève alors la démonstration en notant, à l'aide du lemme suivant, que $\Delta u . \gamma^o(u) = \Delta u . g$ p.p. sur Ω .

<u>LEMME 3</u>. - <u>Soit</u> $u \in H^2(\Omega)$ <u>et soit</u> D <u>un sous-ensemble dénombrable de</u> R . <u>Alors</u> $\Delta u = 0$ p.p. <u>sur</u> $\{x \in \Omega \, ; \, u(x) \in D\}$.

<u>DEMONSTRATION DU LEMME 3</u>. - Il est bien connu que si $u \in H^1(\Omega)$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors $\operatorname{grad} u = 0$ p.p. sur $\{x \in \Omega ; u(x) = c\}$. Ceci est basé sur le fait que u est dérivable p.p. au sens classique, et un ensemble de mesure positive a dans toute direction une densité linéaire égale à un p.p. Appliquant à nouveau cet argument à $\operatorname{grad} u$, on voit que $\Delta u = 0$ p.p. sur $\{x \in \Omega ; u(x) = c\}$. On conclut en considérant une réunion dénombrable de tels ensembles.

<u>DEMONSTRATION DU LEMME 2</u>. - On suppose d'abord que $f \in L^\infty(\Omega)$. Soit u_λ la solution du problème approché

(5) $$-\Delta u_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) = f \quad \text{sur} \quad \Omega , \; u_\lambda = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma .$$

On sait déjà que ce problème admet une solution faible $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$. On déduit de l'équation (5) que $u_\lambda \in H^2(\Omega)$ et un argument de "remontée" permet d'aboutir à $\Delta u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$. Multipliant (5) par $|\beta_\lambda(u_\lambda)|^{p-2}\,\beta_\lambda(u_\lambda)$ on obtient à l'aide du lemme 2 (appliqué avec $\gamma(r) = |\beta_\lambda(r)|^{p-2}\,\beta_\lambda(r)$) que

$$\int_\Omega |\beta_\lambda(u_\lambda)|^p \, dx \le \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\beta_\lambda(u_\lambda)|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Par conséquent

$$\|\beta_\lambda(u_\lambda)\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|\Delta u_\lambda\|_{L^p} \le 2\|f\|_{L^p} .$$

Passons maintenant à la limite quand $\lambda \to 0$. On peut extraire une suite $\lambda_n \to 0$ telle que $u_{\lambda_n} \to u$ dans $L^2(\Omega)$, $(I+\lambda_n\beta)^{-1} u_{\lambda_n} \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\Delta u_{\lambda_n} \to \Delta u$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Comme $f + \Delta u_\lambda \in \beta((I+\lambda\beta)^{-1} u_\lambda)$, on conclut grâce au lemme 1 que $f + \Delta u \in \beta(u)$ p.p. sur Ω.

Dans le cas général où $f \in L^p(\Omega)$ avec $2 \le p < +\infty$, on commence par approcher f par une suite $f_n \in L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Soit u_n la solution correspondante de l'équation $-\Delta u_n + \beta(u_n) \ni f_n$ sur Ω, $u_n = 0$ sur Γ. Comme $\|\Delta u_n\|_{L^p} \le 2\|f_n\|_{L^p}$, on en déduit que $\|u_n\|_{W^{2,p}} \le C\|f_n\|_{L^p}$. Par conséquent on peut extraire une sous-suite $n_k \to +\infty$ telle que $u_{n_k} \to u$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible. On conclut à l'aide du lemme 1 que $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ p.p. sur Ω. Prouvons (3) ; on a $-\Delta u + g = f$ et $-\Delta\hat{u} + \hat{g} = \hat{f}$ avec $g \in \beta(u)$ et $\hat{g} \in \beta(\hat{u})$ p.p. sur Ω. Donc

(6) $$-\Delta(u-\hat{u}) + g - \hat{g} = f - \hat{f} \quad .$$

Multipliant (6) par

$$h(x) = \begin{cases} +1 & \text{sur} \quad [u > \hat{u}] \cup [g > \hat{g}] \\ -1 & \text{sur} \quad [u < \hat{u}] \cup [g < \hat{g}] \\ 0 & \text{sur} \quad [u = \hat{u}] \cap [g = \hat{g}] \end{cases}$$

on obtient grâce au lemme 2 , $\int_\Omega |g - \hat{g}|\,dx \le \int_\Omega |f - \hat{f}|\,dx$, (noter que $h \in \gamma(u-\hat{u})$ p.p. sur Ω avec $\gamma = \partial j$ et $j(r) = |r|$) .

Remarque 4. - On trouvera un résultat sensiblement plus général établi par une méthode différente dans [3] .

Notons par ailleurs que nous pouvons appliquer des théorèmes d'interpolation non linéaire de F. Browder, J.L. Lions, J. Peetre (cf. par exemple [11]) à l'opérateur $f \mapsto Tf = \Delta u$. En particulier, on déduit directement (2) pour tout $1 < p < +\infty$ à partir des estimations (3) et $\|\Delta u\|_{L^\infty} \le 2\|f\|_{L^\infty}$. D'autre part, on a $\|Tf - T\hat{f}\|_{H^{-1}} \le \|f - \hat{f}\|_{H^{-1}}$. Par conséquent T est lipschitzien dans les espaces d'interpolation entre L^1 et H^{-1} . De plus T applique $H^{-s}(\Omega)$ dans $H^{-s}(\Omega)$ pour $-1 < s < 0$ avec $\|Tf\|_{H^{-s}} \le C\|f\|_{H^{-s}}$.

THEOREME 3. - Supposons que $f \in L^2(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ et soit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ la solution du problème

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f \qquad \text{p.p. sur } \Omega$$

Alors Δu est à variation bornée (en général $\Delta u \notin W^{1,1}(\Omega)$) . Si de plus $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in W^{s,p}(\Omega)$, pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $s < 2 + \frac{1}{p}$ et on a une estimation de la forme

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C(s,p)\ (\|f\|_{W^{1,1}} + \|f\|_{L^\infty})\ .$$

DEMONSTRATION. - L'idée principale consiste à utiliser une majoration de la forme (3) appliquée à $f(x)$ et $\hat{f}(x) = f(x+h)$. Comme Ω a un bord, nous avons à reprendre cette estimation en 3 étapes :

a) estimation intérieure

b) estimation tangentielle au voisinage du bord

c) estimation normale au voisinage du bord.

Soit u_λ la solution du problème approché

$$(7) \qquad -\Delta u_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) = f \quad \text{sur} \quad \Omega \quad , \quad u_\lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\ .$$

On se propose de montrer que

$$(8) \qquad \|\Delta u_\lambda\|_{W^{1,1}} \leq C(\|f\|_{W^{1,1}} + \|f\|_{L^2})$$

où C est indépendant de λ , ce qui permet d'en déduire après passage à la limite quand $\lambda \to 0$ que Δu est à variation bornée.

Pour simplifier les notations, nous supprimons dans la suite l'indice λ .

a) Estimation intérieure.

On pose

$$\theta_\varepsilon(r) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad r \geq \varepsilon \\ r/\varepsilon & \text{si} \quad |r| < \varepsilon \\ -1 & \text{si} \quad r \leq -\varepsilon \end{cases}$$

Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\zeta \geq 0$. Multipliant (7) par $-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\zeta\ \theta_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right)$ on obtient après intégration par parties

$$\sum_{i,k} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\ \theta_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right) dx + \sum_k \int_\Omega \beta'(u) \frac{\partial u}{\partial x_k}\ \theta_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \zeta\, dx = \sum_k \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \theta_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \zeta\, dx.$$

Par suite

$$\sum_k \int_\Omega \beta'(u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\zeta\,dx \le \sum_{i,k}\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right| dx + \sum_k \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \zeta\,dx \quad .$$

Passant à la limite quand $\epsilon \to 0$, il vient

$$\sum_k \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\beta(u)\right|\zeta\,dx = \sum_k \int_\Omega \beta'(u)\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|\zeta\,dx \le \sum_{i,k}\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right| dx$$

$$+ \sum_k \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\zeta\,dx$$

b) <u>Estimation tangentielle au voisinage du bord.</u>

Par cartes locales on peut se ramener au cas où l'équation

$$(9) \qquad -\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \beta(u) = f$$

est satisfaite sur $U = V \cap \mathbb{R}^n_+$ où V est un voisinage de 0 , $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) ;$ $x_n > 0\}$, et où les fonctions $a_{ij}(x)$ sont très régulières, $a_{ij} = a_{ji}$ et $\sum_{i,j} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \ge a\,|\xi|^2$ avec $a > 0$, $\forall\,\xi \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\zeta \ge 0$ à support compact dans V . Multipliant (9) par $-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\zeta\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right)$, $1 \le k \le n-1$, il vient après des intégrations par parties

$$(10) \qquad \int_U \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\zeta\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right)dx + \int_U \beta'(u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\zeta\,dx$$

$$= \int_U \frac{\partial f}{\partial x_k}\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\zeta\,dx \ .$$

Le premier terme de (10) s'écrit aussi

$$\int_U \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\zeta\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right) + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\zeta\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right)\right\}dx$$

$$= \int_U \sum_{i,j}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot\zeta\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\,\theta'_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\zeta\right.$$

$$\left. + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\,\theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right\}dx \ \ge\ -C\|u\|_{W^{2,1}(U)}$$

où C dépend uniquement des a_{ij} et de ζ.

On notera que sur $V \cap [x_n = 0]$ on a $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$, $\theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_k}) = 0$.

On déduit alors de (10) que

$$\int_U \beta'(u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_k})\zeta\, dx \leq \int_U \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \zeta\, dx + C\|u\|_{W^{2,1}(U)} .$$

Passant à la limite quand $\epsilon \to 0$ on obtient

$$\int_U \left| \frac{\partial}{\partial x_k}(\beta(u))\right| \zeta\, dx \leq \int_U \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \zeta\, dx + C\|u\|_{W^{2,1}(U)} .$$

c) <u>Estimation normale au voisinage du bord.</u>

Multipliant (9) par $-\frac{\partial}{\partial x_n}(\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n}))$ il vient après intégration sur U

$$(11) \quad \int_U \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}(\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n}))\, dx + \int_U \beta'(u)\frac{\partial u}{\partial x_n}\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})\zeta\, dx$$

$$= \int_U \frac{\partial f}{\partial x_n}\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})dx + \int_{\partial U} f\, \zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})d\Gamma .$$

Etudions le premier terme de (11) ; on a

$$\int_U \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}(\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n}))dx = \int_U \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_n}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n}))dx$$

$$- \int_{\partial U} \sum_{j \neq n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{nj}\frac{\partial u}{\partial x_n})\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})d\Gamma$$

$$= \int_U \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})) + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_i}))\right\} dx$$

$$- \int_{\partial U} \sum_{j \neq n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{nj}\frac{\partial u}{\partial x_n})\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})\, d\Gamma = \int_U \sum_{i,j} -\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_i})\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})\, dx$$

$$- \int_{\partial U} \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}\zeta\, \theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})\, d\Gamma$$

$$+ \int_U \sum_{i,j} \left\{ a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_n} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_n}\theta'_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})\zeta + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_n}\theta_\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x_n})\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right\} dx$$

$$- \int_{\partial U} \sum_{j \neq n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{nj} \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \zeta\, \theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\Gamma \geq -C\|u\|_{W^{2,1}(U)} - \int_{\partial U} \sum_{j \neq n} a_{nj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_n} \zeta\, \theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\Gamma .$$

On a utilisé ici l'estimation (cf. [6]) :

$\int_{\partial U} |f|\, d\Gamma \leq C\|f\|_{W^{1,1}(U)}$ pour tout $f \in W^{1,1}(U)$ et en particulier

$\int_{\partial U} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right| d\Gamma \leq C\|u\|_{W^{2,1}(U)}$. Or si $j \neq n$, on a

$$\int_{\partial U} a_{nj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_n} \zeta\, \theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\Gamma = \int_{\partial U} \zeta\, a_{nj} \frac{\partial}{\partial x_j}\, \omega_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\Gamma$$

$= - \int_{\partial U} \omega_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta\, a_{nj})\, d\Gamma \leq C\|u\|_{W^{2,1}(U)}$, avec $\omega'_\epsilon = \theta_\epsilon$, $\omega_\epsilon(0) = 0$ de sorte que $|\omega_\epsilon(r)| \leq r$. Il résulte alors de (11) que

$$\int_U \beta'(u) \frac{\partial u}{\partial x_n}\, \theta_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \zeta\, dx \leq C(\|u\|_{W^{2,1}(U)} + \|f\|_{W^{1,1}(U)})$$

où C dépend uniquement de a_{ij} et de ζ .

Passant à la limite quand $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\int_U \left|\frac{\partial}{\partial x_n}(\beta(u))\right| \zeta\, dx \leq C(\|u\|_{W^{2,1}(U)} + \|f\|_{W^{1,1}(U)}) .$$

Combinant les 3 estimations et revenant à u_λ il vient

$$\|\Delta u_\lambda\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C(\|u_\lambda\|_{W^{2,1}(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,1}(\Omega)})$$

où C dépend uniquement de Ω . Comme $\|u_\lambda\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, on en déduit, en faisant tendre λ vers 0 , que Δu est à variation bornée. On notera que l'hypothèse "f à variation bornée" est en fait suffisante pour en conclure que Δu est à variation bornée.

D'autre part, pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $\sigma < \frac{1}{p}$ on a $W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset W^{\sigma,p}(\Omega)$ avec injection continue ; en effet

$$\|u\|^p_{W^{\sigma,p}} = \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx\, dy \le 2\|u\|^{p-1}_{L^\infty} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|\, dx\, dy}{|x-y|^{n+\sigma p}}$$

$$= 2\|u\|^{p-1}_{L^\infty}\|u\|_{W^{\sigma p,1}} \le C\|u\|^{p-1}_{L^\infty}\|u\|_{W^{1,1}}$$

Par conséquent $\|\Delta u_\lambda\|_{W^{\sigma,p}} \le C(\|f\|_{W^{1,1}} + \|f\|_{L^\infty})$ et $\Delta u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$. On obtient alors (cf.[9]) $u \in W^{2+\sigma,p}(\Omega)$.

Remarque 5.

Divers problèmes restent ouverts ; citons en particulier les suivants :

a) On sait, d'après le théorème 2 que pour $f \in L^\infty(\Omega)$ on a $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $\alpha < 1$. D'autre part l'exemple 1 montre qu'en général $u \notin C^2(\overline{\Omega})$. Il serait intéressant de savoir si $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ (un résultat dans cette direction a été établi en [7]) .

b) L'hypothèse $f \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ avec $0 < \sigma < 1/p$ est-elle suffisante pour conclure que $\Delta u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS — Problèmes unilatéraux J. Math. Pures Appl. (1972)

[2] H. BREZIS - G. STAMPACCHIA — Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques Bull. Soc. Math. Fr. 96 (1968), p. 153 - 180 .

[3] H. BREZIS - W. STRAUSS — (A paraître).

[4] F. BROWDER — On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone non linear operators in Banach Spaces Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 56 (1966), p. 1080 - 1086 .

[5] M. CRANDALL - A. PAZY — Semi groups of non linear contractions and dissipative sets J. Funct. Anal. 3 (1969) , p. 376 - 418 .

[6] E. GAGLIARDO — Caratterizzazione delle trace sulla frontiera... Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957), p. 284 - 305 .

[7] D. KINDERLEHRER — The coincidence set of solutions of certain variational inequalities. Arch. Rat. Mech. Anal. 40 (1971), p. 231 - 250 .

[8] H. LEWY - G. STAMPACCHIA — On the regularity of the solution of a variatianal inequality Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), p. 153 - 188 .

[9] J.L. LIONS - E. MAGENES — Problèmes aux limites non homogènes Ann. Sc. Norm. Pisa 16 (1962) p. 1 - 44 .

[10] G. STAMPACCHIA — Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes C.R. Acad. Sci. Paris 258 (1964) , p. 4413 - 4416 .

[11] L. TARTAR — Interpolation non linéaire (A paraître) .