

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

H. EPSTEIN

V. GLASER

Le rôle de la localité dans la renormalisation perturbative en théorie quantique des champs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1970, tome 11
« Conférences de H. Epstein et V. Glaser, R. Gérard, J.J. Loeffel et A. Martin, P. Schapira », , exp. n° 1, p. 1-80

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1970__11__A1_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE RÔLE DE LA LOCALITE DANS LA RENORMALISATION PERTURBATIVE
EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS *)

H. Epstein et V. Glaser
CERN - Genève

R E S U M E

Cette conférence, faite à la réunion de Strasbourg de mai 1970 résume un article à paraître prochainement par les mêmes auteurs ¹⁾.

*) Conférence présentée à la réunion de mai 1970 de la R.C.P. No 25 à Strasbourg.

I. - INTRODUCTION

Comme plusieurs conférenciers l'ont déjà souligné au cours de réunions précédentes à Strasbourg, aucune preuve n'a été donnée jusqu'à ce jour de l'existence de théories quantiques des champs non triviales. En particulier les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des théories Lagrangiennes (telles que l'électrodynamique quantique) sont exposées en détail dans les références 2) et 3).

Il existe toutefois des solutions de ces théories au sens des séries formelles de paramètres appelés "constantes de couplage" ; ce sont les "solutions perturbatives".

La détermination du terme général de ces séries est l'objet de la théorie de la renormalisation perturbative. Celle-ci, l'un des grands triomphes de la physique théorique d'après-guerre, s'est d'abord présentée comme un ensemble de prescriptions quelque peu mystérieuses. Puis le succès expérimental de l'électrodynamique quantique, la force de l'habitude, et les travaux de clarification de nombreux auteurs, l'ont rendue à la fois mathématiquement respectable et intuitivement naturelle. Cependant tous ces travaux n'ont pas épuisé le sujet, et ceci pour plusieurs raisons :

- (i) - les preuves d'existence des termes de la série 4), 3), 5) sont d'une assez grande complexité et ne mettent pas en lumière les justifications de la méthode générale de soustraction des divergences ("R opération" de Bogoliubov) ;
- (ii) - il n'est pas évident que la solution obtenue vérifie (au sens des séries formelles) les propriétés requises par la théorie axiomatique, en particulier la localité et l'unitarité (voir plus loin) ;
- (iii) - enfin il est très important de connaître toutes les propriétés de la solution perturbative car il ressort des travaux récents de Glimm, Jaffe, etc., que la théorie des perturbations fournit de très précieuses indications sur la solution non perturbative lorsqu'elle existe.

Dans cette conférence, nous nous proposons de montrer qu'en approfondissant un peu une méthode proposée depuis fort longtemps ^{6),7),8)}, on arrive à une preuve très naturelle de l'existence de la solution perturbative (c'est-à-dire de la finitude des amplitudes renormalisées à tout ordre) et de la localité de cette solution. (Cette localité résulte aussi d'un travail indépendant de J. Bros, à paraître, qui utilise une méthode complètement différente.)

Pour simplifier, nous limiterons notre attention à une théorie comportant un seul champ scalaire neutre et massif $\hat{A}(x)$, et "définie" par la donnée d'une densité Lagrangienne

$$\mathcal{L}_0(\hat{A}(x), \frac{\partial}{\partial x_\mu} \hat{A}(x)) + g(x) \mathcal{L}_1(\hat{A}(x))$$

$\mathcal{L}_0$ = Lagrangien libre ; $\mathcal{L}_1$ = Lagrangien d'interaction ; g = constante de couplage. En fait il est utile de considérer un Lagrangien plus général

$$\mathcal{L}_0(\hat{A}(x), \frac{\partial}{\partial x_\mu} \hat{A}(x)) + g(x) \mathcal{L}_1(\hat{A}(x)) + Q(x) \hat{A}(x)$$

où la constante de couplage g a fait place à une "fonction de couplage" $g(x)$ (numérique) et où on a ajouté à l'interaction le terme $Q(x) \hat{A}(x)$, Q étant une fonction numérique qu'on se donne ("source"). Plus généralement encore on va utiliser

$$\mathcal{L}_0(\hat{A}(x)) + \sum_{j=1}^P g_j(x) \mathcal{L}_j(\hat{A}(x))$$

ou, en notation condensée

$$\mathcal{L}_0(\hat{A}(x)) + \underline{g}(x) \mathcal{L}(\hat{A}(x))$$

$$\underline{g} = \{g_1, \dots, g_p\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p\}$$

$\mathcal{L}_1$ sera le véritable Lagrangien d'interaction, et $\mathcal{L}_p(\hat{A}(x)) = \hat{A}(x)$. Les autres $\mathcal{L}_j$ sont des quantités qu'on se propose d'étudier (courants, etc.).

En partant de ce Lagrangien, si on suppose que les fonctions g_j décroissent à l'infini, par exemple $g_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, des considérations heuristiques sur lesquelles nous ne nous étendrons pas conduisent à conjecturer l'existence d'une "matrice S" (opérateur de scattering) qui est une fonctionnelle de $\underline{g}$, et dont on va décrire les propriétés.

La scène se passe maintenant dans l'espace de Fock $\mathcal{F}$ d'un champ scalaire neutre libre $A(x)$ (c'est le champ asymptotique entrant de la théorie) de masse $m > 0$. Rappelons que $\mathcal{F}$ est un espace de Hilbert,

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

$$\mathcal{F}_0 = \mathbb{C}$$

$\mathcal{F}_n$ = espace de fonctions complexes symétriques de n quadrivecteurs $p_1, \dots, p_n$ où $p_j = (p_j^0, \vec{p}_j)$ est astreint à décrire le demi-hyperboloïde $p_j^2 \equiv (p_j^0)^2 - (\vec{p}_j)^2 = m^2$, $p_j^0 > 0$; les fonctions $\Phi^{(n)}$ formant $\mathcal{F}_n$ sont celles pour lesquelles

$$\|\Phi^{(n)}\|^2 = \int |\Phi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)|^2 \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_j}{2\sqrt{\vec{p}_j^2 + m^2}} < \infty$$

Pour tout vecteur $\Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0,1,2,\dots}$ de $\mathcal{F}$ on a

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^{(n)}\|^2$$

Le vide Ω est le vecteur $\{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$.
Pour toute transformation $\{a, \Lambda\}$ du groupe de Poincaré orthochrone on définit par la formule

$$(U(a, \Lambda)\Phi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = e^{ia \sum_{j=1}^n p_j} \Phi^{(n)}(\Lambda^{-1} p_1, \dots, \Lambda^{-1} p_n)$$

une représentation unitaire fortement continue du groupe.

Le sous-espace D_0 de $\mathcal{F}$ est formé des vecteurs $\Phi^{(n)}$ tels que : (i) tous les $\Phi^{(n)}$ sont identiquement nuls à partir d'un certain rang ; (ii) pour tout $n > 0$, $\Phi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$, considéré comme une fonction de $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$.

Nous ne rappellerons pas en détail les propriétés du champ libre $A(x)$. Notons que c'est une distribution à valeurs opérateurs dans $\mathcal{F}$: pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$A(f) = \int A(x) f(x) d^4x$$

est un opérateur non borné défini sur D_0 et appliquant D_0 dans lui-même. On a

$$(\square + m^2) A(x) = 0$$

$$U(a, \Lambda) A(x) U(a, \Lambda)^{-1} = A(\Lambda x + a)$$

$$[A(x), A(y)] = \frac{1}{i} \Delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip(x-y)} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2) d^4p$$

Nous supposons connues les propriétés des "polynômes de Wick". Voir 3), 6), 9). Dans tout ce qui suit on n'hésitera pas à employer une notation fonctionnelle pour désigner des distributions. Cet usage allègera beaucoup la notation et ne conduira jamais à des confusions dangereuses.

La fonctionnelle $g \rightarrow S(g)$ prend ses valeurs dans les opérateurs bornés inversibles opérant dans $\mathcal{F}$. Elle doit satisfaire aux propriétés suivantes :

- (i) - $S(g)$ est définie pour tout $g \in [\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)]^P$ et dépend continûment de g dans une topologie convenable (par exemple : la topologie forte des opérateurs).

$$S(0) = 1 \quad (1)$$

$$U(L)^{-1} S(\underline{g}) U(L) = S(L^{-1}\underline{g}) \text{ pour tout } L \in \mathcal{P}_+^\dagger, \text{ où}$$

$$(L^{-1}\underline{g})(x) = \underline{g}(Lx) ; \text{ si } L = \{\Lambda, a\}, \quad Lx = \Lambda x + a.$$

(ii)

$$S^{-1}(\underline{g}) = S^*(\bar{\underline{g}}) \quad (2)$$

(iii) - (Localité ou causalité)

$$S(\underline{g}_1) S(\underline{g}_2) = S(\underline{g}_1 + \underline{g}_2) \text{ si } \text{supp. } \underline{g}_1 \not\geq \text{supp. } \underline{g}_2 \quad (3)$$

La notation est la suivante : soient E et F deux sous-ensembles de l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^4)$. On écrit

$$E \supseteq F$$

si

$$E \cap \{F + \overline{V}^-\} = \emptyset$$

ou, condition équivalente

$$F \cap \{E + \overline{V}^+\} = \emptyset.$$

$$V^+ = -V^- = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 > |\vec{x}|\}$$

(Si E et F sont compacts, la condition $E \supseteq F$ exprime le fait qu'on peut faire passer une surface du genre espace entre E et F .) Plus précisément, posons

$$V(\underline{g}, \underline{h}) = S(\underline{g})^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}) ; W(\underline{g}, \underline{h}) = S(\underline{g} + \underline{h}) S(\underline{g})^{-1} \quad (4)$$

On impose que :

$$\left. \begin{aligned} V(\underline{g}, \underline{h}_1) V(\underline{g}, \underline{h}_2) &= V(\underline{g}, \underline{h}_1 + \underline{h}_2) \\ W(\underline{g}, \underline{h}_1) W(\underline{g}, \underline{h}_2) &= W(\underline{g}, \underline{h}_1 + \underline{h}_2) \end{aligned} \right\} \text{ si } \text{supp. } \underline{h}_1 \supseteq \text{supp. } \underline{h}_2 \quad (5)$$

Enfin on désire que $S(\underline{g})$ possède une limite lorsque la fonction $\underline{g}$ tend vers une constante de façon convenable, cette limite devant être elle aussi unitaire. (C'est ce qu'on appelle le problème de la "limite adiabatique". Nous y reviendrons plus tard.)

Il est assez douteux que la situation décrite ci-dessus soit véritablement réalisée dans les théories d'un boson autocouplé. En particulier un résultat de A. Martin semble indiquer que la constante de couplage ne peut dépasser une certaine limite sans apparition d'états liés. Or le formalisme ci-dessus contraint le spectre de masse de la théorie à être celui d'un seul champ libre. Si on souhaitait étudier l'existence de $S(\underline{g})$ de façon non perturbative, il faudrait probablement admettre que $S(\underline{g})$ n'est définie que lorsque $\underline{g}$ parcourt un sous-ensemble convenable de $\mathcal{S}$. Mais tel n'est pas le but de cette conférence. Nous allons voir que le programme ci-dessus peut être complètement réalisé au sens des séries formelles en $\underline{g}$.

Nous cherchons donc à construire une série formelle

$$S(\underline{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int T(x_1, \dots, x_n) \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n \quad (6)$$

qui vérifie les conditions précédentes au sens des séries formelles. Dans cette formule, le premier terme ($n = 0$) est 1 [car on veut que $S(0) = 1$]. Puisque $\underline{g}$ a plusieurs composantes $g_1, \dots, g_p$, $T(x_1, \dots, x_n)$ est un objet à p^n composantes $T_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n)$, la sommation est sous-entendue.

Toute série formelle qui commence par 1 a une inverse (droite et gauche) que nous notons, dans le cas de $S(\underline{g})$:

$$S(\underline{g})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \overline{T}(x_1, \dots, x_n) \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n \quad (7)$$

(La formule explicite de l'inversion est facile à trouver - voir plus loin.)

Comme en théorie des groupes, où le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire à un paramètre est non borné, il faut s'attendre ici à ce que le $n^{\text{ième}}$ terme de (6) soit un opérateur non borné. La question du domaine de définition de ces opérateurs prend donc une grande importance.

Bien entendu c'est par récurrence sur n qu'on essaiera de construire les $T(x_1, \dots, x_n)$ et $\bar{T}(x_1, \dots, x_n)$. L'énoncé de l'hypothèse de récurrence va permettre de poser le problème de façon précise.

II. - HYPOTHESE DE RECURRENCE

On suppose que, pour tout $\nu \leq n-1$, on a construit des distributions à valeurs opérateurs $T_{i_1 \dots i_\nu}(x_1, \dots, x_\nu)$, $\bar{T}_{i_1 \dots i_\nu}(x_1, \dots, x_\nu)$ possédant les propriétés suivantes.

1) Pour toute $\underline{f} = \{f_{i_1 \dots i_\nu}\} \in [\mathcal{F}(\mathbb{R}^{4\nu})]^{\mathbb{P}^\nu}$,

$$\int T(x_1, \dots, x_\nu) \underline{f}(x_1, \dots, x_\nu) d^4x_1 \dots d^4x_\nu$$

est un opérateur défini sur un sous-espace dense D_1 de $\mathcal{F}$, applique D_1 dans lui-même, et dépend continûment de $\underline{f}$ au sens faible. T est symétrique : pour toute permutation $\pi_1, \dots, \pi_\nu$ de $(1, \dots, \nu)$ on a

$$T_{i_1 \dots i_\nu}(x_1, \dots, x_\nu) = T_{i_{\pi_1} \dots i_{\pi_\nu}}(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_\nu})$$

Le domaine de définition D_1 contient le vide Ω et :

$$U(L)D_1 \subset D_1 \quad \text{pour toute } L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$$

$\bar{T}$ partage ces propriétés de T (avec le même domaine D_1). On suppose de plus que les opérateurs de la forme

$$\int T(x_1, \dots, x_{\nu_1}) T(x_{\nu_1+1}, \dots, x_{\nu_2}) \dots T(x_{\nu_{j-1}+1}, \dots, x_{\nu_j}) \underline{f}(x_1, \dots, x_{\nu_j}) \cdot d^4x_1 \dots d^4x_{\nu_j}$$

sont bien définis sur D_1 , l'appliquant dans lui-même, et dépendent continûment de $\underline{f}$ au sens faible [i.e., : $\underline{f} \rightarrow (\Psi, (T \dots T)(\underline{f}) \Phi)$ est une application continue de $\underline{f}$ dans $\mathbb{C}$ pour tout couple Ψ, Φ de vecteurs de D_1]. De même pour $\bar{T}$ (cette dernière supposition est d'ailleurs superflue ; c'est une conséquence des précédentes).

Pour $\nu = 1$ on a

$$T_i(x) = \mathcal{L}_i(x)$$

Les $\mathcal{L}_i(x)$ sont des champs qu'on se donne [avec les notations de l'introduction on aurait $\mathcal{L}_i(x) = \mathcal{L}_i(A(x))$]. Ces "conditions initiales" servent à préciser la théorie en fixant le Lagrangien d'interaction. On doit avoir $\mathcal{L}_p(x) = A(x)$ (le champ libre).

Il en résulte que D_1 contient tous les vecteurs de la forme

$$\int f(x_1, \dots, x_n) A(x_1) \dots A(x_n) dx_1 \dots dx_n \Omega,$$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n}),$$

c'est-à-dire : $D_0 \subset D_1$.

(On peut démontrer qu'il n'y a aucune perte de généralité à supposer $D_1 = D_0$. Voir plus loin.)

La symétrie de T et $\bar{T}$ nous permet d'adopter une notation condensée : si X est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^4 \times \{1, \dots, p\}$ [c'est-à-dire un ensemble fini $(x_1, i_1), \dots, (x_r, i_r)$] on écrira

$$T(X) \text{ au lieu de } T_{i_1 \dots i_r}(x_1, \dots, x_r)$$

$$\bar{T}(X) \text{ " " " } \bar{T}_{i_1 \dots i_r}(x_1, \dots, x_r)$$

$$|X| = \text{nombre d'éléments de } X (=r)$$

$$[X] = \text{l'ensemble } \{x_1, \dots, x_r\} \text{ considéré comme sous-ensemble de } \mathbb{R}^4.$$

L'utilisation de la notation fonctionnelle $T(X)$ (alors que T est une distribution), bien qu'illégale, ne conduit à aucune confusion et sera systématique dans cet exposé.

Quand X est l'ensemble vide $\emptyset$, on pose, par convention, $T(\emptyset) = \bar{T}(\emptyset) = 1$.

2) (U) Cette condition exprime que $S(\underline{g})^{-1}$ est l'inverse de $S(\underline{g})$

$$\sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, \nu\} \\ I \cap I' = \emptyset}} (-1)^{|I|} \bar{T}(I) T(I') = 0 \quad (U1)$$

pour tout $\nu \leq n-1, \nu \geq 1$

$$\sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, \nu\} \\ I \cap I' = \emptyset}} (-1)^{|I'|} T(I') \bar{T}(I) = 0 \quad (U2)$$

pour tout $\nu \leq n-1, \nu \geq 1$

Chacune de ces conditions est équivalente à :

$$(-1)^\nu \bar{T}(1, \dots, \nu) = \sum_{\substack{n=1 \\ I_1 \cup \dots \cup I_n = \{1, \dots, \nu\} \\ I_j \cap I_k = \emptyset \text{ si } j \neq k \\ I_k \neq \emptyset \forall k}} (-1)^n T(I_1) \dots T(I_n) \quad (U3)$$

[formellement si $S(\underline{g}) = 1 + K(\underline{g})$, $K(0) = 0$, on a $S(\underline{g})^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r K(\underline{g})^r$].

3) Causalité

(Caus.1) : si $X = I \cup J$, $I \cap J = \emptyset$ alors (pour tout $|X| \leq n-1$)

$$\left. \begin{aligned} T(X) &= T(I) T(J) \\ \bar{T}(X) &= \bar{T}(J) \bar{T}(I) \end{aligned} \right\} \text{ dans la région où } [I] \geq [J]$$

Explicitement, ceci veut dire que, par exemple, dans la région $\{x_1, \dots, x_r\} \gtrsim \{x_{r+1}, \dots, x_\nu\}$ on a

$$T_{i_1 \dots i_\nu}(x_1, \dots, x_\nu) = T_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) T_{i_{n+1} \dots i_\nu}(x_{n+1}, \dots, x_\nu)$$

au sens des distributions, et sur le domaine D_1 .

(Caus.2) : si $|X| \leq n-1$, $|Y| \leq n-1$, alors dans la région $[X] \sim [Y]$ (abréviation pour : $[X] \gtrsim [Y]$ et $[Y] \gtrsim [X]$, c'est-à-dire : $[X]$ et $[Y]$ séparés du genre espace) on a

$$[\tau(X), \tau(Y)] = 0 \quad (\text{sur } D_1)$$

$$[\bar{\tau}(X), \bar{\tau}(Y)] = 0 \quad (-, -)$$

$$[\tau(X), \bar{\tau}(Y)] = 0 \quad (-, -)$$

Les deux dernières lignes sont conséquences de la première en vertu de (U3). En fait, ces règles de commutation seraient automatiques si la restriction $|X| \leq n-1$ ne figurait pas dans (Caus.1). Mais ce sont des conditions nécessaires pour que l'on puisse continuer la récurrence en satisfaisant (Caus.1).

4) (Trinv.) : pour tout $a \in \mathbb{R}^4$ et tout $\nu \leq n-1$

$$U(a, 1) T(x_1, \dots, x_\nu) U(a, 1)^{-1} = T(x_1 + a, \dots, x_\nu + a)$$

$$U(a, 1) \bar{T}(x_1, \dots, x_\nu) U(a, 1)^{-1} = \bar{T}(x_1 + a, \dots, x_\nu + a)$$

Ici encore la seconde ligne est une conséquence directe de la première grâce à (U3).

Il est utile d'arrêter ici, pour l'instant, l'hypothèse de récurrence et d'examiner comment se fera le passage de $n-1$ à n . On complétera par la suite l'hypothèse de récurrence (en y faisant entrer, en particulier, l'invariance de Lorentz et l'"unitarité", et aussi d'autres restrictions sur les T).

Notons que (Caus.2) implique en particulier $[\mathcal{L}_j(x), A(x)] = 0$ sur D_1 quand $(x-y)^2 < 0$. En ajoutant à cela la condition 4) (Trinv.), on trouve facilement ¹⁰⁾ que, pour tout j , $\mathcal{L}_j(x)$ doit être un polynôme de Wick du moins lorsqu'on le restreint à D_0 . En d'autres termes :

$$\mathcal{L}_j(x) = : P_j (A(x), \partial_{\mu_1} A(x), \dots, \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} A(x)) :$$

P_j étant un polynôme d'un certain nombre (fini) de variables.

Ce caractère "polynomial" des interactions permises par notre formalisme est essentiellement dû à ce qu'on suppose que les g_j peuvent être librement choisis dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Des espaces fonctionnels plus restreints (ceux de Jaffe par exemple) permettraient de remplacer les polynômes P_j par des fonctions entières d'une classe convenable. Il est très vraisemblable que le traitement donné ici s'étende à ces cas plus généraux mais cela n'a pas été fait jusqu'à présent.

III. - LE PASSAGE DE $n-1$ A n

Supposons d'abord qu'on se donne arbitrairement une distribution à valeurs opérateur $T(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant la condition 1) du paragraphe précédent. On peut alors poser

$$\begin{aligned}
 (-1)^n \bar{T}(x_1, \dots, x_n) = & - T(x_1, \dots, x_n) - \\
 & - \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset \\ I' \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \bar{T}(I) T(I') \quad (9)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire définir $\bar{T}(1, \dots, n)$ de manière à satisfaire (U1) à l'ordre n . Il est facile de vérifier qu'on satisfait ainsi automatiquement (U2) et (U3) [en utilisant, naturellement, l'hypothèse de récurrence pour les $T(I)$ et $\bar{T}(I)$ avec $|I| \leq n-1$].

Si, de plus, on suppose que $T(1, 2, \dots, n)$ vérifie la condition 4) (Trinv.), il en est de même pour $\bar{T}(1, 2, \dots, n)$; si on a pu choisir $T(1, 2, \dots, n)$ de manière à ce que

$$[T(1, 2, \dots, n), T(I)] = 0$$

si $(x_i - x_j)^2 < 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et tout $j \in I$, on satisfait automatiquement toutes les conditions de (Caus.2) à l'ordre n .

Enfin, si $T(X)$ ($X = \{1, 2, \dots, n\}$) est tel que pour toute partition $P \cup Q = X$, $P \cap Q = \emptyset$, $T(X)$ coïncide avec $T(P) T(Q)$ dans la région où $[P] \gtrsim [Q]$, alors, dans la même région $\bar{T}(X) = \bar{T}(Q) \bar{T}(P)$.
Démonstration : dans cette région

$$\begin{aligned}
 (-1)^{|X|} \bar{T}(X) &= - \sum_{\substack{I \cup I' = X \\ I \cap I' = \emptyset \\ I' \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \bar{T}(I \cap Q) \bar{T}(I \cap P) T(I' \cap P) T(I' \cap Q) \\
 &= - \sum_{\substack{\kappa \cup \kappa' = P, \kappa \cap \kappa' = \emptyset \\ L \cup L' = Q, L \cap L' = \emptyset \\ L' \neq \emptyset}} (-1)^{|\kappa| + |L|} \bar{T}(L) \bar{T}(\kappa) T(\kappa') T(L') \\
 &\quad - \sum_{\substack{\kappa \cup \kappa' = P \\ \kappa \cap \kappa' = \emptyset \\ \kappa' \neq \emptyset}} (-1)^{|Q| + |\kappa|} \bar{T}(Q) \bar{T}(\kappa) T(\kappa')
 \end{aligned}$$

Si $P \neq \emptyset$, seul le deuxième terme subsiste, et il est égal à $(-1)^{|X|} \bar{T}(Q) \bar{T}(P)$.

[Cette vérification est d'ailleurs, elle aussi, presque superflue ; en effet si une fonctionnelle $S(\underline{g})$ est telle que $S(\underline{g}_1 + \underline{g}_2) = S(\underline{g}_1) S(\underline{g}_2)$ quand $\text{supp. } \underline{g}_1 \supsetneq \text{supp. } \underline{g}_2$, on a nécessairement $S(\underline{g}_1 + \underline{g}_2)^{-1} = S(\underline{g}_2)^{-1} S(\underline{g}_1)^{-1}$ dans les mêmes conditions. Il suffit d'appliquer ceci au cas où $S(\underline{g})$ est égale à

$$\sum_{\nu \leq n} \frac{(i)^\nu}{\nu!} \int T(X) \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_\nu) dx_1 \dots dx_\nu \quad]$$

Si on suppose un instant résolu le problème de la construction de $S(\underline{g})$ (comme série formelle) et si on développe en série l'opérateur $S^{-1}(\underline{g}) S(\underline{g} + \underline{h})$ au 1er ordre en $\underline{h}$ et jusqu'à l'ordre $(n-1)$ en $\underline{g}$, on doit trouver le "produit totalement retardé"

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(1, \dots, n-1; n) = T(1, \dots, n) + \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n-1\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \bar{T}(I) T(I'; n) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\equiv T(1, \dots, n) + \mathcal{R}'_n(1, \dots, n-1; n)$$

dont le support doit être dans le cône

$$\Gamma^- = \{x : x_j - x_n \in \bar{V}^-, 1 \leq j \leq n\} \quad (11)$$

De même le produit totalement avancé

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(1, \dots, n-1; n) = T(1, \dots, n) + \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} T(I'; n) T(I) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\equiv T(1, \dots, n) + \mathcal{A}'_n(1, \dots, n-1; n)$$

doit avoir son support dans

$$\Gamma^+ = \{x : x_j - x_n \in \bar{V}^+, 1 \leq j \leq n\} = -\Gamma^- \quad (13)$$

Mais les opérateurs A'_n et R'_n sont complètement connus d'après l'hypothèse de récurrence puisqu'ils ne contiennent que des $T(J)$ et $\bar{T}(K)$ pour lesquels $|J| \leq n-1$ et $|K| \leq n-1$.

Nous devons donc vérifier que la distribution à valeurs opérateurs

$$D(1, \dots, n-1; n) = A'_n(1, \dots, n-1; n) - R'_n(1, \dots, n-1; n) \quad (14)$$

$$D(1, \dots, n-1; n) = \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n-1\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} [T(I', n), \bar{T}(I)] \quad (15)$$

a bien son support dans $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$. [Dans les formules (10), (11), (12), (15), $T(I', n)$ veut dire $T(I' \cup \{n\})$. Nous utiliserons fréquemment cette abréviation.]

Considérons une partition en deux sous-ensembles P et Q de $\{1, \dots, n\}$ tels que $P \neq \emptyset$, $n \in Q$, $B = Q \setminus \{n\}$.

Dans la région $[P] \gtrsim [Q]$, on a

$$R'_n(1, \dots, n-1; n) = \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n-1\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \bar{T}(Q \cap I) \bar{T}(P \cap I) T(P \cap I') T(Q \cap I', n)$$

Le calcul est semblable à la précédente vérification que (Caus.1) pour T implique (Caus.1) pour $\bar{T}$. Les seuls termes qui subsistent sont ceux où $Q \cap I = \emptyset$. Ils s'écrivent

$$\sum_{\substack{K \cup K' = P \\ K \cap K' = \emptyset \\ K \neq \emptyset}} (-1)^{|K|} \bar{T}(K) T(K') T(Q) = - T(P) T(Q)$$

Ainsi, dans la région $[P] \succ [Q]$, on a

$$R'_n(1, \dots, n-1; n) = - T(P) T(Q) \quad (16)$$

De même, dans la région $[Q] \succ [P]$ on trouve

$$A'_n(1, \dots, n-1; n) = - T(Q) T(P) \quad (17)$$

Soit K l'ensemble des points $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^{4n}$ possédant la propriété suivante : il existe un repère de Lorentz (dépendant de x) dans lequel

$$\left. \begin{aligned} x_j^0 - x_n^0 &> 0 && \text{pour } j \in P_1 \neq \emptyset \\ x_k^0 - x_n^0 &< 0 && \text{pour } k \in Q_1 \neq \emptyset \\ x_l^0 - x_n^0 &= 0 && \text{pour } l \in S \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

avec naturellement $P_1 \cup Q_1 \cup S = \{1, \dots, n\}$. Alors le point $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^{4n}$ est dans le complémentaire du support de $D(1, \dots, n-1; n)$. En effet, d'après (16) on a, dans un voisinage de ce point

$$R'_n = - T(P_1) T(Q_1 \cup S)$$

et, d'après (Caus.1), puisque $|Q_1 \cup S| \leq n-1$,

$$R'_n = - T(P_1) T(S) T(Q_1)$$

De même dans un voisinage de ce point, on a, d'après (17) et (Caus.1)

$$A'_n = - T(P_2) T(S) T(Q_2)$$

de sorte que D s'annule.

Soit maintenant $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ un point n'appartenant pas à $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$. On peut distinguer deux cas.

- a) - L'un des points x_j (par exemple x_1) est tel que $x_1 - x_n \in \bar{V}^+$ et $x_1 - x_n \neq 0$, et un autre x_j (par exemple x_2) est tel que $x_2 - x_n \in \bar{V}^-$ et $x_2 - x_n \neq 0$.

Dans ce cas, en prenant un repère de Lorentz quelconque, on voit que $x \in K$ et que D s'annule dans un voisinage de x .

- b) - L'un des points x_j (par exemple x_1) est tel que $(x_1 - x_n)^2 < 0$.

Choisissons un repère de Lorentz tel que $x_1^0 - x_n^0 = 0$. S'il y a des x_j tels que $x_j^0 - x_n^0 > 0$ et des x_k tels que $x_k^0 - x_n^0 < 0$, $x \in K$ et D s'annule dans son voisinage. Supposons maintenant que $x_j^0 - x_n^0 > 0$ pour $j \in J \neq \emptyset$ et $x_k^0 - x_n^0 = 0$ pour tout $k \notin J$, (en particulier $1 \notin J$). Par une transformation de Lorentz infinitésimale, on peut rendre $x_1^0 - x_n^0$ négatif tout en gardant $x_j^0 - x_n^0 > 0$ pour $j \in J$ et on obtient encore $x \in K$. La seule possibilité restante est que $x_j^0 - x_n^0 = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. Dans ce cas, posons

$$P = \{j : x_j = x_1\},$$

$$Q = \text{complémentaire de } P \text{ dans } \{1, \dots, n\}.$$

On a $[P] \sim [Q]$ et $|P| \leq n-1$, $|Q| \leq n-1$. D'après (16) et (17), on a dans un voisinage de ce point

$$\mathcal{R}'_n(1, \dots, n-1; n) = -T(P)T(Q)$$

$$A'_n(1, \dots, n-1; n) = -T(Q)T(P)$$

Ces expressions coïncident d'après (Caus.2) dans un voisinage du point en question, et D s'y annule.

En récapitulant tous les cas, on conclut que

$$\text{Supp. } \mathcal{D}(1, \dots, n-1; n) \subset \Gamma^+ \cup \Gamma^- \quad (19)$$

Nous allons montrer maintenant que le problème du passage de $n-1$ à n est résolu si on parvient à trouver une distribution tempérée à valeurs opérateurs $A_n(1, \dots, n-1; n)$ possédant les propriétés suivantes :

- 1) elle est définie sur le domaine D_1 et l'applique dans lui-même [une fois intégrée avec une fonction $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$, bien entendu];
- 2) elle est covariante pour les translations :

$$U(a, 1) A_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) U(a, 1)^{-1} = A_n(x_1+a, \dots, x_{n-1}+a; x_n+a)$$

$$3) \quad A_n(\pi_1, \dots, \pi_{n-1}; n) = A_n(1, \dots, n-1; n)$$

pour toute permutation π de $\{1, \dots, n-1\}$;

- 4) elle est locale par rapport aux opérateurs $T(J)$ déjà construits et par rapport à elle-même, c'est-à-dire :

$$[A_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n), T(J)] = 0$$

quel que soit J tel que $|J| \leq n-1$, dans la région où $(x_j - x_k)^2 < 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$ et tout $k \in J$;

$$[A_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n), A_n(x'_1, \dots, x'_{n-1}; x'_n)] = 0$$

dans la région où $(x_j - x'_k)^2 < 0$ pour tout j et tout k ;

Notons que ceci implique la même propriété avec $\bar{T}(J)$ au lieu de $T(J)$ d'après (U3) ;

- 5) $A_n(1, \dots, n-1; n)$ coïncide avec $D(1, \dots, n-1; n)$ dans le complément de Γ^- et

$$\text{supp. } A_n(1, \dots, n-1; n) \subset \Gamma^+$$

Supposons connu un tel $A_n(1, \dots, n-1; n)$. On définit alors des distributions à valeurs opérateurs $T(1, \dots, n)$ et $R_n(1, \dots, n-1; n)$ par

$$T(1, \dots, n) = A_n(1, \dots, n-1; n) - A'_n(1, \dots, n-1; n)$$

$$= R_n(1, \dots, n-1; n) - R'_n(1, \dots, n-1; n)$$

Notons que R_n ainsi défini est tel que $A_n - R_n = D$. Donc $\text{supp. } R_n(1, \dots, n-1; n) \subset \Gamma^-$ et R_n coïncide avec D dans le complément de Γ^+ .

La distribution à valeurs opérateurs $T(1, \dots, n-1; n)$ est correctement transformée par les translations, est locale par rapport aux $T(J)$ et $\bar{T}(J)$ tels que $|J| \leq n-1$, et par rapport à elle-même.

Enfin si $\{1, \dots, n\} = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$, on a, dans la région où $[P] \geq [Q]$, $T(1, \dots, n) = T(P) T(Q)$. Pour le voir, distinguons deux cas :

a) $P \neq \emptyset$, $n \in Q$. D'après l'équation

$$T(1, \dots, n) = R_n(1, \dots, n-1; n) - R'_n(1, \dots, n-1; n),$$

on a dans cette région : $R_n = 0$, $R'_n = -T(P) T(Q)$ [voir (16)]
d'où le résultat ;

b) $Q \neq \emptyset$, $n \in P$

$$T(1, \dots, n) = A_n - A'_n,$$

dans la région considérée, $A_n = 0$ et [d'après (17)]

$$A'_n(1, \dots, n-1; n) = -T(P) T(Q).$$

[les rôles de P et Q sont échangés dans l'équation ci-dessus et dans (17)]. (Les cas où $P = \emptyset$ ou $Q = \emptyset$ sont triviaux.)

Il ne reste à examiner que la symétrie de $T(1, \dots, n)$. La distribution construite ci-dessus ne possède pas en général la propriété de symétrie voulue, mais il suffit de la remplacer par

$$T'(1, \dots, n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T(\pi_1, \dots, \pi_n)$$

qui a toutes les propriétés voulues.

En fait, lorsqu'on passera à une construction explicite, cette symétrisation se révélera inutile.

Il est instructif d'examiner le degré d'arbitraire de la construction. Supposons que deux solutions du problème correspondent à deux découpages

$$D = A_n - R_n$$

$$D = A_n^{(1)} - R_n^{(1)}$$

de D en deux distributions de supports respectifs Γ^+ et Γ^- .

Alors

$$\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) = A_n - A_n^{(1)} = R_n - R_n^{(1)}$$

a son support dans $\{x : x_1 = \dots = x_n\}$. De plus

$$U(a, 1) \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) U(a, 1)^{-1} = \mathcal{O}(x_1 + a, \dots, x_n + a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^d$$

et

$$[\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n), A(y)] = 0$$

dans la région où $(y - x_j)^2 < 0 \quad \forall j$, valent sur D_1 . On en déduit (par une facile généralisation de 10)) que, sur D_0 , $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)$ est de la forme

$$\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq N} P_\alpha(x_n) D^\alpha \delta(x_1 - x_n) \dots \delta(x_{n-1} - x_n)$$

où α désigne un multi-indice

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1}}$$

et, pour chaque α , $P_\alpha(x)$ est un polynôme de Wick :

$$P_\alpha(x) = : P_\alpha(A(x), \partial_\mu A(x), \dots, \partial_{\mu_1 \dots \mu_Q} A(x)) :$$

P_α étant un polynôme.

En particulier, on voit que, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$,

$$\mathcal{O}(f) = \int \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

applique D_0 dans lui-même. Il en résulte que si l'une des solutions possibles pour $T(1, \dots, n)$ applique D_0 dans lui-même, il en est ainsi pour la solution la plus générale. On verra que c'est en effet le cas. Pour cela on va ajouter à l'hypothèse de récurrence la condition (vraie pour $|I| = 0$ ou 1) que $T(I)$ [et par suite $\bar{T}(I)$] applique D_0 dans lui-même (une fois saturé par une fonction de $\mathcal{S}$) pour tout I tel que $|I| \leq n-1$.

IV. - CARACTERISATION DE LA SOLUTION LA PLUS GENERALE

Si les opérateurs $\mathcal{L}_i(x)$ étaient des fonctions continues de x au lieu d'être des distributions tempérées, il serait facile de construire une solution complète de notre problème en posant simplement

$$T_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi} \theta(x_{\pi_1}^0 - x_{\pi_2}^0) \dots \theta(x_{\pi_{n-1}}^0 - x_{\pi_n}^0) \cdot \mathcal{L}_{i_{\pi_1}}(x_{\pi_1}) \dots \mathcal{L}_{i_{\pi_2}}(x_{\pi_2}) \dots \mathcal{L}_{i_{\pi_n}}(x_{\pi_n}) \quad (20)$$

où $\theta(x^0) = 1$ si $x^0 > 0$ et $\theta(x^0) = 0$ si $x^0 < 0$. On peut dire que toute la difficulté de la théorie des perturbations tient dans l'impossibilité d'écrire la formule (20).

D'autre part le théorème de Wick (qui donne le développement d'un produit de polynômes de Wick, en produits ordonnés) peut se reformuler de la façon suivante : supposons d'abord les $\mathcal{L}_i(x)$ de la forme

$$\mathcal{L}_i(x) = : A(x)^{\nu_i} :$$

(c'est-à-dire de simples "puissances de Wick" du champ libre). On pose, pour tout r entier ≥ 0

$$\mathcal{L}_i^{(r)}(x) = \begin{cases} \frac{\nu_i!}{(\nu_i - r)!} : A^{\nu_i - r}(x) : & \text{si } \nu_i - r \geq 1, \\ \nu_i! & \text{si } \nu_i - r = 0 \\ 0 & \text{si } \nu_i - r < 0 \end{cases}$$

[en d'autres termes, formellement, la $r^{\text{ième}}$ dérivée de $\mathcal{L}_i(x)$ par rapport à $A(x)$]. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{L}_{i_q}(x_q) &= \\ &= \sum_{r_1, \dots, r_q} (\Omega, \mathcal{L}_{i_1}^{(r_1)}(x_1) \dots \mathcal{L}_{i_q}^{(r_q)}(x_q) \Omega) \frac{:A^{r_1}(x_1) \dots A^{r_q}(x_q):}{r_1! \dots r_q!} \quad (21) \end{aligned}$$

Si on pouvait former le produit chronologique au moyen de fonctions θ suivant la formule (20) on aurait donc

$$\begin{aligned} T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_q)) &= \\ &= \sum_r (\Omega, T(\mathcal{L}^{(r_1)}(x_1) \dots \mathcal{L}^{(r_q)}(x_q)) \Omega) \frac{:A^{r_1}(x_1) \dots A^{r_q}(x_q):}{r_1! \dots r_q!} \end{aligned}$$

On peut chercher à satisfaire cette condition dans la construction récursive décrite plus haut, ce qui aurait l'avantage de satisfaire très simplement aux conditions d'invariance par translation et de localité auxquelles $T(1, \dots, n)$ est soumis. En fait on va voir qu'une petite généralisation de cette propriété correspond à la solution générale de notre problème.

Dans le cas où les $\mathcal{L}_i(x)$ contiennent des dérivées de $A(x)$ [exemple : $\mathcal{L}_i(x) = :A(x) (\partial_\mu A(x)) (\partial^\mu A(x)) (\partial_{\mu_1 \mu_2} A(x)) :]$ on utilisera la notation $\mathcal{L}_i^{(r)}(x)$, où r est maintenant un multi-
indice, pour désigner la dérivée formelle de $\mathcal{L}_i$ par rapport à A , $\partial_\mu A$, $\partial_{\mu_1 \mu_2} A$, etc.. De même $A^r(x)$ désignera un produit de $A(x)$, $\partial_\mu A$, $\partial_{\mu_1 \mu_2} A$, etc., r étant traité comme une multi-puissance. Dans ces conditions la formule (21) reste vraie.

On complète maintenant l'hypothèse de récurrence en supposant que :

5) outre les opérateurs $T_{i_1, \dots, i_\nu} (x_1, \dots, x_\nu)$ et $\bar{T}_{i_1, \dots, i_\nu} (x_1, \dots, x_\nu)$ on a construit, pour tout $\nu \leq n-1$ une famille

$$T_{i_1 \dots i_\nu}^{r_1 \dots r_\nu} (x_1, \dots, x_\nu) , \quad \bar{T}_{i_1 \dots i_\nu}^{r_1 \dots r_\nu} (x_1, \dots, x_\nu)$$

où r_j parcourt l'ensemble des multi-indices, mais où seuls sont $\neq 0$ un nombre fini de ces opérateurs. Ces opérateurs sont soumis aux mêmes conditions que les $T_{i_1, \dots, i_\nu}$ et $\bar{T}_{i_1, \dots, i_\nu}$. [En somme il suffit de remplacer les indices i_j par des couples d'indices $(\begin{smallmatrix} r_j \\ i_j \end{smallmatrix})$ dans les conditions 1) à 4) du paragraphe 2.] Pour $\nu = 1$ on impose évidemment $T_i^r = \mathcal{L}_i^{(r)}$.

On suppose de plus que : pour tout $\nu \leq n-1$,

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_\nu}^{r_1 \dots r_\nu} (x_1, \dots, x_\nu) &= \\ &= \sum_A (\Omega, T_{i_1 \dots i_\nu}^{r_1 + A_1 \dots r_\nu + A_\nu} (x_1, \dots, x_\nu) \Omega) \frac{A(x_1)^{A_1} \dots A(x_\nu)^{A_\nu}}{A_1! \dots A_\nu!} \end{aligned} \quad (22)$$

et de même pour $\bar{T}$. (Cette hypothèse est évidemment vraie pour $\nu = 1$.) Désormais on écrira en abrégé la formule (22) sous la forme

$$T^r(x) = \sum_A (\Omega, T^{r+A}(x) \Omega) \frac{A(x)^A}{A!} \quad (22')$$

On remarque que la formule (22) appelle quelques explications puisque le second membre est un produit de deux distributions (dont l'une à valeurs opérateurs). Ce point est éclairci par le

THEOREME 0

Soit $F(x_1, \dots, x_q)$ une distribution tempérée sur $\mathcal{R}^{4q}$, "invariante par translation" c'est-à-dire dépendant seulement des différences $x_j - x_k$. Alors, pour toute suite $r_1, \dots, r_q$ de multi-indices et toute $f \in \mathcal{S}(\mathcal{R}^{4q})$,

$$\int F(x_1, \dots, x_q) : A(x_1)^{r_1} \dots A(x_q)^{r_q} : f(x_1, \dots, x_q) dx_1 \dots dx_q$$

est un opérateur bien défini sur D_0 et applique D_0 dans lui-même. Il dépend continûment de f au sens fort (i.e., quand on l'applique à un vecteur de D_0 , le résultat est un vecteur qui dépend continûment de f au sens de la topologie de la norme dans $\mathcal{F}$).

Nous ne donnerons pas ici la démonstration (facile) de ce théorème, dont le principe est le même que celui de la démonstration de l'existence des polynômes de Wick. Voir ³⁾, ⁶⁾ et ¹⁾.

Remarque

Considérons des distributions à valeurs opérateurs $E^S(x_1, \dots, x_p)$ et $F^r(x_{p+1}, \dots, x_q)$ de la forme

$$E^A(x) = \sum_{A'} (\Omega, E^{A+A'}(x) \Omega) \frac{:A(x)^{A'}:}{A'!}$$

$$F^A(x) = \sum_{A'} (\Omega, F^{A+A'}(x) \Omega) \frac{:A(x)^{A'}:}{A'!}$$

Les $E^S(x)$, $F^r(x)$ sont des distributions tempérées à valeurs opérateurs correctement transformées par les translations :

$$U(a, 1) E^A(X) U(a, 1)^{-1} = E^A(X+a)$$

(de même pour F), et appliquant D_0 dans lui-même, de sorte que les $(\Omega, E^S(X)\Omega)$ sont invariantes par les translations.

On a alors, par un calcul facile :

$$\begin{aligned} E^A(X) F^{\Lambda}(Y) &= \\ &= \sum_{A', \Lambda'} (\Omega, E^{A+A'}(X) F^{\Lambda+\Lambda'}(Y) \Omega) \frac{:A^{\Lambda+\Lambda'}(XUY):}{\Lambda'! A'!} \end{aligned}$$

Il en résulte que si on forme au moyen des T^r , $\overline{T}^r$ l'opérateur correspondant à celui noté $D(1, \dots, n-1; n)$ plus haut, $D^r(1, \dots, n-1; n)$, celui-ci possède toutes les propriétés démontrées pour D et on a :

$$\begin{aligned} D^{\Lambda}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) &= \\ &= \sum_{\Lambda} (\Omega, D^{\Lambda+\Lambda}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) \Omega) \frac{:A^{\Lambda}(X):}{\Lambda!}, \end{aligned}$$

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Il est clair qu'il suffit maintenant, pour trouver une solution du passage de $n-1$ à n , de trouver, pour chaque multi-indice r (et chaque ensemble d'indices $i_1, \dots, i_n$) une distribution tempérée

$$Q_n; i_1 \dots i_n (x_1, \dots, x_n)$$

ne dépendant que de $x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$, ayant son support dans $\mathcal{R}^+$ et coïncidant avec $(\Omega, D_{i_1, \dots, i_n}^r(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) \Omega)$ dans le complémentaire de $\mathcal{R}^-$, qui soit de plus symétrique par rapport à l'ensemble des (x_j, i_j, r_j) pour $j = 1, \dots, n-1$. En effet on construit alors

$$\begin{aligned} t_{i_1 \dots i_n}^n(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \left[a_{n; i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) - (\Omega, A'_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) \Omega) \right]_{\text{symétrisée}} \end{aligned}$$

et on pose

$$T^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_A t^{n+A}(x_1, \dots, x_n) \frac{A(X)}{A!}$$

$$(X = \{x_1, \dots, x_n\})$$

On verra au paragraphe suivant que ce découpage de distributions est possible. En tenant compte de la caractérisation de l'ambiguïté des solutions, on voit qu'on aura démontré que la solution la plus générale (existe et) vérifie (22) à l'ordre n , donc à tout ordre.

V. - GENERALITES SUR LE DECOUPAGE DES DISTRIBUTIONS

Considérons, de façon générale, une distribution tempérée $C \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ de support $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$, où $\Gamma^+ = -\Gamma^-$ est un cône convexe fermé, et $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \{0\}$. Le cône dual $\tilde{\Gamma}^+$ de Γ^+ ,

$$\tilde{\Gamma}^+ = \{p : \forall x \neq 0 \text{ dans } \Gamma^+, px > 0\}$$

est ouvert, non vide, convexe.

Problème de découpage : trouver une paire (F^+, F^-) de distributions tempérées de supports respectifs Γ^+ et Γ^- telles que

$$F^+ - F^- = C$$

Il existe une théorie générale du découpage d'une distribution en deux morceaux de supports régulièrement séparés, qui montre que le problème ci-dessus a des solutions ¹¹⁾. Mais le cas particulier qu'on a à traiter ici est si simple que le recours à la théorie générale est superflu.

Notons que si (F_1^+, F_1^-) et (F_2^+, F_2^-) sont deux solutions, la différence $F_1^+ - F_2^+ = F_1^- - F_2^-$ a son support à l'origine et doit donc être de la forme

$$\sum_{|\alpha|=0}^M c_\alpha D^\alpha \delta(x)$$

$$(\alpha = \text{multi-indice}, D^\alpha = \prod_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}, |\alpha| = \sum_j \alpha_j,$$

$$\alpha! = \prod_j \alpha_j!)$$

Introduisons maintenant une fonction réelle auxiliaire $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}^N$ telle que :

- i) $0 \leq \mathcal{W}(x) \leq 1$ et $\mathcal{W}(0) = 0$;
- ii) $\mathcal{W}$ est indéfiniment différentiable partout sauf à 0 ;
- iii) $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(\rho x)$ pour tout $x \neq 0$ et tout $\rho > 0$;
- iv) $\mathcal{W}$ prend la valeur 1 sur un cône ouvert contenant $\Gamma^+ - \{0\}$ et la valeur 0 sur un cône ouvert contenant $\Gamma^- - \{0\}$.

Pour construire une telle fonction, introduisons la notation :

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Il suffit de choisir une fonction $\mathcal{W}$ $\mathcal{C}^\infty$ sur la sphère $\{x : \|x\| = 1\}$ prenant la valeur 1 (resp. 0) sur un voisinage de l'intersection de la sphère avec Γ^+ (resp. Γ^-). C'est possible car ces intersections sont des compacts disjoints. On étend ensuite $\mathcal{W}$ à tout l'espace en posant

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \text{ pour } x \neq 0,$$

$$\mathcal{W}(0) = 0$$

Cette fonction vérifie, hors de $\{0\}$,

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{W}(x) = \|x\|^{-|\alpha|} (\mathcal{D}^\alpha \mathcal{W})\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

de sorte que, pour tout α , il existe une constante $B_{|\alpha|}$ telle que

$$|\mathcal{D}^\alpha \mathcal{W}(x)| \leq B_{|\alpha|} \|x\|^{-|\alpha|} \text{ pour tout } x \neq 0.$$

Il sera utile d'adopter une classification du degré de singularité des distributions tempérées à l'origine. Par exemple on peut adopter la définition suivante :

Définition 1

On dit qu'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est singulière d'ordre ν à 0 s'il existe des entiers $M \geq 0$ et $P \geq 0$, et, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, une constante $K(\varepsilon) > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq K(\varepsilon) \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_x (1 + \|x\|)^P \|x\|^{(-\nu + |\alpha| - \varepsilon)^+} |D^\alpha \varphi(x)|$$

avec : $(-\nu + |\alpha| - \varepsilon)^+ = \max \{ 0, -\nu + |\alpha| - \varepsilon \}$.

Il est clair que si une distribution tempérée est singulière d'ordre ν à 0, elle est aussi singulière d'ordre ν' à 0 pour tout $\nu' \geq \nu$ (en somme on devrait peut-être remplacer la terminologie ci-dessus par : " T est singulière d'ordre ν au plus à 0 si..., etc.).

Supposons maintenant que la distribution à découper, C , est singulière d'ordre ω à 0, ω étant un entier (positif ou négatif). (C'est toujours le cas pour un ω convenable.)

Distinguons deux cas.

1) - Cas $\omega \leq -1$

Dans ce cas, C peut être étendu de façon unique en une forme linéaire continue sur l'espace de toutes les fonctions φ définies, continues, et M fois continûment différentiables dans le complémentaire de $\{0\}$, et telles que, pour au moins un $\varepsilon > 0$ (dépendant de φ),

$$|D^\alpha \varphi(x)| < \text{Const.} (1 + \|x\|)^{-P} \|x\|^{\omega - |\alpha| + \varepsilon},$$

$$x \neq 0, \quad 0 \leq |\alpha| \leq M.$$

Si φ est une telle fonction, $\mathcal{W}\varphi$ est continue et M fois continûment différentiable dans le complémentaire de l'origine, où elle vérifie, pour $0 \leq |\alpha| \leq M$:

$$\begin{aligned} & (1 + \|x\|)^p \|x\|^{-\omega + |\alpha| - \varepsilon} |D^\alpha(\mathcal{W}(x)\varphi(x))| \leq \\ & \leq \text{Const.} \sum_{\gamma \leq \alpha} (1 + \|x\|)^p \|x\|^{-\omega + |\gamma| - \varepsilon} |D^\gamma \varphi(x)| \end{aligned}$$

Il en résulte que $\langle C, \mathcal{W}\varphi \rangle$ est défini et que l'on peut définir une distribution tempérée $\mathcal{W}C$ par

$$\langle \mathcal{W}C, \varphi \rangle = \langle C, \mathcal{W}\varphi \rangle$$

$\mathcal{W}C$ est singulière d'ordre ω à 0. En posant $\mathcal{W}C = F^+$, $F^- = F^+ - C$, on a une solution du problème de découpage.

2) - Cas $\omega \geq 0$

Dans ce cas C peut être étendu de façon unique en une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions φ ω fois continûment différentiables sur $\mathcal{R}^N$, et M' fois continûment différentiables sur $\mathcal{R}^N - \{0\}$, $M' = \max\{\omega + 1, M\}$, qui vérifient, pour au moins un $\varepsilon > 0$ (dépendant de φ)

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varphi(x)| & \leq \text{const.} (1 + \|x\|)^{-p} \quad \text{pour } |\alpha| \leq \omega \\ |D^\alpha \varphi(x)| & \leq \text{const.} (1 + \|x\|)^{-p} \|x\|^{-|\alpha| + \omega + \varepsilon} \quad \text{pour } \omega + 1 \leq |\alpha| \leq M' \end{aligned}$$

Soit $\psi \in \mathcal{S}$, β un multi-indice tel que $|\beta| \geq \omega+1$; posons

$$\varphi(x) = x^\beta \mathbb{W}(x) \psi(x)$$

Alors φ appartient à l'espace fonctionnel précédent et on voit facilement que

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_x (1 + \|x\|)^p \|x\|^{(|\alpha| - \omega - \varepsilon)^+} |D^\alpha \varphi(x)| \leq \\ & \leq \text{Const.} \sum_{|\gamma| \leq M'} \sup_x (1 + \|x\|)^{p + \omega + 1} \|x\|^{|\beta| - \omega + |\gamma| - \varepsilon} |D^\gamma \psi(x)|. \end{aligned}$$

On peut donc définir $\mathbb{W} x^\beta C = F^{\beta+}$ (pour $|\beta| \geq \omega+1$) comme distribution tempérée, singulière d'ordre $-|\beta| + \omega$ à 0, par la formule

$$\langle F^{\beta+}, \psi \rangle = \langle C, \mathbb{W} x^\beta \psi \rangle$$

On définit aussi

$$F^{\beta-} = F^{\beta+} - x^\beta C \quad (23)$$

qui est aussi d'ordre $-|\beta| + \omega$.

On peut démontrer facilement que $\mathcal{W} x^\beta C$ ne dépend pas du choix particulier de $\mathcal{W}$: on obtient le même résultat avec une autre fonction auxiliaire $\mathcal{W}'$, pourvu que celle-ci satisfasse aux conditions i), ii), iii), iv) données précédemment pour $\mathcal{W}$.

Choisissons maintenant une fonction auxiliaire $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$w(0) = 1, \quad D^\alpha w(0) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq |\alpha| \leq \omega$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on pose

$$(\mathcal{W}\varphi)(x) = \varphi(x) - w(x) \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0) \quad (24)$$

On a

$$\mathcal{W}\varphi = \sum_{|\beta|=\omega+1} x^\beta \psi_\beta \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_\beta(x) &= w(x) \varphi_\beta(x) - \varphi(x) w_\beta(x) \\ \varphi_\beta(x) &= \frac{\omega+1}{\beta!} \int_0^1 dt (1-t)^\omega (D^\beta \varphi)(tx) \\ w_\beta(x) &= \frac{\omega+1}{\beta!} \int_0^1 dt (1-t)^\omega (D^\beta w)(tx) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Posons

$$\langle T^+, \varphi \rangle = \langle C, \mathcal{W}\mathcal{W}\varphi \rangle = \sum_{|\beta|=\omega+1} \langle C, \mathcal{W} x^\beta \psi_\beta \rangle,$$

$$T^- = -C + T^+$$

Alors (T^+, T^-) est une solution du problème de découpage et on vérifie facilement que T^+ et T^- sont singulières d'ordre ω à 0.

La solution la plus générale (S^+, S^-) du problème de découpage telle que S^+ et S^- soient d'ordre ω à 0 est donnée par

$$S^+ - T^+ = S^- - T^- = \sum_{|\alpha| \leq \omega} c_\alpha D^\alpha \delta(x) \quad (27)$$

et dépend donc d'un polynôme arbitraire de degré ω .

Notons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution (S^+, S^-) soit singulière d'ordre ω à 0 est que, pour tout β tel que $|\beta| = \omega + 1$, on ait

$$x^\beta S^\pm = F^\beta \quad (28)$$

car on a alors $x^\beta (S^+ - T^+) = 0$ donc $S^+ - T^+$ est de la forme (27).

Pour résumer ceci on peut dire que : le découpage est toujours possible avec conservation de l'ordre de singularité à 0.

Un cas particulier

Notre but est d'appliquer la discussion précédente au cas où C est l'une des distributions $(\Omega, D^{(r)}(1, 2, \dots, n)\Omega)$. Or il suit de la formule (15) que la transformée de Fourier de l'une quelconque de ces distributions tempérées s'annule dans un voisinage ouvert de l'origine, étoilé par rapport à 0. Ajoutons donc aux hypothèses du début de ce paragraphe la suivante :

Nouvelle hypothèse : la transformée de Fourier $\tilde{C}$ de C s'annule dans un voisinage $\mathcal{R}$ ouvert étoilé (par rapport à 0) de 0.

La distribution tempérée $F^{\beta+}$ (resp. $F^{\beta-}$) a son support dans $\tilde{\Gamma}^+$ (resp. $\tilde{\Gamma}^-$) et, d'après un théorème bien connu, sa transformée de Fourier $\tilde{F}^{\beta+}$ (resp. $\tilde{F}^{\beta-}$) est la valeur au bord d'une fonction $H^{\beta+}$ (resp. $H^{\beta-}$) analytique dans le tube $\mathbb{R}^N + i\tilde{\Gamma}^+$ (resp. $\mathbb{R}^N - i\tilde{\Gamma}^+$). Les fonctions $H^{\beta\pm}$ ne croissent pas plus vite qu'un polynôme à l'infini, ni, à distance finie, qu'une puissance inverse de la distance à la frontière de leur domaine de définition. Par le théorème "edge-of-the-wedge" (plusieurs fois cité à Strasbourg dans le passé !) $H^{\beta\pm}$ sont les restrictions aux tubes $\mathbb{R}^N \pm i\tilde{\Gamma}^+$ d'une fonction H^{β} holomorphe dans un certain domaine $\Delta_1 \subset \mathbb{C}^N$. Ce domaine est étoilé par rapport à 0 ; c'est l'enveloppe d'holomorphie de $(\mathbb{R}^N + i\tilde{\Gamma}^+) \cup (\mathbb{R}^N - i\tilde{\Gamma}^+) \cup \mathcal{R}$. Dans ce domaine on a

$$D^{\gamma} H^{\beta} = i^{|\gamma|} H^{\beta+\gamma} \quad (29)$$

pour tout γ et tout β tel que $|\beta| \geq \omega+1$. Les conditions d'intégrabilité du système "aux différentielles totales"

$$D^{\beta} H = i^{|\beta|} H^{\beta} \quad (30)$$

pour tout β tel que $|\beta| = \omega+1$, sont donc satisfaites ; par exemple on a la solution :

$$H(k) = \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| = \omega+1}} \frac{\omega+1}{\alpha!} \int_0^1 dt (1-t)^{\omega} k^{\alpha} i^{|\alpha|} H^{\alpha}(tk) \quad (31)$$

Cette formule définit évidemment une fonction holomorphe dans Δ_1 et on vérifie facilement (30) en utilisant (29). Cette solution est la seule qui vérifie :

$$D^\gamma H(0) = 0 \quad \text{pour } |\gamma| \leq \omega$$

Soit maintenant (S^+, S^-) une solution du problème de découpage singulière d'ordre ω à 0 (on a vu qu'il existe). La transformée de Fourier $\tilde{S}^+$ (resp. $\tilde{S}^-$) de S^+ (resp. S^-) est la valeur au bord de la restriction à $\mathbb{R}^N + i\tilde{\Gamma}^+$ (resp. $\mathbb{R}^N - i\tilde{\Gamma}^+$) d'une fonction G , holomorphe dans Δ_1 , qui vérifie [d'après (28)]

$$D^\beta G = |\beta|! H^\beta$$

pour tout β tel que $|\beta| \geq \omega + 1$. On a donc

$$H(k) = G(k) - \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{k^\alpha}{\alpha!} D^\alpha G(0) \quad (32)$$

Donc la restriction de H au tube $\mathbb{R}^N + i\tilde{\Gamma}^+$ (resp. $\mathbb{R}^N - i\tilde{\Gamma}^+$) est la transformée de Laplace d'une distribution tempérée F^+ (resp. F^-) de support $\tilde{\Gamma}^+$ (resp. $\tilde{\Gamma}^-$) ; $F^+ - S^+ = F^- - S^-$ a son support à l'origine. Donc (F^+, F^-) est aussi une solution du problème de découpage. On a : $x^\beta F^\pm = F^{\beta \pm}$, donc cette solution est singulière d'ordre ω à 0. Soit $\tilde{F}^\pm$ les transformées de Fourier de $F^\pm$. Il est facile de vérifier que

$$\tilde{C}(\rho) = \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| \geq \omega+1}} \int_0^1 dt (1-t)^\omega \frac{(\omega+1)}{\alpha!} \rho^\alpha D^\alpha \tilde{C}(t\rho) \quad (33)$$

$$\tilde{F}^{\pm}(p) = \sum_{|\alpha|=\omega+1} \int_0^1 dt (1-t)^{\omega} \frac{(\omega+1)}{\alpha!} p^{\alpha} \tilde{F}^{\alpha\pm}(tp) \quad (34)$$

au sens des distributions. La validité de ces formules provient de ce que $\tilde{C}$ et $\tilde{F}^{\alpha\pm}$ sont $\mathcal{C}^{\omega}$ au voisinage de 0.

(F^+, F^-) sera désignée dans la suite (faute d'une meilleure dénomination) comme : la solution centrale d'ordre ω du problème de découpage.

VI. - SOLUTIONS MINIMALES DU PROBLEME RECURSIF ; "COMPTAGE DES PUISSANCES"

1. - Comptage des puissances dans l'espace de configuration

La théorie du "comptage des puissances" a pour but de montrer qu'on peut trouver des solutions du problème récursif telles que les ordres de singularité à 0 des distributions de la forme $(\Omega, T^r(X)\Omega)$ soient aussi petits que possible ; ces solutions sont dites minimales ; elles comportent aussi peu de paramètres arbitraires que possible. Pour simplifier l'exposé, nous allons restreindre notre attention à un cas simple. On fait maintenant abstraction du paragraphe IV et on prend :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) &= : A(x)^\nu : \equiv \mathcal{L}^{(0)}(x) \\ \mathcal{L}_2(x) &= \nu : A(x)^{\nu-1} : \equiv \mathcal{L}^{(1)}(x) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}_j(x) &= \frac{\nu!}{(\nu-j)!} : A(x)^{\nu-j} : \equiv \mathcal{L}^{(j)}(x) \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots \\ &\vdots \\ \mathcal{L}_\nu(x) &= \nu! A(x) \equiv \mathcal{L}^{(\nu-1)}(x) \\ \mathcal{L}(x) &= \{ \mathcal{L}^{(0)}(x), \dots, \mathcal{L}^{(\nu-1)}(x) \} \end{aligned}$$

et ce qui était précédemment noté $T_{i_1, \dots, i_q}(x_1, \dots, x_q)$ sera maintenant noté $T^{r_1, \dots, r_q}(x_1, \dots, x_q)$. A cette modification près on suppose vérifiée l'hypothèse de récurrence telle qu'elle est exposée au paragraphe III et on ajoute :

a) par convention on introduit des $T^{r_1, \dots, r_q}(x_1, \dots, x_q)$ pour lesquels $0 \leq r_j \leq \nu$ avec :

$$T^{r_1 \dots r_j \dots r_q}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_q) =$$

$$= \nu! T^{r_1 \dots \widehat{r_j} \dots r_q}(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_q) \text{ si } r_j = \nu$$

(le signe $\widehat{}$ = omission).

b) pour tout $q \leq n-1$ et tout $r = (r_1, \dots, r_q)$ où $r_1, \dots, r_q$ sont des entiers compris entre 0 et ν , on a

$$T^{r_1 \dots r_q}(x_1, \dots, x_q) =$$

$$= \sum_{\substack{A = \{A_1, \dots, A_q\} \\ 0 \leq A_j \leq \nu - r_j}} (\Omega, T^{r_1+A_1 \dots r_q+A_q}(x_1, \dots, x_q) \Omega) \frac{:A(x_1)^{A_1} \dots A(x_q)^{A_q}:}{A_1! \dots A_q!} \quad (35)$$

ce qu'on notera en abrégé

$$T^r(X) = \sum_A (\Omega, T^{r+A}(X) \Omega) \frac{:A(X)^A:}{A!} \quad (36)$$

et de même pour les $\bar{T}$.

[C'est donc encore la formule (22). Mais ici, et dans toute la suite, on se restreint à des multi-indices $r = \{r_1, \dots, r_q\}$, $s = \{s_1, \dots, s_q\}$, etc., qui sont des suites d'entiers positifs et compris entre 0 et ν . Notons aussi que $:A(X)^s:$ désigne ici et dans toute la suite un produit de Wick de puissances du champ libre, et ne contient aucune dérivée de $A(x)$.]

c) on suppose maintenant la condition "Lin." :

$$U(L) T(X) U(L)^{-1} = T(LX) \quad \text{pour tout } L \in \mathcal{P}_+^{\uparrow} \quad (37)$$

(valable sur D_0) pour tout $|X| \leq n-1$.

d) condition "Herm."

$$\bar{T}(X) = T^*(X) \quad \text{sur } D_0 \quad \text{pour tout } |X| \leq n-1 \quad (38)$$

ceci veut dire que si Φ et Ψ sont dans D_0 on a

$$(\bar{T}(X)\Phi, \Psi) = (\Phi, T(X)\Psi)$$

Pour passer de $n-1$ à n , comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, on forme les opérateurs

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^n(1, \dots, n-1; n) &= \\ &= \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n-1\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} [\mathcal{T}^{n_{I' \cup n}}(I', n), \bar{\mathcal{T}}^{n_I}(I)] \end{aligned}$$

dont le support est $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

On note alors

$$a_n^n(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad \pi_n^n(x_1, \dots, x_n)$$

la paire de distributions tempérées de supports respectifs $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ qui forme la "solution centrale" du problème de découpage de $(\Omega, D_n^r(1, \dots, n-1; n) \Omega)$ (considérée comme une distribution dans les variables $x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$) et qui ont le même ordre ω de singularité à 0 que $(\Omega, D^r \Omega)$. Le nombre ω sera calculé plus bas. Etant donné l'indépendance de cette solution centrale par rapport au choix de $\mathcal{U}$ (voir paragraphe V) et l'invariance de Lorentz de D^r , ces distributions sont aussi invariantes de Lorentz.

On pose alors

$$A_n^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) = \sum_{\mathcal{A}} a_n^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) \frac{:\mathcal{A}(\infty)^{\mathcal{A}}:}{\mathcal{A}!}, \quad X = \{x_1, \dots, x_n\},$$

$$\mathcal{R}_n^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) = \sum_{\mathcal{A}} \mathcal{R}_n^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) \frac{:\mathcal{A}(X)^{\mathcal{A}}:}{\mathcal{A}!},$$

$$T^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = A_n^{\mathcal{A}} - A_n'^{\mathcal{A}},$$

$$A_n'^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) =$$

$$= \sum_{\substack{I \cup I' = \{1, \dots, n-1\} \\ I \cap I' = \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} T^{\mathcal{A} \cup n}(I', n) \overline{T}^{\mathcal{A}}(I)$$

et on vérifie facilement que ces $T^r(1, \dots, n)$ vérifient toutes les conditions de l'hypothèse de récurrence étendue de $n-1$ à n .

On va maintenant montrer par récurrence que les T^r et $\bar{T}^r$ peuvent être construits de façon que leurs valeurs moyennes dans le vide soient singulières d'ordre ω à l'origine ; ω est calculé, pour $(\Omega, T^{r_1, \dots, r_q}(x_1, \dots, x_q)\Omega)$, considérée comme distribution dans les (quadri) variables $x_j - x_q$, par la formule

$$\omega = q(\nu - 4) - E + 4, \quad E = \sum_{j=1}^q r_j \quad (39)$$

et de même pour $\bar{T}$.

Remarquons que $(\Omega, T^r\Omega)$ correspond à ce qu'on représenterait, dans la formulation habituelle, par une somme de graphes (connexes ou non) ayant chacun q sommets, r_j lignes externes étant attachées au $j^{\text{ème}}$ sommet pour tout j . La formule (39) donne alors ce qu'on appelle "indice de divergence superficielle" de ces graphes.

Pour la démonstration, on suppose évidemment la propriété vraie pour $q \leq n-1$; puisque le découpage peut se faire avec conservation de l'ordre de singularité à 0, on voit tout de suite qu'il suffit de démontrer que la formule (39) donne bien l'ordre de singularité de

$$(\Omega, T^{\#r_1 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n) T^{\#r_{n+1} \dots r_{n+s}}(x_{n+1}, \dots, x_{n+s})\Omega) \quad (40)$$

pour tout $r \leq n-1$ et tout $s \leq n-1$; $T^{\#}$ veut dire T ou $\bar{T}$.

Avant cette vérification il est utile de noter quelques propriétés remarquables de l'ordre de singularité d'une distribution tempérée à 0.

A) - La différentiation augmente l'ordre de singularité

Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ singulière d'ordre ρ à 0,

$$\begin{aligned} |\langle D^\beta F, \varphi \rangle| &= |\langle F, D^\beta \varphi \rangle| \leq \\ &\leq K(\varepsilon) \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_x (1 + \|x\|)^P \|x\|^{(-\rho + |\alpha| - \varepsilon)^+} |D^{\alpha+\beta} \varphi(x)| \leq \\ &\leq K(\varepsilon) \sum_{|\alpha| \leq M + |\beta|} \sup_x (1 + \|x\|)^P \|x\|^{(-\rho - |\beta| + |\alpha| - \varepsilon)^+} |D^\alpha \varphi(x)|. \end{aligned}$$

donc $D^\beta F$ est singulière à 0 d'ordre $\rho + |\beta|$.

B) - Règle du produit tensoriel

Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N_1})$ et $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N_2})$ singulières d'ordres ρ_1 et ρ_2 à 0. Alors $F \otimes G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N_1+N_2})$ est singulière à 0 d'ordre $\rho_1 + \rho_2$.

Démonstration

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N_1+N_2})$,

$$\langle F \otimes G, \varphi \rangle = \langle F_x, \langle G_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} |\langle F \otimes G, \varphi \rangle| &\leq K_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{|\alpha| \leq M_1} \sup_x (1 + \|x\|)^{P_1} \|x\|^{(-\rho_1 + |\alpha| - \frac{\varepsilon}{2})^+} \cdot \\ &\quad \cdot |D_x^\alpha \langle G_y, \varphi(x, y) \rangle| \end{aligned}$$

et comme

$$D_x^\alpha \langle G_y, \varphi(x, y) \rangle = \langle G_y, D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle,$$

$$| \langle F \otimes G, \varphi \rangle | \leq \kappa_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \kappa_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{\substack{|\alpha| \leq M_1 \\ |\beta| \leq M_2}} \sup_{x,y} (1 + \|x\|)^{\rho_1} (1 + \|y\|)^{\rho_2} \times \\ \times \| (x, y) \|^{(-\rho_1 + |\alpha| - \frac{\varepsilon}{2})^+ + (-\rho_2 + |\beta| - \frac{\varepsilon}{2})^+} |D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y)|$$

où $\| (x, y) \| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Comme on a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^+ + b^+ \geq (a+b)^+$, il existe $Q \geq 0$ tel que

$$| \langle F \otimes G, \varphi \rangle | \leq \kappa_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \kappa_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{|\alpha| \leq M_1 + M_2} \sup_{x,y} (1 + \|(x, y)\|)^Q \|(x, y)\|^{(-\rho_1 - \rho_2 + |\alpha| - \varepsilon)^+} |D_{x,y}^\alpha \varphi(x, y)|$$

Exemples importants

α) Une constante non nulle, considérée comme élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est singulière à 0 d'ordre $-N$. En effet,

$$| \langle 1, \varphi \rangle | = \left| \int \varphi(x) dx \right| \leq \left[\sup_x \|x\|^{N-\varepsilon} (1 + \|x\|)^{\eta+\varepsilon} |\varphi(x)| \right] \int \frac{d^N y}{\|y\|^{N-\varepsilon} (1 + \|y\|)^{\eta+\varepsilon}}$$

pour tout $1 > \varepsilon > 0$ et tout $\eta > 0$.

β) Dans l'espace de Minkowski, les distributions

$$\Delta^+(x; m) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ipx} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) d^4p$$

$$\Delta(x; m) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ipx} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2) d^4p$$

$$(\varepsilon(p^0) = \theta(p^0) - \theta(-p^0))$$

$$\Delta_R(x; m) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \frac{d^4p}{(p^0 + i0)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = -\theta(x^0) \Delta(x; m)$$

$$\Delta_A(x; m) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \frac{d^4p}{(p^0 - i0)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \theta(-x^0) \Delta(x; m)$$

$$\begin{aligned} \Delta_F(x; m) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \frac{d^4p}{p^2 - m^2 - i0} = \\ &= \theta(x^0) \Delta^+(x; m) + \theta(-x^0) \Delta^+(-x; m) \end{aligned}$$

sont singulières d'ordre -2 à l'origine (on laisse la vérification au lecteur).

Revenons maintenant à l'expression (40). La formule (35) et le théorème de Wick permettent de mettre cette expression sous la forme d'une somme de termes de la forme

$$\begin{aligned} & \text{Const. } (\Omega, T^{\#r_1+a_1} \dots r_n+a_n (x_1, \dots, x_n) \Omega) \times \\ & \times (\Omega, T^{\#r_{n+1}+b_1} \dots r_{n+l}+b_l (x_{n+1}, \dots, x_{n+l}) \Omega) \times \\ & \times \prod_{j=1}^l \frac{1}{i} \Delta^+(x_{u(j)} - x_{n+v(j)}; m) \end{aligned} \tag{41}$$

Dans cette formule, si $l \geq 1$, u est une application $j \rightarrow u(j)$ de l'ensemble $\{1, \dots, l\}$ des l 1ers entiers dans $\{1, \dots, r\}$ et v est une application de $\{1, \dots, l\}$ dans $\{1, \dots, s\}$. L'entier a_k est le nombre de fois que $u(j)$ prend la valeur k ($k = 1, \dots, r$) et b_k est (pour $1 \leq k \leq s$) le nombre de fois que $v(j)$ prend la valeur k

$$a_k = |u^{-1}(k)|, \quad b_k = |v^{-1}(k)|.$$

Pour le cas $l = 0$ l'expression se réduit au produit des deux premiers facteurs, avec $a_k = 0$, $b_k = 0$ pour tout k .

Adoptons les variables suivantes :

$$\xi_k = x_k - x_n, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

$$\xi'_k = x_{n+k} - x_{n+1}, \quad 1 \leq k \leq 1$$

$$\eta = x_n - x_1$$

et notons

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = (\Omega, T^{\# r_1 + a_1} \dots T^{\# r_{n-1} + a_{n-1}}(x_1, \dots, x_n) \Omega)$$

$$G(\xi'_1, \dots, \xi'_{1-1}) = (\Omega, T^{\# r_{n+1} + b_1} \dots T^{\# r_{n+1} + b_{1-1}}(x_1, \dots, x_n) \Omega).$$

On a à étudier (dans le cas $l \geq 1$)

$$F(\xi) G(\xi') \prod_{j=1}^l \Delta^+(\xi_{u(j)} - \xi'_{v(j)} + \eta; m) \quad (42)$$

(avec la convention : $\xi_r = \xi'_s = 0$). Cette expression a bien un sens comme distribution tempérée car :

$$\prod_{j=1}^l \Delta^+(t_j + \eta)$$

est une distribution tempérée en η à valeurs dans les fonctions $\mathcal{E}^0$ de $t_1, \dots, t_\ell$. C'est en effet la valeur au bord de la fonction

$$\prod_{j=1}^{\ell} \Delta^+(t_j + \eta + i\eta')$$

holomorphe quand $\text{Im } \eta' \in V^-$.

Supposons maintenant que F (resp. G) est singulière à l'origine d'ordre ω_1 (resp. ω_2) en tant que distribution tempérée dans les variables $\xi_1, \dots, \xi_r$ (resp. $\xi'_1, \dots, \xi'_s$). On veut montrer que (42), en tant que distribution tempérée dans les variables $\xi_1, \dots, \xi_r, \xi'_1, \dots, \xi'_s, \eta$, est singulière d'ordre $\omega_1 + \omega_2 + 2\ell - 4$ à 0.

Dans le cas $\ell = 1$ il suffit d'appliquer la règle du produit tensoriel à F, G et Δ^+ , cette dernière étant singulière à 0 d'ordre -2. De même, dans le cas $\ell = 0$, (42) se réduit à $F \otimes G \otimes 1$ et, comme 1 est d'ordre -4, on trouve bien $\omega_1 + \omega_2 - 4$.

Dans le cas $\ell \geq 2$, posons

$$\begin{aligned} R(t, \eta) &= \prod_{j=1}^{\ell} \Delta^+(t_j + \eta) = \\ &= \int d^4 p \, e^{-i p \cdot \eta} = i \sum_{j=1}^{\ell} p_j t_j \delta(p - \sum_{j=1}^{\ell} p_j) \prod_{j=1}^{\ell} \delta(p_j^2 - m^2) \theta(p_j^0) d^4 p_j, \end{aligned}$$

$$(t = (t_1, \dots, t_\ell) \in \mathbb{R}^{4\ell}; \eta \in \mathbb{R}^4).$$

Pour tout multi-indice α

$$D_t^\alpha R(t, \eta) = \left(i \frac{\partial}{\partial \eta^0} + 1\right) \left(i \frac{\partial}{\partial \eta^0}\right)^M B_\alpha(t, \eta)$$

avec $M = 2\ell + |\alpha|$ et

$$B_\alpha(t, \eta) =$$

$$= \int \frac{d^4 P (-i p)^\alpha}{(P^0)^M (P^0 + 1)} e^{-i P \eta - i \sum_{j=1}^{\ell} p_j t_j} \delta(P - \sum_{j=1}^{\ell} p_j) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell} \delta(p_j^2 - m^2) \theta(p_j^0) d^4 p_j$$

En tenant compte de l'inégalité $|1 - e^{i\theta}| < |\theta|$ pour tout θ réel et du fait que, dans le domaine d'intégration, $P \in \bar{V}^+$, $|\vec{p}_j| \leq p_j^0 \leq P^0$, ($1 \leq j \leq \ell$), on a, pour tout $A > 0$

$$|B_\alpha(t, \eta) - B_\alpha(0, 0)| < \text{const.} \int_{\substack{P \in \bar{V}^+ \\ P^0 < A}} \frac{d^4 P \| (t, \eta) \|}{(P^0 + 1) (P^0)^{M-|\alpha|-1}} \rho_\ell(P)$$

$$+ \text{const.} \int_{\substack{P \in \bar{V}^+ \\ P^0 \geq A}} \frac{d^4 P}{(P^0 + 1) (P^0)^{M-|\alpha|}} \rho_\ell(P)$$

où

$$\rho_\ell(P) = \int \delta(P - \sum_{j=1}^{\ell} p_j) \prod_{j=1}^{\ell} \delta(p_j^2 - m^2) d^4 p_j$$

$$\|(t, \eta)\|^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \|t_j\|^2 + \|\eta\|^2$$

et les constantes ne dépendent que de l et α . Pour $l \geq 2$, ρ_l est une fonction continue, de support $\{P : P^0 \geq 0, P^2 \geq l^2 m^2\}$, bornée par $\text{const.} (P^0)^{2l-4} \theta(P^0 - |\vec{P}|)$, (la constante dépend de l).

Donc

$$|B_\alpha(t, \eta) - B_\alpha(0, 0)| \leq \text{const.} \int_{0 \leq P^0 \leq A} \frac{dP^0 \| (t, \eta) \|}{(P^0 + 1)}$$

$$+ \text{const.} \int_{P^0 \geq A} \frac{dP^0}{(P^0)^2} \leq$$

$$\leq \text{const.} [\| (t, \eta) \| \log(A+1) + A^{-1}]$$

En prenant $A = \| (t, \eta) \|^{-1}$ pour $\| (t, \eta) \| \leq 1$ et $A = 1$ pour $\| (t, \eta) \| > 1$, on obtient la borne

$$|B_\alpha(t, \eta) - B_\alpha(0, 0)| < \text{const} \| (t, \eta) \| [1 + |\log \| (t, \eta) \| |]$$

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que ceci soit borné par

$$C(\varepsilon) \| (t, \eta) \|^{1-\varepsilon} (1 + \| (t, \eta) \|)$$

Notons que, M étant > 1 , on a

$$D_t^\alpha R(t, \eta) = (i \frac{\partial}{\partial \eta^0} + 1) (i \frac{\partial}{\partial \eta^0})^M [B_\alpha(t, \eta) - B_\alpha(0, 0)]$$

Soit maintenant $\varphi(\xi, \xi', \eta)$ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4(r+s)-4})$ et

$$\psi(\xi, \xi') = \int \mathcal{R}(t, \eta) \varphi(\xi, \xi', \eta) d\eta \Big|_{t_j = \xi_{u(j)} - \xi'_{v(j)}}$$

D'après la règle du produit tensoriel

$$\begin{aligned} I &= \left| \int F(\xi) G(\xi') \mathcal{R}(t, \eta) \varphi(\xi, \xi', \eta) d\xi d\xi' d\eta \right| \leq \\ &\leq \text{const.} \sum_{|\alpha| \leq \kappa} \sup_{\xi, \xi'} (1 + \|\xi, \xi'\|)^P \|\xi, \xi'\|^{(-\omega_1 - \omega_2 + |\alpha| - 2)^+} |D_{\xi, \xi'}^\alpha \psi(\xi, \xi')| \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} |D_{\xi, \xi'}^\alpha \psi(\xi, \xi')| &\leq \sum_{|\alpha| \leq |\alpha|} \text{const.} \int \|\xi(t, \eta)\|^{1-\varepsilon} (1 + \|\xi(t, \eta)\|) \times \\ &\times |D_{\xi, \xi'}^\gamma (-i \frac{\partial}{\partial \eta^0} + 1) (-i \frac{\partial}{\partial \eta^0})^{|\alpha| - |\gamma| + 2\ell} \varphi(\xi, \xi', \eta) | d^4 \eta \\ &\leq \text{const.} \sum_{|\alpha| \leq |\alpha| + 2\ell + 1} \sup_{\eta} (1 + \|\xi(t, \eta)\|)^2 \|\xi(t, \eta)\|^{1-\varepsilon} \|\eta\|^{4-\varepsilon} |D_{\xi, \xi', \eta}^\gamma \varphi(\xi, \xi', \eta)| \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 I &< \text{const.} \sum_{|\alpha| \leq \kappa + 2\ell + 1} \sup_{\xi, \xi', \eta} (1 + \|(\xi, \xi', \eta)\|)^{p'} \times \\
 &\times \|(\xi, \xi', \eta)\|^{(-\omega_1 - \omega_2 + |\alpha| - 2\ell - 1)^+ + 5 - 2\varepsilon} |D^\alpha \varphi(\xi, \xi', \eta)| \leq \\
 &\leq \text{const.} \sum_{|\alpha| \leq \kappa + 2\ell + 1} \sup_{\xi, \xi', \eta} (1 + \|(\xi, \xi', \eta)\|)^q \times \\
 &\times \|(\xi, \xi', \eta)\|^{(-\omega_1 - \omega_2 + |\alpha| - 2\ell + 4 - 3\varepsilon)^+} |D^\alpha \varphi(\xi, \xi', \eta)|
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité montre que

$$F(\xi) G(\xi') \prod_{j=1}^{\ell} \Delta^+(\xi_{u(j)} - \xi'_{v(j)} + \eta; m)$$

est une distribution tempérée, singulière à l'origine d'ordre $\omega_1 + \omega_2 + 2\ell - 4$. D'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned}
 \omega_1 + \omega_2 + 2\ell - 4 &= 2(\nu - 4) + 1(\nu - 4) - \sum_{j=1}^{n+1} r_j - \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{k=1}^{\ell} b_k + 8 + 2\ell - 4 \\
 &= (2+1)(\nu - 4) - \sum_{j=1}^{n+1} r_j + 4
 \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^{\ell} b_k = \ell.$$

Ceci achève la démonstration récursive.

Conclusion

On vient de voir que si, à chaque ordre, le découpage de distributions est fait de manière à conserver leur ordre de singularité à 0, on obtient des distributions tempérées

$$(\Omega, T^{\#} z_1 \dots z_n (x_1, \dots, x_n) \Omega)$$

singulières à l'origine d'ordre

$$\omega = n(n-4) - \sum_{j=1}^n z_j + 4$$

Les solutions de ce type seront dites "minimales" ; celle qui correspond à la "solution centrale" du problème de découpage sera appelée "solution centrale" du problème récursif. (Ces noms légèrement pompeux ne sont utilisés que comme abréviations. Que le lecteur veuille bien les excuser et ne pas les prendre trop au sérieux.)

L'existence des solutions minimales et la théorie du "comptage des puissances" permet la classification bien connue des théories Lagrangiennes en théories "renormalisables" et "non renormalisables". On a vu qu'au $T(x_1, \dots, x_n)$ donné par une solution minimale, on peut ajouter des combinaisons linéaires (finies !) arbitraires de termes de la forme

$$\frac{: A(X)^4 :}{4!} D^\alpha \delta(x_1 - x_n) \dots \delta(x_{n-1} - x_n)$$

où $|\alpha| \leq \omega = n(\nu - 4) - |s| + 4$; un tel terme sera appelé : contre-terme d'ordre n , à $|s|$ lignes externes, singulier d'ordre $|\alpha|$.
L'inégalité $|\alpha| + |s| \leq n(\nu - 4) + 4$ permet de distinguer deux cas :

- (i) $\nu - 4 \leq 0$. Le nombre de lignes externes des contre-termes ne peut dépasser quatre : théories renormalisables. L'addition de ces contre-termes peut être interprétée comme une "renormalisation" d'un nombre fini de paramètres de la théorie possédant une signification physique (voir ^{3),5),6)}). Si $\nu - 4 < 0$ on a une théorie "super-renormalisable", pour laquelle le nombre des contre-termes possibles est fini.
- (ii) $\nu - 4 > 0$. Pour tout nombre de lignes externes, possibilité d'ajouter des contre-termes d'ordres arbitrairement élevés, en général non interprétables physiquement : théories "non renormalisables".

2. - Remarque technique : comptage des puissances dans l'espace des impulsions

La connaissance de l'ordre de singularité à 0 d'une distribution tempérée ne donne que peu de renseignements sur elle. Il est remarquable que cette classification très grossière suffise pour la théorie du "comptage des puissances" étudié plus haut. Mais on peut aussi procéder d'une façon différente, et étudier plutôt le comportement à l'infini des transformées de Fourier des $(\Omega, T^{\#r} \Omega)$. On peut utiliser dans ce but la définition suivante :

Définition 2

Soit F une distribution tempérée sur $\mathcal{R}^N$. On dit que F est de degré ω s'il existe un entier $l \geq 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, une constante $K(\varepsilon)$, tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{R}^N)$ on ait :

$$|KF, \varphi| \leq K(\varepsilon) \sum_{|s| \leq l} \sup_{p \in \mathcal{R}^N} (1 + \|p\|)^{N + \omega + |s| + \varepsilon} |D^s \varphi(p)|$$

On montre alors, par récurrence, que les solutions minimales définissent des $T^{\# r_1, \dots, r_n}(x_1, \dots, x_n)$ tels que les distributions tempérées

$$\int e^{i \sum_{j=1}^{n-1} p_j (x_j - x_n)} (\Omega, T^{\# r_1, \dots, r_n}(x_1, \dots, x_n) \Omega) d^4(x_1 - x_n) \dots d^4(x_{n-1} - x_n)$$

[considérées comme éléments de $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^{4(n-1)})$] soient de degré

$$\omega = n(n-4) - \sum_{j=1}^n r_j + 4$$

L'instrument essentiel de la démonstration est la propriété suivante de $\tilde{W}$, transformée de Fourier de la fonction W sur $\mathbb{R}^N$ introduite au paragraphe V : pour tout ρ tel que $0 \leq \rho \leq N-1$, pour tout entier $|\alpha| \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une constante $K(\varepsilon, |\alpha|) > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on ait

$$\begin{aligned} & (1 + \|\rho\|)^{\rho + |\alpha| + \varepsilon} |D^\alpha \tilde{W} * \varphi(\rho)| \leq \\ & \leq \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + 1} K(\varepsilon, |\alpha|) \sup_{\rho' \in \mathbb{R}^N} (1 + \|\rho'\|)^{\rho + |\beta| + 3\varepsilon} |D^\beta \varphi(\rho')|. \end{aligned}$$

Ceci sera exposé en détail dans ¹⁾.

Bien que beaucoup plus précise que celle de l'"ordre de singularité à 0", la caractérisation par le "degré" n'est pas aussi fine qu'on le voudrait pour approfondir la question de la "limite adiabatique" ; voir le paragraphe VIII.

3. - Remarque : une classe particulière de solutions

Il est facile de constater, par récurrence, qu'on peut trouver des solutions, et notamment des solutions minimales, telles que

$$\begin{aligned} & (\Omega, T^{\nu-1, \nu_2 \dots \nu_n} (x_1, \dots, x_n) \Omega) = \\ & = \nu! \sum_{j=2}^n i \Delta_F(x_1 - x_j; m) (\Omega, T^{\nu_2 \dots \nu_{j+1} \dots \nu_n} (x_1, \dots, x_n) \Omega) \end{aligned} \quad (43)$$

C'est en particulier le cas pour la solution minimale que nous avons appelée "centrale".

4. - Remarque : cas de la masse nulle

Presque tout ce qui a été dit jusqu'ici s'applique au cas de la masse nulle. Toutefois la région $\mathcal{R}$ où s'annule la transformée de Fourier de $(\Omega, D(1, 2, \dots, n-1) \Omega)$ ne contient plus l'origine. Néanmoins, on montre que le domaine Δ_1 du paragraphe V est invariant par le groupe de Lorentz complexe $L_+(\mathbb{C})$. Ceci permet de définir, avec les notations du paragraphe V,

$$\int_{\Lambda \in O(4)} G(\Lambda k) d\Lambda$$

où $O(4)$ est un sous-groupe compact maximal de $L_+(\mathbb{C})$ et $d\Lambda$ la mesure invariante sur $O(4)$ telle que $\int d\Lambda = 1$. Cette formule fournit une solution minimale et invariante de Lorentz du problème de découpage.

Les difficultés de la masse nulle apparaissent quand on essaie de prendre la limite adiabatique dont il est question au paragraphe VIII. Nous nous limiterons dans toute la suite au cas $m > 0$.

VII. - LE POINT DE VUE DE LA SOUSTRACTION DES DIVERGENCES PAR DES CONTRE-TERMES INFINIS ; EQUIVALENCE AVEC LE FORMALISME HABITUEL

(Ce paragraphe ne contient que des esquisses de démonstrations. Il peut être omis sans dommage pour la suite. Les notations sont celles du paragraphe VI.)

Comme on l'a vu plus haut, la "solution" formelle du problème récursif par les formules

$$T^{r_1 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_p \theta(x_{p1}^0 - x_{p2}^0) \dots \theta(x_{p(n-1)}^0 - x_{pn}^0) \mathcal{L}^{(r_1)}(x_1) \dots \mathcal{L}^{(r_n)}(x_n) \quad (44)$$

n'a pas de sens car les distributions tempérées (à valeurs opérateurs) $\mathcal{L}^{(r_1)}(x_1) \dots \mathcal{L}^{(r_n)}(x_n)$ ne sont pas assez régulières pour être multipliables par des fonctions θ . Ceci se manifeste en particulier par la divergence des intégrales de Feynman (diagrammes) que l'on obtient en essayant de calculer la transformée de Fourier de la valeur moyenne dans le vide de (44). Mais la formule (44) prend un sens si on a, au préalable, régularisé les $\mathcal{L}^{(r)}$ de façon convenable.

La régularisation de Pauli-Villars (la mieux adaptée à la méthode de renormalisation décrite ici) consiste à remplacer, dans

$$\mathcal{L}^{(r)}(x) = \frac{\nu!}{(\nu-r)!} : A(x)^{\nu-r} : ,$$

le champ libre $A(x)$ par un autre champ $B(x)$ obtenu de la façon suivante. On plonge l'espace de Fock $\mathcal{F}$ du champ libre $A(x)$ (de masse m) dans l'espace de Fock $\mathcal{H}$ d'une suite finie de champs libres $V_1(x), V_2(x), \dots, V_N(x)$, de masses respectives $M_1, \dots, M_N$; certains de ces champs sont quantifiés avec la métrique négative, de sorte que $\mathcal{H}$ est un espace à métrique indéfinie. On a [en posant $A(x) = V_0(x)$, $M_0 = m$]

$$[V_j(x), V_k(y)] = \delta_{jk} \epsilon_j \frac{1}{i} \Delta(x-y; M_j)$$

où $\epsilon_j = 1$ ou -1 ,

$$(\Omega, V_j(x) V_k(y) \Omega) = \delta_{jk} \epsilon_j \frac{1}{i} \Delta^+(x-y; M_j) =$$

$$= \delta_{jk} \epsilon_j \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip(x-y)} \theta(p^0) \delta(p^2 - M_j^2) d^4p$$

On pose

$$B(x) = \sum_{j=0}^N c_j V_j(x) \quad \text{avec} \quad c_0 = 1$$

d'où

$$(\Omega, B(x) B(y) \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip(x-y)} \theta(p^0) \sum_{j=0}^N \epsilon_j c_j^2 \delta(p^2 - M_j^2) d^4p$$

Si les c_j et ϵ_j ont été bien choisis, cette distribution est en fait une fonction continue ou même un certain nombre de fois continûment différentiable. Quand on fait tendre les $M_j (1 \leq j \leq N)$ vers $+\infty$, elle tend vers $(\Omega, A(x) A(y) \Omega)$ au sens des distributions tempérées.

Après la substitution de B à A dans les $\mathcal{L}^{(r)}$, les formules (44) ont un sens mais fournissent des $(\Omega, T^{(r)}(X)\Omega)$ qui n'ont pas de limite lorsque les M_j ($j \geq 1$) tendent vers ∞ ; les transformées de Fourier de ces distributions sont les intégrales de Feynman régularisées mais non renormalisées.

On peut d'autre part appliquer aux $\mathcal{L}^{(r)}$ régularisés la construction récurrente décrite au paragraphe VI ; notons par exemple $T^{r_1, \dots, r_n}(X)$ les opérateurs obtenus en adoptant à chaque ordre la "solution centrale" du problème de découpage, c'est-à-dire telle que la transformée de Fourier de $(\Omega, T^{(r)}(X)\Omega)$ s'annule $\omega + 1$ fois à l'origine, $\omega = n(\nu - 4) - \sum_{j=1}^n r_j + 4$; on peut montrer que ces distributions tempérées tendent bien vers la "solution centrale" du problème non régularisé quand les $M_j \rightarrow \infty$ ($1 \leq j \leq N$).

On voit facilement, par récurrence, que les $T^{(r_1, \dots, r_n)}(x_1, \dots, x_n)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} S(\underline{g}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_n) T(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_n) \sum_p \theta(x_{p_1}^0 - x_{p_2}^0) \dots \theta(x_{p_{(n-1)}}^0 - x_{p_n}^0) X \end{aligned} \quad (45)$$

$$\times \mathcal{R}(x_{p_1}; \underline{g}) \dots \mathcal{R}(x_{p_n}; \underline{g})$$

Cette formule doit être construite au sens des séries formelles en $\underline{g}$; l'opérateur (série formelle) $\mathcal{R}(x; \underline{g})$ est de la forme

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R}(x; \underline{g}) \underline{g}(x) dx &= \int \mathcal{L}(x) \underline{g}(x) dx + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_1 \int g_{n_1}(x_1) \dots g_{n_n}(x_n) \rho^{n_1 + n_2 + \dots + n_n + d_n}(x_1, \dots, x_n) \times \\ &\times \frac{: A(x_1)^{d_1} \dots A(x_n)^{d_n} :}{d_1! \dots d_n!} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

où, pour $n \geq 2$,

$$\rho^{n_1 \dots n_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha| + |s| \leq n(\nu-4) + 4} \rho_\alpha^s D^\alpha \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \quad (46)$$

En effet supposons que $S(\underline{g})$ coïncide jusqu'au $(n-1)$ ième ordre avec l'expression écrite au second membre de (45). Alors le terme du n ième ordre de

$$\int dx_1 \dots dx_n \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_n) \sum_{\mathcal{P}} \theta(x_{\mathcal{P}_1}^0 - x_{\mathcal{P}_2}^0) \dots \theta(x_{\mathcal{P}_{(n-1)}}^0 - x_{\mathcal{P}_n}^0) \\ \mathcal{R}_{n-1}(x_{\mathcal{P}_1}; \underline{g}) \dots \mathcal{R}_{n-1}(x_{\mathcal{P}_n}; \underline{g})$$

que nous notons $\Theta(x_1, \dots, x_n)$ [où $\mathcal{R}_{n-1}(x; \underline{g})$ est obtenue en éliminant les termes d'ordre $\geq n$ dans $\mathcal{R}(x; \underline{g})$] fournit une solution du problème de découpage qui se pose pour passer de la $(n-1)$ ième à la n ième étape du problème de récurrence. La solution centrale en diffère par

$$T^n(x_1, \dots, x_n) - \Theta^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_s \rho^{n+s}(x_1, \dots, x_n) \frac{:A(X)^s:}{s!}$$

où ρ^r est de la forme (46). Ce sont ces ρ que l'on utilise pour définir $\mathcal{R}_n(x; \underline{g})$.

Les opérateurs $\mathcal{R}_n(x; \underline{g})$ n'ont pas de limite quand les M_j ($j \geq 1$) tendent vers $+\infty$: on dit qu'à la limite ils contiennent des contre-termes infinis. La liste des contre-termes, donnée par l'inégalité $|\alpha| + |s| \leq n(\nu-4) + 4$, est la même que dans le formalisme de Bogoliubov-Parasiuk-Hepp ; ils sont complètement déterminés si on impose (par exemple) l'annulation d'ordre $\omega+1$

$\left[\omega = n(\nu - 4) - \sum_{j=1}^n r_j + 4 \right]$ à l'origine des transformées de Fourier des $(\Omega, T^r(X), \Omega)$. Donc la théorie que nous avons décrite coïncide avec celle de Bogoliubov-Parasiuk-Hepp.

[Notons que le nombre de régulateurs V_j à utiliser dépend de la théorie et même, pour les théories non renormalisables, de l'ordre auquel on veut poursuivre les considérations ci-dessus.]

VIII. - PROPRIETES DES SOLUTIONS OBTENUES. PROBLEMES DE LA LIMITE ADIABATIQUE

Toute cette partie de la théorie est fortement abrégée dans cet exposé. Pour plus de détails, voir ¹⁾.

1. - Généralités

Les paragraphes précédents ont permis de construire une série formelle $S(\underline{g})$ dont les dérivées fonctionnelles à 0 par rapport à $\underline{g}$, c'est-à-dire les $T(X)$, ont toutes les propriétés énoncées aux paragraphes II et IV ; en particulier nous ne considérons plus que les solutions qui ont la propriété (43) de VI.3.

Il est facile de vérifier qu'une telle série formelle $S(\underline{g})$ vérifie (au sens des séries formelles) toutes les conditions énoncées au paragraphe I. La seule vérification non complètement triviale est celle de (5). Posons

$$V(\underline{g}, \underline{h}) = S(\underline{g})^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}) \quad , \quad W(\underline{g}, \underline{h}) = S(\underline{g} + \underline{h}) S(\underline{g})^{-1}.$$

La condition (5) équivaut à la suivante :

$$V(\underline{g} + \underline{h}_2, \underline{h}_1) = V(\underline{g}, \underline{h}_1) \quad \text{si} \quad \text{supp. } \underline{h}_2 \supseteq \text{supp. } \underline{h}_1 \quad (47)$$

car celle-ci s'écrit

$$S(\underline{g} + \underline{h}_2)^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}_2 + \underline{h}_1) = S(\underline{g})^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}_1)$$

d'où, en multipliant par $S(\underline{g})^{-1}S(\underline{g}+\underline{h}_2)$ à gauche,

$$S(\underline{g})^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}_2 + \underline{h}_1) = S(\underline{g})^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}_2) S(\underline{g})^{-1} S(\underline{g} + \underline{h}_1)$$

c'est-à-dire (5) pour V , et aussi pour $W(\underline{g}, \underline{h}) = S(\underline{g}) V(\underline{g}, \underline{h}) S(\underline{g})^{-1}$.
Notons

$$\begin{aligned} V(\underline{g}, \underline{h}) &= \\ &= \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(i)^{n+m}}{n! m!} \int \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \underline{g}(x_1) \dots \underline{g}(x_n) \underline{h}(y_1) \dots \underline{h}(y_m) \\ &\quad dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m \end{aligned}$$

La condition (47) s'exprime par :

$$\begin{aligned} \text{supp. } \mathcal{R}(X; Y) &\subset \{X, Y : [X] \subset [Y] + \bar{V}^-\} = \\ &= \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m : x_j - y_k \in \bar{V}^- \text{ pour tout } j \text{ et tout } k\} \end{aligned} \quad (48)$$

C'est ce qu'il faut vérifier sur la formule

$$\mathcal{R}(X; Y) = \sum_{I \subset X} (-1)^{|I|} \bar{T}(I) T(X \setminus I, Y) \quad (49)$$

Supposons que (X, Y) ne soit pas dans l'ensemble ci-dessus. Ce point est situé dans une région où $X = P \cup Q$, $P \neq \emptyset$, $[P] \cap [Y] + \bar{V}^- = \emptyset$, $[Q] \subset [Y] + \bar{V}^-$ et où :

$$\begin{aligned}
 R(x; Y) &= \sum_{\substack{J \subset P \\ K \subset Q}} (-1)^{|J|+|K|} \overline{T}(J \cup K) T(P \setminus J, Q \setminus K, Y) \\
 &= \sum_{\substack{J \subset P \\ K \subset Q}} (-1)^{|J|+|K|} \overline{T}(K) \overline{T}(J) T(P \setminus J) T(Q \setminus K, Y)
 \end{aligned}$$

La sommation sur J , pour chaque K fixé, donne 0 puisque $P \neq \emptyset$.
C.Q.F.D.

On peut maintenant définir les champs renormalisés $\hat{A}(x; \underline{g})$ par

$$\hat{A}(x; \underline{g}) = \frac{1}{i\nu!} \frac{\delta}{\delta h_{\nu-1}(x)} V(\underline{g}, \underline{h}) \Big|_{\underline{h}=0} = \frac{1}{i\nu!} S(\underline{g})^{-1} \frac{\delta}{\delta g_{\nu-1}(x)} S(\underline{g}) \quad (50)$$

Plus généralement,

$$\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g}) = S(\underline{g})^{-1} \frac{\delta}{\delta g(x)} S(\underline{g}) \quad (51)$$

et

$$\hat{T}(x_1, \dots, x_n; \underline{g}) = S(\underline{g})^{-1} \frac{\delta^n}{i^n \delta g(x_1) \dots \delta g(x_n)} S(\underline{g}) \quad (52)$$

En d'autres termes,

$$\hat{T}(x_1, \dots, x_n; \underline{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \mathcal{R}(y_1, \dots, y_n; x_1, \dots, x_n) \underline{g}(y_1) \dots \underline{g}(y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad (53)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \hat{T}(x_1, \dots, x_n; \underline{g}) \underline{h}(x_1) \dots \underline{h}(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = V(\underline{g}, \underline{h})$$

La propriété (5) de factorisation de V montre que, si $X = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$, on a, dans la région $[P] \succ [Q]$,

$$\hat{T}(X; \underline{g}) = \hat{T}(P; \underline{g}) \hat{T}(Q; \underline{g})$$

On voit que $\hat{T}(x; \underline{g})$ a toutes les propriétés d'un produit chronologique des $\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g})$.

La limite adiabatique est celle où la fonction à ν composantes $\underline{g}(x) = \{g_0(x), \dots, g_{\nu-1}(x)\}$ tend, dans un sens convenable, vers $\{\lambda, 0, \dots, 0\}$, λ étant une constante. Les problèmes à résoudre sont de déterminer si : (i) $S(\underline{g})$ tend vers une limite $S(\lambda)$, série formelle en λ opérant dans $\mathcal{F}$ et si cette limite est unitaire au sens des séries formelles, et, (ii) dans quelle mesure les champs interagissants renormalisés et leurs fonctions de Green ont des limites, séries formelles en λ . Ces problèmes n'ont reçu pour l'instant qu'un début de solution, la seule propriété bien établie étant l'existence de limites pour les fonctions de Green et certains éléments de matrice de $S(\underline{g})$.

Les fonctions de Green sont intimement liées aux produits retardés généralisés (P.R.G.), dont nous ne parlerons que très brièvement.

Dans ce qui précède on a construit des produits chronologiques $T(x_1, \dots, x_n)$ pour les champs $\mathcal{L}(x_1), \dots, \mathcal{L}(x_n)$, qui sont des polynômes de Wick ; on s'en est servi pour construire les produits chronologiques $\hat{T}(x_1, \dots, x_n; g)$ des champs interagissants $\hat{\mathcal{L}}(x_1; g), \dots, \hat{\mathcal{L}}(x_n; g)$. A chaque étape de la construction récurrente des T on peut en même temps construire des P.R.G. pour $\mathcal{L}(x_1), \dots, \mathcal{L}(x_n)$; un cas particulier est celui des "produit avancé" et "produit retardé" $A_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$ et $R_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$ qui ont été introduits aux paragraphes III et IV. La construction récurrente fournit automatiquement tous les P.R.G. de Ruelle ; les plus faciles à obtenir sont les P.R.G. de Steinmann (P.R.G.S.). En fait on aurait pu fonder toute la théorie récurrente sur les P.R.G.S. et en tirer les $T(X)$ (voir ¹²) où cette méthode est résumée).

Si on est en possession des $T(X)$ c'est-à-dire de la série formelle $S(g)$ on peut procéder de la façon suivante : on définit deux opérations applicables à toute série formelle en g ; par exemple $\mathcal{O}(g)$:

$$\hat{\mathcal{L}}(x; g) \downarrow \mathcal{O}(g) = \frac{1}{\delta g(x)} \mathcal{O}(g), \text{ en abrégé } \hat{x} \downarrow \mathcal{O} \quad (54)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(x; g) \uparrow \mathcal{O}(g) = S^{-1}(g) [\hat{x} \downarrow S(g) \mathcal{O}(g) S(g)^{-1}] S(g),$$

$$\text{en abrégé } \hat{x} \uparrow \mathcal{O} \quad (55)$$

On écrira aussi, en abrégé, $\hat{x}$ au lieu de $\hat{\mathcal{L}}(x; g)$ défini par (51).
Par exemple

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \downarrow \hat{x}_2 \downarrow \dots \downarrow \hat{x}_{n-1} \downarrow \hat{x}_n &= (i)^{-(n-1)} \frac{\delta^{(n-1)}}{\delta \underline{g}(x_1) \dots \delta \underline{g}(x_{n-1})} \hat{\mathcal{L}}(x_n; \underline{g}) \\ &= \hat{\mathcal{L}}(x_1; \underline{g}) \downarrow \dots \downarrow \hat{\mathcal{L}}(x_{n-1}; \underline{g}) \downarrow \hat{\mathcal{L}}(x_n; \underline{g}) \end{aligned} \quad (56)$$

Les mêmes expressions sans chapeau veulent dire qu'on a partout pris $\underline{g} = 0$. Par exemple x sera l'abréviation de $\mathcal{L}(x)$. Les produits retardés généralisés de Steinmann des $\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g})$ sont les expressions de la forme

$$\hat{x}_1 \updownarrow \dots \updownarrow \hat{x}_j \updownarrow \dots \updownarrow \hat{x}_k$$

où $\updownarrow$ veut dire $\uparrow$ ou $\downarrow$. Les P.R.G.S. des $\mathcal{L}(x)$ sont les mêmes objets sans chapeau. On les note soit par

$$\mathcal{L}(x_{j_1}) \updownarrow \dots \updownarrow \mathcal{L}(x_{j_n})$$

soit

$$x_{j_1} \updownarrow \dots \updownarrow x_{j_n}$$

soit même

$$j_1 \updownarrow \dots \updownarrow j_n$$

Par la définition même des flèches on voit que les flèches de même direction commutent

$$\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g}) \downarrow \hat{\mathcal{L}}(y; \underline{g}) \downarrow \mathcal{O}(\underline{g}) = \hat{\mathcal{L}}(y; \underline{g}) \downarrow \hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g}) \downarrow \mathcal{O}(\underline{g}) \quad (57)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g}) \uparrow \hat{\mathcal{L}}(y; \underline{g}) \uparrow \mathcal{O}(\underline{g}) = \hat{\mathcal{L}}(y; \underline{g}) \uparrow \hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g}) \uparrow \mathcal{O}(\underline{g}) \quad (58)$$

De plus

$$\begin{aligned} \hat{x} \uparrow \mathcal{O} - \hat{x} \downarrow \mathcal{O} &= S^{-1} (\hat{x} \downarrow S \mathcal{O} S^{-1} - S (\hat{x} \downarrow \mathcal{O}) S^{-1}) S \\ &= S^{-1} ((\hat{x} \downarrow S) \mathcal{O} S^{-1} - S \mathcal{O} S^{-1} (\hat{x} \downarrow S) S^{-1}) S \\ &= [\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g}), \mathcal{O}(\underline{g})] \end{aligned}$$

ce que nous noterons en abrégé :

$$\hat{x} \uparrow \mathcal{O} - \hat{x} \downarrow \mathcal{O} = [\hat{x}, \mathcal{O}] \quad (59)$$

Le fait que les flèches de même sens commutent nous permet d'utiliser la notation encore plus abrégée :

$$\hat{I}_1 \downarrow \hat{I}_2 \uparrow \dots I_\mu \downarrow \hat{J} \quad \text{pour :}$$

$$(\prod_{k \in I_1} \hat{\mathcal{L}}(x_k; \underline{g}) \downarrow) (\prod_{k \in I_2} \hat{\mathcal{L}}(x_k; \underline{g}) \uparrow) \dots (\prod_{k \in I_\mu} \hat{\mathcal{L}}(x_k; \underline{g}) \downarrow) \mathcal{L}(x_j; \underline{g}).$$

On peut alors trouver, en partant des définitions, une formule explicite donnant les $\mathcal{L}(x_1) \updownarrow \dots \updownarrow \mathcal{L}(x_n)$ à partir des $T(X)$ et $\bar{T}(X)$ (avec $|X| \leq n$) :

$$I_1 \downarrow I_2 \uparrow \dots \uparrow I_\mu \downarrow n = \\ = \sum \check{T}(J_1) T(J_2) \check{T}(J_3) \dots \check{T}(J_\mu) T(J_{\mu+1}) \dots \check{T}(J_{2\mu-1}) T(J_{2\mu})$$

où $\check{T}(J) = (-1)^{|J|} \bar{T}(J)$ et où la sommation porte sur les $J_1, \dots, J_{2\mu}$ tel que $J_r \cap J_s = \emptyset$ pour $r \neq s$, $J_r \cup J_{2\mu+1-r} \subset \bigcup_{s=1}^r I_s$, $n \in J_{\mu+1}$, et $\bigcup_{r=1}^2 J_r = I_1 \cup \dots \cup I_\mu \cup \{n\}$.

Ces formules permettent de montrer facilement que les $I_1 \updownarrow \dots \updownarrow I_\mu \updownarrow j$ ont toutes les propriétés que doivent posséder des P.R.G.S. pour les $\mathcal{L}(x)$. Nous ne les rappellerons pas ici : voir les exposés de Bros et Stora ^{13), 14)} dans des conférences précédentes. De la connaissance des P.R.G.S. des $\mathcal{L}^{(r)}$ on tire (voir ¹³⁾), par de simples combinaisons linéaires, les P.R.G. les plus généraux (ceux de Ruelle), que nous noterons

$$\mathcal{A}^S(\mathcal{L}^{(r_1)}(x_1), \dots, \mathcal{L}^{(r_n)}(x_n))$$

S parcourt l'ensemble des "cellules" définies ainsi : dans $\mathbb{R}^n$ soit

$$\Xi_n = \{s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n s_j = 0\};$$

le complémentaire dans Ξ_n de l'union des hyperplans de la forme $\{s : \sum_{i \in I} s_i = 0\}$, (où I est un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$ non vide et de complémentaire non vide) est formé de cônes convexes polyédraux ouverts disjoints : ce sont les cellules. Une cellule S est donc une région de Ξ_n où chacune des sommes partielles de la forme $s_I \equiv \sum_{j \in I} s_j$ a un signe bien déterminé ε_I^S .

Le support de $(\Omega, \mathcal{A}^S(\mathcal{L}^{(r_1)}(x_1), \dots, \mathcal{L}^{(r_n)}(x_n))\Omega)$ est tel que sa transformée de Fourier est de la forme

$$r^S(p_1, \dots, p_n) \delta(p_1 + \dots + p_n)$$

où r^S considérée comme distribution tempérée sur $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ est valeur au bord d'une fonction analytique dans le tube $\mathcal{C}^S$:

$$\mathcal{C}^S = \{k = (k_1, \dots, k_n), \sum k_j = 0, \operatorname{Im} k_I \in \varepsilon_I^S V^+ \text{ pour tout } I\} \quad (60)$$

où $k_I \equiv \sum_{j \in I} k_j$ et ε_I^S est le signe de s_I dans S .

Lorsque S parcourt l'ensemble des cellules de Ξ_n , les fonctions holomorphes dont on vient de parler parcourent l'ensemble des restrictions aux $\mathcal{C}^S$ d'une fonction analytique unique, notée $H_{\mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}(k_1, \dots, k_n)}$; celle-ci est définie et holomorphe dans un domaine de $\{k : \sum k_j = 0\}$ qui contient, outre les $\mathcal{C}^S$, certains ouverts qui font communiquer ces tubes près des réels. La fonction

$$\begin{aligned} H'_{\mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}(k_1, \dots, k_n)} &= \\ &= \prod_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ [I \neq \emptyset}} (\ell_I^2 - m^2) H_{\mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}(k_1, \dots, k_n)} \end{aligned}$$

est holomorphe dans un domaine naturel $\tilde{\Delta}_n$ invariant par le groupe de Lorentz complexe et contenant (outre les tubes $\mathcal{C}^S$) tous les points réels de la forme :

$$\{p = (p_1, \dots, p_n), \sum p_j = 0, p_I^2 < 4m^2 \text{ pour tout } I\}$$

De plus $\tilde{\Delta}_n$ est étoilé par rapport à 0.

Si $|I| \neq 1$ ou $n-1$, le résidu du pôle simple de H le long de $\{k : k_I^2 = m^2\}$ est donné par

$$\begin{aligned} & (k_I^2 - m^2)^2 H_{\mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_p)} A}(k_{i_1}, \dots, k_{i_p}, -k_I) \times \\ & \times H_{A \mathcal{L}^{(r_{p+1})} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}}(k_I, k_{i_{p+1}}, \dots, k_{i_n}) \end{aligned} \quad (61)$$

où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $\bar{I} = \{i_{p+1}, \dots, i_n\}$ (cette fonction est holomorphe dans $\tilde{\Delta}_n$). La fonction $H_{\mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}}$ est (le prolongement analytique de) la fonction H rencontrée au paragraphe V dans le découpage de $(\Omega, D^{(r_1, \dots, r_n)} \Omega)$. On l'appelle : fonction de Green des champs $\mathcal{L}^{(r_1)}, \dots, \mathcal{L}^{(r_n)}$.

2. - Fonctions de Green des champs interagissants

D'après leur définition, les P.R.G.S. des $\hat{\mathcal{L}}(x; \underline{g})$ sont donnés par

$$\hat{\mathcal{L}}(x_1; \underline{g}) \uparrow \dots \uparrow \hat{\mathcal{L}}(x_s; \underline{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dy_1 \dots dy_n \underline{g}(y_1) \dots \underline{g}(y_n)$$

$$\mathcal{L}(y_1) \downarrow \dots \downarrow \mathcal{L}(y_n) \downarrow \mathcal{L}(x_1) \uparrow \dots \uparrow \mathcal{L}(x_s)$$

les flèches accompagnant les $\mathcal{L}(x_i)$ étant les mêmes que pour les $\hat{\mathcal{L}}(x_i; \underline{g})$. Prenons désormais $\underline{g} = (g, 0, \dots, 0)$. On obtient

$$\hat{\mathcal{L}}^{(r_1)}(x_1; \underline{g}) \uparrow \dots \uparrow \hat{\mathcal{L}}^{(r_n)}(x_n; \underline{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dy_1 \dots dy_n g(y_1) \dots g(y_n)$$

$$\mathcal{L}^{(0)}(y_1) \downarrow \dots \downarrow \mathcal{L}^{(0)}(y_n) \downarrow \mathcal{L}^{(r_1)}(x_1) \uparrow \dots \uparrow \mathcal{L}^{(r_n)}(x_n)$$

Lorsqu'on fait tendre g vers une constante λ , la transformée de Fourier $\tilde{g}$ de g tend vers $\lambda \delta(p)$. Pour étudier la limite de la valeur moyenne dans le vide de l'expression ci-dessus on doit donc chercher si

$$\int dy_1 \dots dy_n dx_1 \dots dx_n e^{i \sum_{j=1}^n x_j p_j} e^{i \sum_{k=1}^n y_k q_k}$$

$$(\Omega, \mathcal{L}^{(0)}(y_1) \downarrow \dots \downarrow \mathcal{L}^{(0)}(y_n) \downarrow \mathcal{L}^{(r_1)}(x_1) \uparrow \dots \uparrow \mathcal{L}^{(r_n)}(x_n) \Omega)$$

a une limite comme distribution tempérée en $p_1, \dots, p_s$ quand on essaye de la restreindre à : $q_1 = \dots = q_n = 0$.

Or le domaine d'holomorphie $\tilde{\Delta}_{n+s}$ de

$$H' \underbrace{\mathcal{L}^{(0)} \dots \mathcal{L}^{(0)}}_{n \text{ fois}} \mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)} (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_s)$$

est tel que son intersection par la variété $q_1 = \dots = q_n = 0$ est précisément celui d'une fonction de Green de s champs $\square$ multipliée par $\prod (p_i^2 - m^2) \square$. De plus les restrictions de H' aux divers tubes

de cette sous-variété ont les propriétés de croissance (polynomiales) voulues pour être des transformées de Laplace de distributions tempérées à supports côniques. On peut donc prendre comme $n^{\text{ième}}$ terme de la série formelle en λ pour la fonction de Green des $\hat{\mathcal{L}}^{(r)}$:

$$\begin{aligned} & H_{\hat{\mathcal{L}}^{(r_1)} \dots \hat{\mathcal{L}}^{(r_n)}}(p_1, \dots, p_n)_{n^{\text{e ordre}}} = \\ & = \underbrace{H_{\mathcal{L}^{(0)} \dots \mathcal{L}^{(0)}}}_{n \text{ fois}} \mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}(0, \dots, 0, p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

Les fonctions retardées généralisées obtenues par ce moyen ont toutes les propriétés algébriques et de supports requises. Mais si on veut qu'elles puissent correspondre à une théorie dont le spectre de masse est celui du champ libre $A(x)$, c'est-à-dire si on veut que les $\hat{A}(x;g)$ aient une chance de tendre vers des opérateurs dans $\mathcal{T}$ quand $g \rightarrow (\lambda, 0, \dots, 0)$, il est indispensable d'effectuer la renormalisation de masse. Celle-ci consiste à faire la construction récurrente de telle manière que

$$\prod_{k=1}^n (p_k^2 - m^2) H_{\hat{A} \dots \hat{A}}(p_1, \dots, p_n)_{n^{\text{e ordre}}}$$

n'ait pas de pôle le long de $\{p : p_j^2 = m^2\}$ (quel que soit j). Or cette fonction est la restriction à $\{p, q : q_1 = \dots = q_n = 0\}$ de

$$\prod_{k=1}^n (p_k^2 - m^2) H_{A \dots A} \mathcal{L}^{(0)} \dots \mathcal{L}^{(0)}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$$

Celle-ci a des pôles le long de $\{p, q : (p_j + q_I)^2 = m^2\}$ pour chaque j et chaque $I \neq \emptyset$. Le résidu correspondant est fourni par (61). Pour qu'il s'annule toujours quand $q_1 = \dots = q_n = 0$, on voit qu'il est nécessaire que

$$(p^2 - m^2)(r^2 - m^2) H_A \underbrace{\mathcal{L}^{(0)} \dots \mathcal{L}^{(0)}}_{|I| \text{ fois}} A(p, q_1, \dots, q_{|I|}, r)$$

s'annule quand $q_1 = \dots = q_{|I|} = 0$ et $p^2 = r^2 = m^2$. Quand on pose $q_1 = \dots = q_{|I|} = 0$ dans l'expression ci-dessus, on obtient une fonction de $p = -r$ holomorphe pour $p^2 \notin 4m^2 + \mathbb{R}^+$ et qui ne dépend que de p^2 . On peut donc la faire annuler à $p^2 = m^2$ par simple soustraction d'une constante au cours de la construction récurrente. Il est aussi commode d'assurer l'annulation au même point de sa dérivée première par rapport à p^2 : ceci permet d'avoir $(\Omega, \hat{A}(x)\Phi) = (\Omega, A(x)\Phi)$ pour tout état Φ à une particule (renormalisation de la fonction d'onde).

Lorsque ces précautions ont été prises au cours de la construction récurrente, les fonctions de Green obtenues pour les champs $\hat{A}$ ont toutes les propriétés voulues pour qu'on puisse les restreindre à la "couche de masse" (du moins aux points "non colinéaires") d'après les théorèmes de Hepp¹⁵⁾. On peut ainsi obtenir les éléments de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ entre des paires de vecteurs bien choisis (à impulsions non colinéaires).

Ceci n'est malheureusement pas suffisant pour démontrer l'existence de $S(\lambda)$ comme série formelle en λ opérant dans l'espace de Fock λ , ni l'unitarité dans cette limite adiabatique *).

*) Pour l'existence de cette limite il est indispensable d'avoir fait la construction récurrente de manière que $\lim(\Omega, S(g)\Omega) = 1$, c'est-à-dire de façon que $H \mathcal{L}^{(0)} \dots \mathcal{L}^{(0)}(k) \xrightarrow{E} 0$ s'annule au moins cinq fois à 0 [i.e., soit de la forme $\sum_{|\alpha|=5} k^\alpha G_\alpha(k)$].

Il faut pour cela des renseignements plus détaillés sur la structure locale des fonctions de Green au voisinage de la "couche de masse". Il y a de bonnes raisons de croire que la construction récurrente décrite dans cet exposé puisse fournir ces renseignements.

En conclusion, on peut donc dire que la méthode exposée ici fournit une démonstration simple de la localité des solutions ; celle-ci s'exprime soit par la propriété de factorisation des $T(X)$, soit par les propriétés correctes de support des $\mathcal{L}^{(r_1)} \updownarrow \dots \updownarrow \mathcal{L}^{(r_n)}$, soit (de façon équivalente) par l'analyticité, dans le domaine "axiomatique" des fonctions de Green $H_{\mathcal{L}^{(r_1)} \dots \mathcal{L}^{(r_n)}}$ d'où suit celle des $\hat{H}_A \dots \hat{A}$. Notons que ce résultat a été atteint indépendamment par Bros (à paraître) par une méthode tout à fait différente. La démonstration de l'unitarité des solutions après le passage à la limite adiabatique reste à faire.

REFERENCES

Nous n'avons pas cité dans le texte les grands articles originaux, maintenant classiques, qui ont créé la théorie de la renormalisation. Un certain nombre d'entre eux (dûs en particulier à Schwinger, Feynman, Dyson, Salam) sont réimprimés dans le très intéressant volume :

"Quantum Electrodynamics" - J. Schwinger, Ed., Dover, New York.

Il faut aussi signaler les travaux de E.C.G. Stueckelberg et collaborateurs, par exemple :

E.C.G. Stueckelberg - Phys.Rev. 81, 130 (1951) ;

E.C.G. Stueckelberg et D. Rivier - Helv.Phys.Acta 23, 216 (1949), etc.

On trouvera une abondante bibliographie dans la référence 6) ci-dessous.

Autres Références :

- 1) - H. Epstein et V. Glaser - Article en préparation.
- 2) - A.S. Wightman - "Introduction to Some Aspects of the Relativistic Dynamics of Quantized Fields", Cargèse Lectures in Theoretical Physics, Vol. 2 (1964), "High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory", M. Lévy, Editor, Gordon and Breach (1967).
- 3) - K. Hepp - "Théorie de la Renormalisation", Lecture notes in Physics 2, Springer Verlag, Berlin (1969).
- 4) - K. Hepp - Commun.Math.Phys. 2, 301 (1966).
- 5) - E. Speer - "Generalized Feynman Amplitudes", Ann.Math.Studies, Princeton University Press, Princeton (1969).
- 6) - N.N. Bogoliubov et D.V. Shirkov - "Introduction à la Théorie des Champs Quantifiés", Moscou (1957) ; existe en traductions française et anglaise.
- 7) - K. Nishijima - Phys.Rev. 119, 485 (1960) ; 124, 255 (1961) ;
M. Muraskin et K. Nishijima - Phys.Rev. 122, 331 (1961).
- 8) - O. Steinmann - Ann.Phys. 29, 76 (1964) ; 36, 267 (1966).
- 9) - L. Gårding et A. Wightman - Ark.Fys.(Sweden) 28, 129 (1964).

- 10) - H. Epstein - Nuovo Cimento 27, 886 (1963) ; également :
B. Schroer, non publié.
- 11) - B. Malgrange - Séminaire Schwartz No.21 (1959-60).
- 12) - H. Epstein et V. Glaser - Communication à la Conférence Internationale sur la Renormalisation, I.C.T.P., Trieste, Août 1969.
- 13) - J. Bros - "Prépublication de la R.C.P. No 25", Vol.
réimprimé dans le Vol. 8. Secrétariat, Département de
Mathématiques, Rue René Descartes, 67 Strasbourg, France.
- 14) - R. Stora - Ibid.
- 15) - K. Hepp - Commun.Math.Phys. 1, 95 (1965), et contribution au
volume : "Axiomatic Field Theory", Chrétien et Deser Eds.,
Gordon et Breach, New York (1966).