Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

René Thom

Les symétries brisées en physique macroscopique et la mécanique quantique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1970, tome 10
« Conférences de K. Hepp, C. Piron et R. Thom », , exp. n° 3, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1970__10__A3_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES SYMETRIES BRISEES EN PHYSIQUE MACROSCOPIQUE

ET LA MECANIQUE QUANTIQUE

par

René THOM

(I. H. E. S., Bures)

---oo0oo---

I. LES SYMETRIES BRISEES.

Reportons-nous mentalement à l'époque préquantique, où les Physiciens - avant de penser espace de Hilbert, opérateurs unitaires, représentations, $\mathbb{C}^*$-algèbres etc - ouvraient leurs yeux pour contempler les phénomènes (peut-être faut-il remonter à Rayleigh pour trouver un physicien en ce sens). Beaucoup avaient alors observé que de nombreux phénomènes - de substrat, d'échelle complètement différents - présentaient des symétries d'origine mystérieuse. Deux traités classiques : "On Growth and Form" du biologiste d'Arcy Thompson, et les "Symétries" de Hermann Weyl recèlent à cet égard une ample documentation. En la complétant par quelques informations puisées dans des traités spécialisés récents (Géomorphologie, notamment), j'ai pu dresser la liste suivante de phénomènes exemples de "symétries brisées", liste probablement très incomplète :

1. Mécanique des Fluides.

1°) Expérience de la baignoire cylindrique. Chute d'un disque pesant dans l'air libre, la position initiale étant horizontale. (Le centre de gravité décrit alors une trajectoire en spirale).

2°) Ecoulement de Couette-Taylor (décrit par exemple dans les Feynmann Lectures of Physics, t. 2).

3°) Phénomène de Bénard. (Décomposition en cellules de convection hexagonales du mouvement d'un fluide pesant chauffé sur sa face inférieure).

4°) Houle. Vagues roulantes dans un chenal à pente constante.

5°) Jet de Rayleigh. (Configuration en diadème observée lors de la chute d'une boule pesante dans l'eau).

6°) Expérience de Helmholtz sur la figure de diffusion d'une goutte d'encre dans l'eau.

7°) Flammes périodiques et "chantantes".

8°) Formations périodiques de certains nuages ("Vagues de Lee").

2. Astronomie .

Nébuleuses spirales.

3. Physico-Chimie .

1°) Croissance dendritique et formation symétrique des cristaux (Ex. Flocons de Neige).

2°) Certains précipités périodiques en Chimie : Anneaux de Liesegang.

4. Géomorphologie .

1°) Périodicité de certains facies érosifs dans un terrain en pente homogène géologiquement (Falaises par exemple).

2°) Structure en chou-fleur des stalagmites.

3°) "Pattern" des dunes, des fonds de rivière sableux.

4°) "Cusps" des plages.

5. Biologie.

1°) Symétrie bilatérale de la plupart des Animaux, des Echinodermes aux Vertébrés. Polarisations de l'embryon.

2°) Métamérie (Structure longitudinale périodique d'Animaux comme les Vers, les Mille-Pattes ; structure périodique - en somites ou Vertèbres - de la colonne vertébrale des Vertébrés.

3°) Les "Patterns" des poils et des plumes sur la peau.

4°) Symétries foliaires et florales en Botanique.

On se trouve devant un ensemble considérable de phénomènes qui présentent tous - plus ou moins ouvertement - la caractéristique suivante : alors que l'état initial du système admet un groupe de symétrie G (ou un pseudo-groupe), l'état final n'admet plus comme groupe de symétries qu'un sous-pseudo-groupe G' de G. On se trouve donc ainsi devant une situation où un groupe de symétrie se réduit à un sous-groupe (d'où le nom de "symétrie brisée" breakdown of symmetry). Ainsi se trouve violé le principe de Curie :

Toute symétrie des causes se retrouve dans les effets principe que d'aucuns attribuent à Leibnitz sous le nom de principe de raison suffisante.

Cette situation semble d'autant plus paradoxale, que, du point de vue de la thermodynamique classique, l'accroissement d'entropie s'interprète d'ordinaire comme un accroissement du caractère "homogène" du système, qui devrait conduire à un accroissement du groupe des symétries du système. (Ainsi, par exemple, le mélange par diffusion de deux gaz contenus en des bouteilles symétriques, lorsqu'on ouvre le robinet qui les met en communication).

Devant ce genre de problèmes, la plupart des physiciens ont - me semble-t-il-une attitude assez inconséquente. Alors qu'en Mécanique Quantique, le physicien s'accommode parfaitement de l'indéterminisme, en Physique Macroscopique, au contraire, il tient énormément à sauver le déterminisme. Il prétendra que les données initiales n'étaient qu'approximativement symétriques (modulo G), et cette dissymétrie initiale, en s'amplifiant ultérieurement, conduit à un état final qui n'admet plus comme symétrie qu'un sous-groupe G' de G . Une telle réponse est irréfutable, mais incontrôlable par l'expérience ; de plus, elle est peu satisfaisante, car elle n'explique pas la stabilité du sous-groupe G' obtenu à la fin de l'évolution, stabilité qui peut - dans certaines conditions expérimentales - être tout-à-fait remarquable. C'est pourquoi, sans prendre position sur la question proprement métaphysique du déterminisme, le physicien devrait avoir pour première ambition de "limiter les dégâts". Etant donné qu'un phénomène à symétrie brisée présente tous les caractères pratiques d'un phénomène indéterminé, et ne saurait admettre aucune formalisation stricte, car tout système formel satisfait au principe de Curie : tout automorphisme des prémisses se prolonge en un automorphisme des conséquences, on devra rechercher quels sont les types formels les plus simples présentant une cassure de symétrie. De ce point de vue, l'axiome du choix présente un exemple type : d'un ensemble E, dont le groupe de symétrie est l'ensemble S(E) de toutes les permutations de E , l'axiome du choix tire un ensemble avec point marqué (E,a) dont le groupe de symétrie est le sous-groupe de S(E) qui laisse fixe l'élément a . On s'efforcera donc de spécifier quelques modèles standard présentant simultanément, symétrie brisée et indéterminisme pratique (instabilité structurelle), et on ramènera le phénomène étudié à celui des modèles qui s'y adapte le mieux.

II. LES MODELES

Mathématiquement, le problème des symétries brisées se présente sous la forme suivante, légèrement paradoxale : Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, constante, existe-t-il une méthode canonique d'approcher f par une fonction g non constante ? On exigera en particulier de g , si irrégulière qu'elle soit, de présenter une certaine homogénéité qualitative par rapport aux translations de l'espace source R^n . Je ne connais guère que N. Wiener, dans sa théorie du "chaos homogène" (homogeneous chaos) pour avoir tenté une définition de ce genre. La possibilité de définir une telle approximation g étant admise, nous aurons comme premier modèle

1°) Modèle. Simplification d'une fonction germe

L'idée de ce modèle m'a été suggérée par V. Arnold. Supposons pour simplifier que l'espace source est le cercle des réels mod 2 . On postule alors que la donnée initiale $f : S \to R$ n'est pas rigoureusement constante, mais peut être représentée par une fonction g localement très irrégulière, voisine d'une constante. On écrit alors le développement de Fourier de g , par analogie avec ce qui se passe lors de l'amortissement de la vibration d'une corde, on peut admettre que les harmoniques d'ordre n sont amortis d'autant plus vite que n est grand. En sorte que, dans l'état final on n'obtiendra plus pratiquement que l'harmonique fondamental, faiblement perturbé. Si tous les harmoniques d'ordre n premier k étaient anéantis, et ceux d'ordre n divisible par k, conservés, on obtiendrait à la limite une fonction périodique de période $2\pi/k$.

Ceci montre précisément le défaut du modèle : comment se déterminerait l'entier k définissant la périodicité finale ? Par contre ce modèle montre en quoi l'analyse de Fourier est intimement liée à la cassure de la symétrie par translation ; en un certain sens, se donner une fonction g , c'est se donner toutes ses dégénérescences possibles selon tous les sous-groupes discrets de translation, dont g est somme . Mes connaissances en Analyse harmonique sont malheureusement trop insuffisantes pour savoir dans quelle mesure ce fait peut être généralisé pour des sous-groupes non abéliens, ou à domaine fondamental non compact.

2°) Modèle : La compétition des singularités.

Pour illustrer ce modèle, empruntons un exemple à la Géomorphologie ; supposons donnée une pente sableuse plane, homogène, que nous arrosons d'une pluie douce et homogène. En haut de la pente, on aura un grand nombre d'infimes ruisselets ; puis, en descendant, ces ruisselets se captent en formant des configurations dendritiques approximativement périodiques. On aura ainsi une "longueur d'onde" L séparant deux des ruisselets à bassins continus, en bas de pente. Ici, le facteur qui détruit la symétrie par translation est évidemment le pouvoir d'érosion du cours d'eau : là où s'est formé un creux, ce creux a tendance à s'amplifier par suite de l'effet érosif de l'eau qui y coule. Nous allons faire une étude quantitative sommaire du phénomène.

Soit x l'ascisse sur une horizontale de notre pente sableuse. Désignons par x_i les abscisses successives des points qui séparent les bassins de nos ruisselets, le bassin du $j^{\text{ème}}$ ruisselet coupant l'horizontale selon le segment x_{j-1}, x_j . Nous admettrons que le "pouvoir érosif" d'un ruisselet est approximativement proportionnel à la largeur de son bassin, soit de la forme $c(x_j - x_{j-1})$. En fait, le coefficient c dépend lui-même de la pente du cours d'eau, et aussi de la largeur $x_j - x_{j-1}$.

Le seuil x_j peut varier, selon le pouvoir érosif relatif des ruisselets (le $j^{ème}$ et le $(j+1)^{ème}$, dont il limite les bassins. Ceci conduit à un système différentiel de la forme :

$$d\,x_j/dt = c\,(x_j - x_{j-1}) - c\,(x_{j+1} - x_j) \text{ , soit :}$$

$$d\,x_j/dt = c\,(2x_j - x_{j-1} - x_{j+1}) \text{ .}$$

L'état stationnaire sera obtenu pour $x_j = \frac{x_{j-1}+x_{j+1}}{2}$ soit pour l'équipartition des bassins. Mais il reste à étudier la stabilité de cette solution. Nous le ferons dans le cas typique du segment $0 \leq x \leq 1$ divisé en deux bassins -cas qui contient le cas général, en raison du caractère local du processus- . Supposons que le coefficient c dépende seulement de la largeur x du bassin ; soit x l'abscisse du seuil, voisin de $1/2$. Posons $x = 1/2 + u$. On a alors l'équation différentielle :

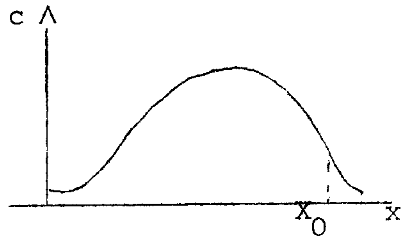
$$u' = c(1/2+u)\,(1/2+u) - c(1/2-u)\,(1/2-u)$$

soit, après développement :

$$u' = (2c(1/2) + c'(1/2)\,)\,u + \dots$$

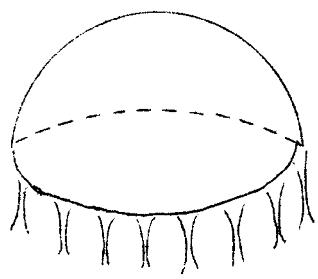
Il y aura donc stabilité de la solution $u = 0$, si $[2c + c'](1/2) < 0$.

Or, on peut admettre que, pour un cours d'eau "vieilli" dont le profil s'approche du profil exponentiel d'équilibre, le pouvoir érosif, mesuré par c , décroît lorsque la pente s'affaiblit, donc lorsque la largeur du bassin augmente. La courbe $c(x)$ peut donc avoir l'aspect ci-dessous ; la longueur d'onde L est alors - pour une pente de longueur infinie, égale à la valeur x_o limite inférieure des x tels que $2(x) + c'(x) \leq 0$; s'il y avait des conditions aux limites - par exemple le bord d'une butte sableuse circulaire, L serait le plus grand diviseur de la longueur totale pour lequel $2c + c'$ est négative.



Ce modèle, si primitif qu'il soit, n'en explique pas moins le mécanisme profond des cassures de symétrie. Dans la situation initiale, homogène, il y a continuellement formation de petites irrégularités qui brisent la symétrie ; mais ces irrégularités sont instables et disparaissent ; arrive un moment où ces singularités locales deviennent stables ; elles entrent alors en compétition, et se capturent l'une l'autre, jusqu'à ce que l'extension du bassin de chaque singularité entraîne une diminution de son "pouvoir érosif" ; la situation se stabilise alors par l'équipartition des bassins.

Par exemple, la formation en chou fleur des stalagmites s'explique ainsi : sur la partie supérieure du stalagmite, convexe vers le haut, chaque ruisselet est instable, parce qu'il tend à exhausser son lit par suite du dépôt de matériel ; sur la partie inférieure, convexe vers le bas, un ruisselet devient stable, parce que le dépôt de matériel conduit à la formation périodique de "drapés verticaux" qui favorisent la descente du liquide.



On peut d'ailleurs imaginer des situations où des singularités de type qualitatif différent entrent en compétition ; très probablement, la théorie des changements de phase est justiciable d'un schéma de ce genre. Du point de vue de la Dynamique Qualitative, on a affaire à une "compétition entre résonances" : la théorie de ce genre de phénomènes est presque entièrement à créer. Ceci nous amène directement, d'ailleurs, au troisième modèle.

3°) Modèle : Dégénerescence d'une action de groupe.

On considère cette fois un ensemble de processus, paramètré par les points d'une variété différentiable M ; on suppose de plus qu'un groupe de Lie G opère différentiablement dans M. A chaque processus a, on associe comme "groupe de symétrie de a" le sous-groupe d'isotropie K_a qui laisse fixe a dans l'action de G dans M.

Considérons d'abord le cas de G compact opérant dans M compacte. On sait (d'après un résultat de R. Palais) qu'il n'y a alors qu'un nombre fini de sous-groupes d'isotropie K_a, à la conjugaison intérieure près. Deux points a,b dont les sous-groupes d'isotropie sont conjugués sont dits appartenir à la même "strate". Cette relation d'équivalence définit dans M une partition en variétés différentiablement plongées (les strates de M), et, pour définir la manière dont les strates se raccordent entre elles, on peut user d'un modèle local défini par une représentation orthogonale dans l'espace normal à l'orbite (représentation obtenue par une métrique riemannienne invariante). Chaque strate est fibrée en orbites, chaque orbite étant elle même difféomorphe à un espace homogène compact G/K. Cette situation est à peu près bien comprise par les mathématiciens, encore qu'une description complète n'en existe pas dans la littérature. (Cf l'exposé de L. Michel).

Dans le cas d'un système physique à symétrie brisée, on peut interpréter ainsi la brisure de symétrie ; initialement, le système est dans une strate de grande codimension, associée à un "grand sous-groupe d'isotropie" K ; puis le système quitte cette strate pour échouer dans une strate incidente définie par un sous-groupe K' de K. Inversement, on peut avoir parfois des "gains de symétrie" , lorsqu'un système passe d'une strate associée à K' dans une strate de plus grande codimension définie par K . Ce "modèle" a donc l'inconvénient d'exiger "à priori" la connaissance des deux groupes K, K' .

De toute manière, l'incidence de la strate $S_{K'}$ sur la strate S_K est localement complètement décrite par un homorphisme du quotient des algèbres de Lie $L_K/L_{K'}$ dans l'algèbre de Lie L_X des champs de vecteurs nuls à l'origine. Dans le cas compact, ici considéré, l'image de cet homomorphisme est dans l'algèbre de Lie du groupe orthogonal, i.e. les opérateurs antisymétriques. Dans le cas où $\dim K = \dim K'$, la description du voisinage se fait par un groupe discret K/K' de difféomorphismes locaux.

Si l'on veut considérer la strate S_K globale, on devra parfois faire intervenir les "groupes de symétrie interne" de cette strate, et que nous définirons plus loin.

Lorsque le groupe G global n'est pas compact (et même si M est compacte) la situation est beaucoup moins bien connue. On peut cependant conjecturer que des hypothèses de "généricité" (ou de "stabilité structurelle") permettent dans une certaine mesure de contrôler la situation. En particulier, on devra remplacer la relation de conjugaison $K \to gKg^{-1}$ par une relation plus grossière : les sous-groupes K_a et K_b sont "isotopes" dans G : on peut déformer continuement K_a dans K_b par une isotopie globale de G dont l'image est à chaque instant un sous-groupe fermé de G . On peut alors espérer, que, au moins dans des cas suffisamment "réguliers" l'ensemble des points a de M dont les K_a appartiennent à la même classe d'équivalence forment une variété, et que cet ensemble de variétés définit une "stratification" de l'espace M , tout comme dans le cas compact.

Un cas particulièrement intéressant est celui où une orbite (ou strate) non compacte admet dans sa frontière une orbite (ou strate) compacte J . Il y a lieu, dans ce cas d'associer à J la totalité des orbites qui admettent J dans leur adhérence. Dans le cas d'un système dynamique classique (G = R) , la structure locale autour d'un point singulier isolé générique est bien connue : au point O se trouvent associées une variété stable -formée des trajectoires qui tendent vers O et une variété instable - formée des trajectoires qui en partent. En O ces variétés ont leurs plans tangents engendrés par les vecteurs propres contractants, resp. dilatants de la transformation linéaire tangente. Dans le cas hamiltonien, on a une variété centre-stable et une variété centre-instable de même dimension (paire) ; ces variétés s'intersectent transversalement selon une variété "centrale" , dans lequel le champ est unitaire.

Un phénomène important -et mal connu- est le suivant : les dégénerescences d'actions de groupe ont tendance à s'organiser en "paquets", en "configurations structuellement stables" ; par exemple dans la configuration "homoclinique" de Poincaré, la présence d'une seule trajectoire fermée entraîne la présence d'une infinité dénombrable de trajectoires fermées qui spiralent dans son voisinage, de périodes arbitrairement grandes. La distribution de ces trajectoires est définie par une mesure invariante , μ , qui dans les cas connus présente un grand caractère d'homogénéité.

Je voudrais, pour terminer, exposer comment ce schéma des dégénerescences d'actions de groupe peut s'appliquer à la Mécanique Quantique. Inutile de préciser que les vues ici présentées sont loin d'être orthodoxes ; du moins se raccordent-elles sans trop de heurts aux considérations plus "classiques" de L. Michel dans son exposé.

III. LA MECANIQUE QUANTIQUE

Le seul moyen de sortir la Mécanique Quantique du bourbier conceptuel où elle s'est enlisée, est de revenir strictement aux phénomènes. Voici comment on pourra procéder :

Un système quantique Q ne peut, en raison de sa petitesse, être dissocié d'un appareillage macroscopique M (un "laboratoire") destiné à l'observer. On admettra que l'appareillage M, assimilé à un corps solide, peut prendre dans l'espace-temps usuel diverses positions et vitesses, paramétrés par le groupe $T(D)$, des déplacements infinitésimaux (Espace des vecteurs tangents au groupe de Lie D des déplacements euclidiens - en théorie non relativiste -). Par ailleurs, on postulera que l'ensemble des états physiques du système $(M+Q)$ est paramétré - comme en Mécanique Classique - par les points d'une variété différentiable M, dans laquelle le groupe $T(D)$ va opérer différentiablement.

On appelle "phénoménologie" du système (Q) l'ensemble des états $m+M$ pour lesquels le groupe d'isotropie de m - pour l'action de $T(D)$ est non-nul. Si le groupe d'isotropie du point $O+M$ est $T(D)$ tout entier, le point O ainsi défini est unique, et l'état correspondant s'appelle le <u>vide</u>.

La motivation d'une telle définition est évidente : seuls les phénomènes qui résistent à un certain déplacement de l'appareillage peuvent être dits "réels", parce qu'indépendants - dans une certaine mesure - des conditions d'observation.

Dans le cas concret d'une particule, si la trajectoire de la particule ne peut être strictement localisée, par contre, les interactions de cette particule, elles, sont susceptibles d'une localisation assez stricte : expérimentalement, la localisation des interactions d'une particule avec des particules du milieu ambiant (ou solidaires du "laboratoire") est la seule source d'information dont nous disposions sur son état. Ceci veut dire qu'à une interaction localisée en un point $a+R^3$, on associera - comme sous-groupe d'isotropie associé à cet état, le groupe des rotations infinitésimales $T(R_a)$ de centre a.

Ainsi, de ce point de vue, la localisation par interaction d'une particule doit être considérée comme un "gain de symétrie" instantané, symétrie immédiatement brisée par la suite.

Appliquons dès lors, le schéma du § précédent, avec $K = T(D)$, $K' = T(R)$; on doit trouver un homomorphisme du quotient K/K' , identifié au groupe $T(\quad)$ des translations infinitésimales, dont l'algèbre de Lie a pour générateurs $(q_i, p_i) i = 1,2,3$, dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens nuls à l'origine dans un espace euclidien symplectique de dimension paire arbitrairement élevée.

D'après la construction générale, pour tout sous-groupe à un paramètre, cet homomorphisme comprendra trois facteurs ; un espace contractant, un espace dilatant (de même dimension) et un espace "central", où la représentation est définie dans un groupe unitaire $U(m)$, m grand . Si l'on considère l'ensemble des représentations centrales, le théorème classique de Von Neumann affirme : cette représentation est de la forme $q : \psi \to q.\psi$, et $p : \psi = 1/i \, \partial \psi / \partial q$.
Par ailleurs l'état"quantique" du système est défini par une section s du champ unitaire central au-dessus de la réunion W des variétés stables et instables. Cette section s définit évidemment le vecteur ψ , la "fonction d'onde" classique ; au-dessus de O , la section s définit le vecteur ψ qui représente la densité un concentrée à l'origine dans l'espace des q .

La variation de cette section s en fonction du temps est donnée par l'"équation des ondes" (Schrödinger, Dirac etc) ; on l'obtient - en principe - en considérant un "hamiltonien classique" $H(p,q)$ que l'on "quantifie" :

q devenant multiplication par q, p la dérivation en q. Personne, à ma connaissance, n'a jamais été capable de donner un sens mathématique précis à cette procédure ; mon impression personnelle est que seuls les hamiltoniens d'un type très spécial peuvent être "quantifiés". On doit voir dans le hamiltonien associé à une "perte de symétrie" l'analogue en dynamique hamiltonienne réversible - du"pouvoir érosif" d'un minimum dans le modèle 2° : étant donné un polynôme Q de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des observables, on peut à partir du centre O de la singularité, considérer tous les chemins, "les histoires de Feynmann" partant de O et aboutissant en un point (p,q), soit $p(u)$, $q(u)$. A toute valeur de u, on peut alors associer la transformation unitaire infinitésimale définie par Q appliquée à $p'(u)$, $q'(u)$. L'intégration le long du chemin définit alors une transformation unitaire, dont on devrait prendre la "moyenne" sur toutes les "histoires" allant de O à (p,q). Si l'on veut espérer donner un sens à ce genre d'"histoires", il faudra certainement restreindre très sévèrement la classe des chemins allant de O à (p,q).

Comme on l'a dit plus haut, les dégénerescences d'actions de groupe s'organisent en configurations liées à une mesure invariante. On peut penser - comme dans la configuration "homoclinique" de Poincaré - que cette configuration est associée à l'intersection des variétés stables et instables issues de O, la probabilité d'obtention d'une nouvelle dégénerescence ponctuelle de la particule serait ainsi donnée par un produit de deux facteurs : une mesure $\mu(p,q,t)$ liée à la composante "hyperbolique" de la représentation et la "fonction d'onde usuelle ψ, liée à la composante centrale. La composante μ, est une composante de paramètres cachés qui affecte l'histoire "individuelle" de la particule ; cette mesure est liée à tous les aspects proprement irréversibles de l'évolution du système : c'est bien naturel, puisqu'elle est définie par la composante hyperbolique de la représentation, et qu'il n'y a pas de phénoménologie sans irréversibilité. La Mécanique Quantique usuelle ne considère que le seul facteur ψ , qui, lui, présente un caractère réversible. Le facteur μ n'est pas décelable expérimentalement, parce que, dans les états liés et stationnaires (spectres), il est remplacé par une moyenne homogène ; dans les expériences de collision ou d'interférences, le grand nombre des particules considérées remplace également μ par une moyenne homogène qu'on interprète comme la sensibilité, le pouvoir de détection de l'appareillage employé.

Théorie classique de la mesure

Soit A une observable, i.e. un sous-groupe à un paramètre du groupe $T(D)$. Pour "mesurer" A , l'observateur doit disposer, non seulement, d'un "laboratoire" M , mais d'un "sous-groupe" à un paramètre (v) de laboratoires, sous-groupe solidaire de M . On admet alors que le dispositif expérimental est tel que la dégénerescence ponctuelle de la particule ne peut intervenir - en raison de contraintes géométriques, que sur la variété définie par l'équation $A-v = 0$. On remplace alors dans la théorie précédente l'origine 0 par la variété $A-v = 0$; la différence $A-v$ est alors une nouvelle observable du système, dont la représentation unitaire centrale est de la forme $e^{i(A-v)}$. Un état ψ_o ne pourra donc donner naissance à une mesure - en raison du caractère idempotent de l'opération de mesure - que si ψ_o est un point fixe de la transformation $\psi \to e^{i(A-vI)}\psi$. Ceci exige, comme dans la théorie classique, que ψ_o soit vecteur propre de l'opérateur auto-adjoint A , la valeur propre v correspondante étant le résultat de la mesure. Autrement dit : v est le paramètre du laboratoire qui fait "Top" .

Création et Annihilation de particules

La création d'une particule sera considérée comme la eperte de symétrie définie par la transition :

Vide → Particule non localisée.

L'application du schéma précédent montre qu'il y a lieu cette fois de considérer une représentation du groupe T(D) total des déplacements infinitésimaux dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens. La partie unitaire de cette représentation, restreinte au sous-groupe des rotations SO(3) , donne naissance à la théorie du spin. (Dans le cas relativiste, on retrouverait également la masse).

Indiscernabilité des particules

La théorie précédente exige seulement qu'on ait défini une action locale du groupe T(D) dans la variété M des états ; on passera par suite de l'étude d'une particule à l'étude d'un système de particules en substituant à l'action du groupe T(D) un pseudo-groupe G agissant dans M dont le groupe d'isotropie locale est T(D) . La localisation simultanée de deux particules en a et b s'interprète comme un état local admettant comme sous-groupe d'isotropie le produit direct $T(R_a)\ T(R_b)$ des rotations infinitésimales de centre a,b . Supposons que les variétés - stables instables associées aux dégénerescences correspondantes s'intersectent transversalement ; les variétés centrales correspondantes vont s'ajouter vectoriellement sur l'intersection. Les règles concernant la statistique de ces deux particules s'expriment alors dans la détermination de la représentation centrale (partie symétrique ou antisymétrique du produit tensoriel des représentations facteurs).

Dans cette conception une "particule" n'est rien de plus qu'une certaine corrélation entre deux localisations d'interaction successives ; si à l'instant t_o , on a localisé deux particules en a , a' et en $t_1 > t_0$, en b, b' , rien ne permet de donner un sens à une filiation $a \to b$, $a' \to b'$, à moins que les variétés stable-instable associées aux dégénerescences de localisation en a, a', soient disjointes.

Il resterait, évidemment à donner un sens géométrique à l'invariant N , nombre de particules, dans la situation non relativiste où aucune particule ne se créée ou se détruit. Voici une voie d'attaque : si dans l'action de T(D) dans M , on fait tendre les p_i vers l'infini (i.e. on observe le système avec un repère nanti d'une vitesse très grande), on observera - pour presque toute limite des p vers l'infini, une dégénerescence du système vers l'état de n particules classiques (ponctuelles). Ceci veut dire que l'orbite de tout état m du système dans sa frontière, pour $p \to \infty$, une sous-variété P par T(D) , telle que les actions de T(D) dans P sont paramétrées par les systèmes de n particules classiques. S'il est assez normal que les actions d'un groupe G dans une variété P soient "quantifiées", réparties en composantes connexes disjointes, par contre, il est malaisé de voir si ces espaces ont la structure d'espaces de phase classique à n particules. (Si G est compact, ainsi que P , deux actions homotopes sont conjuguées par un difféomorphisme de P : ceci semble montrer que le caractère non compact de P joue ici un rôle essentiel).

Les groupes de symétrie internes.

Revenons au cas d'un système dynamique classique, défini par une action de R dans une variété M ; en pareil cas, le champ de vecteurs X défini sur M peu admettre des attracteurs structurellement stables. La topologie de ces attracteurs peut être très compliquée. En certains cas néanmoins, elle peut être relativement simple ; par exemple, un attracteur P peut être une variété compacte douée d'une application $h : P \to P$ partout dilatante. En ce cas, P admet l'espace euclidien R pour revêtement universel, dont elle est le quotient par un groupe cristallographique ; la variété P admet alors un groupe de Lie d'isométrie G (transitif ?) qui est un groupe de symétrie local pour le germe de champ X autour de P. Un tel groupe sera dit "groupe de symétrie interne" associé à l'attracteur P. Un tel groupe G agit alors - par représentation adjointe, dans la représentation transverse associée à la strate P en un de ses points. Dans la situation hamiltonienne qui est celle de la Mécanique Quantique, on n'a pas d'attracteur à proprement parler, mais on peut avoir des variétés invariantes à configuration transverse centrale qui en joue le rôle. Tel est le cas, notamment des strates associées à la dégénerescence de l'action d'un groupe compact.

Soit I un groupe de symétrie interne, compact, associé à une dégénerescence de localisation d'une particule. La représentation unitaire transverse de l'algèbre de Lie $(p,q) \to U(\infty)$ est alors invariante sous l'action adjointe du groupe I dans $U(\infty)$. De plus, il est naturel d'admettre que l'équation d'évolution $H\psi = d\psi/dt$ est elle aussi invariante par I. Si la représentation de I dans U est irréductible, elle se factorise par une représentation orthogonale dans un espace E de dimension finie ; le hamiltonien H est alors un polynôme sur invariant par cette représentation. C'est ainsi que je pense interpréter les constructions présentées par L. Michel dans son exposé : on aura le schéma global suivant :

Vide = Strate associée au groupe global des interactions comme groupe interne + Groupe spatial (externe)	$\longleftarrow$	Strates associées à des sous-groupes d'isotropie de G (interactions) + Groupe spatial (externe)

(Dégénerescence spatiale
(Champs et Particules) .

Dans les modèles actuels des physiciens, chaque type de particule correspond à une dimension de l'espace E réelle ou complexe de la représentation minimale du groupe G des symétries internes. C'est là une prescription dont il est difficile de comprendre la motivation.

Pour terminer, je voudrais résumer les principaux problèmes mathématiques soulevés par ce modèle :

1°) Problème local . Classifier les formes locales génériques des germes d'actions de groupe au voisinage d'un point de l'espace euclidien.

2°) Problèmes "globaux": i) Quelles sont les restrictions imposées par l'hypothèse de généricité aux groupes de symétrie interne d'un attracteur ou d'une strate de dégénerescence ?

ii) Préciser les configurations structurellement stables de dégénerescence d'actions de groupe, généralisant les phénomènes observés dans la configuration "homoclinique" de Poincaré. Former la statistique spatiale de ces dégénerescences.

C'est là - inutile de dire - un programme qui n'est qu'à peine abordé, (même dans le cas de $\mathbb{R}$). Sans parler de l'intérêt physique, il s'agit là d'un matériel neuf et quasi inexploré : on voudra bien me pardonner les considérations éminemment spéculatives auxquelles ce sujet passionnant m'a entraîné.

---oo 0 oo---