

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

RAYMOND STORA

Sur la définition des distributions retardées en théorie quantique des champs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1969, tome 8
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. n° 6, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1969__8__A6_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DEFINITION DES DISTRIBUTIONS RETARDEES
EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par

Raymond STORA

Service de Physique Théorique
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
BP n^o 2 - 91, Gif-sur-Yvette

ERRATA

p. 2 ligne 12 lire : support $C(\xi) = \{(\xi \in \bar{V}^+) \cup (\xi \in \bar{V}^-)\}$

p. 2 ligne 15 lire : tempérées .

p. 3 ligne 15 lire : $\Sigma C_{\alpha\lambda}(L) \tilde{\mathcal{D}}_{\lambda\mu}(L') D^\mu \delta(x)$.

p. 3 ligne 16 lire : $-\Sigma C_{\beta\lambda}(L') D^\lambda \delta(x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L'^{-1}) + \Sigma C_{\beta\lambda}(LL') D^\lambda \delta(x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L'^{-1})$.

p. 8 ligne 14 lire : $C'^+ = (\square_{x_0} + m_0^2) < 0 | [A_0(x_0), A(x_1) \uparrow A(x_2)] | 0 >$

p. 8 ligne 15 lire : $C'^- = (\square_{x_0} * m_0^2) < 0 | [A_0(x_0), A(x_1) \downarrow A(x_2)] | 0 >$

p. 11 ligne 15 lire : $P_0(p_1, p_2) + P_1(p_0, p_2) + P_2(p_2, p_1)$

p. 11 ligne 17 lire : à coefficients holomorphes en p_i pour $p_i^2 \neq M_i^2 + \rho$ etc..

p. 12 lignes 2 à 6 lire : Comme $\partial_{\mu\mu} C = 0$, $\partial_{\mu\mu} R$ a la forme de l'ambiguïté du découpage d'un commutateur scalaire ; on voit par inspection que cette ambiguïté n'est pas de la forme $\partial_{\mu\mu} \Delta R_{\mu}$, où ΔR_{μ} est une ambiguïté du découpage d'un commutateur vectoriel. Il n'est donc en général pas ... etc .

On se place dans le cadre d'une théorie de Wightman (cf. J. Bros , ce volume). On considère les distributions de Wightman

$$W_P(x_0 \dots x_n) = \langle 0 | A_{P(0)}(x_{P(0)}) A_{P(1)}(x_{P(1)}) \dots A_{P(n)}(x_{P(n)}) | 0 \rangle$$

où les $A_i(x)$ sont des champs de Wightman et $|0\rangle$ l'état du vide.

Dans le papier précédent, on a supposé l'existence de distributions tempérées $\tilde{r}_\alpha(p_0 \dots p_n)$ vérifiant les conditions (R). L'objet de cette note est la démonstration de l'existence des r_α pour $n = 1, 2$, le cas général n'étant pas résolu. Si les distributions de Wightman sont des fonctions continues des composantes de temps x_i^0 , $0 \leq i \leq n$ des quadrivecteurs x_i , la solution est donnée par [1] :

$$r_\alpha(x_0 \dots x_n) = \sum_{P(0 \dots n)} \left[\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \theta_{\pm} \left(x_{P(0)}^0 - x_{P(1)}^0 \right) \right] \left[\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \theta_{\pm} \left(x_{P(1)}^0 - x_{P(2)}^0 \right) \right] \dots$$

$$\dots \left[\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \theta_{\pm} \left(x_{P(n-1)}^0 - x_{P(n)}^0 \right) \right] \times W_P(x_0 \dots x_n) ,$$

où l'on prend

$$+ \theta_+ \left(x_{P(i)}^0 - x_{P(i+1)}^0 \right) \quad \text{si} \quad S_{P(0)+} \dots + S_{P(i)} > 0 \quad \text{dans} \quad \gamma_\alpha$$

$$- \theta_- \left(x_{P(i)}^0 - x_{P(i+1)}^0 \right) \quad \text{si} \quad S_{P(0)+} \dots + S_{P(i)} < 0 \quad \text{dans} \quad \gamma_\alpha$$

avec

$$\theta_+(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\theta_-(t) = 1 - \theta_+(t) ,$$

et γ_α est défini dans le papier précédent.

Aux conditions R, on ajoute une condition de covariance par rapport au groupe de recouvrement du groupe de Poincaré : $[T_4 \times SL(2, C)]$.

Le cas $n = 1$

On a deux distributions de Wightman

$$W_{01} = \langle 0 | A_0(x_0) A_1(x_1) | 0 \rangle$$
$$W_{10} = \langle 0 | A_1(x_1) A_0(x_0) | 0 \rangle .$$

On construit le commutateur

$$C = W_{01} - W_{10} = \langle 0 | [A(x_0), A(x_1)] | 0 \rangle .$$

A cause de l'invariance par translation, C est une distribution dans la seule variable $\xi = x_0 - x_1$.

A cause de la commutativité locale

$$\text{support } C(\xi) = \xi \in \bar{V}^+ \cup \xi \in \bar{V}^-$$
$$\bar{V}^\pm = \left(\xi | \xi^2 = \xi^0{}^2 - \sum_1^3 \xi_1^2 > 0, \xi^0 \gtrless 0 \right) .$$

Le support de C étant "régulier" on peut trouver $R(\xi)$, $A(\xi)$, tempérés si C l'est, de supports respectifs $\xi \in \bar{V}^+$, $\xi \in \bar{V}^-$ telles que

$$C(\xi) = R(\xi) - A(\xi) .$$

$\mathcal{F}_p R$ et $\mathcal{F}_p A$ sont prolongeables en fonctions holomorphes dans les tubes $(p / \text{Im } p \in V^+)$ et leurs valeurs au bord coïncident là où $\mathcal{F}_p C = 0$ (R 2).

Si les champs A_i sont covariants sous l'action de $SL(2,C)$, selon une représentation de dimension finie, on peut écrire $C(\xi)$ comme un vecteur dont la covariance est conséquence de la précédente

$$L C_\alpha(x) = C_\alpha(Lx) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) \quad .$$

En raison de l'invariance du vide, on a

$$L C_\alpha(x) = C_\alpha(x) \quad ,$$

d'où

$$R_\alpha(x) - R_\beta(Lx) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) = A_\alpha(x) - A_\beta(Lx) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) = \sigma_\alpha(L)$$

où $\sigma_\alpha(L)$ a pour support $\bar{V}^+ \cap \bar{V}^- = \{0\}$. On peut donc écrire

$$\sigma_\alpha(L) = \sum_{\lambda=0}^N C_{\alpha\lambda}(L) D^\lambda \delta(x) \quad ,$$

où les D^λ sont les opérateurs différentiels d'ordre $\leq N$.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & R_\alpha(L'x) - R_\beta(LL'x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) = A_\alpha(L'x) - A_\beta(LL'x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) \\ &= \left[R_\alpha(L'x) - R_\beta(x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L'^{-1}) \right] + \left[R_\beta(x) - R_\gamma(LL'x) \mathcal{D}_{\gamma\beta}(LL') \right] \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L'^{-1}) \\ &= \sum C_{\alpha\lambda}(\Delta) \tilde{\mathcal{D}}_{\lambda+1}(\Delta') D^\lambda \delta(x) \\ &= - \sum C_{\beta\lambda}(\Delta') D^\lambda \delta(x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L'^{-1}) + \sum C_{\beta\lambda}(LL') D^\lambda \delta(x) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L'^{-1}) \quad , \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{D}}(L')$ est le résultat du changement de variable $x \rightarrow L'x$ sur les D^μ ,

d'où

$$C_{\alpha\lambda}(L) \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda\mu}(L') \mathcal{D}_{\alpha\beta}(L') + C_{\beta\mu}(L') - C_{\beta\mu}(LL') = 0 \quad ,$$

$C_{\beta\mu}(L)$ est donc un cocycle à valeur dans l'espace de la représentation $\mathcal{D} \otimes \tilde{\mathcal{D}}$ de $SL(2, \mathbb{C})$. D'après la complète réductibilité d'une telle représentation de dimension finie, on a

$$C_{\alpha\lambda}(L) = C_{\beta\mu} \left[\mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) \tilde{\mathcal{E}}_{\mu\lambda}(L) - \delta_{\beta\alpha} \delta_{\mu\lambda} \right] \quad ,$$

où $\{C_{\beta\mu}\}$ est un vecteur fixe.

On en déduit :

$$\begin{aligned} R'_\alpha(x) &= R'_\alpha(x) + \sum C_{\alpha\mu} D^\mu \delta(x) = R'_\beta(Lx) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) + C'_{\beta\lambda} \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda\mu}(L) D^\mu \delta(x) \\ &= \left(R'_\beta + \sum C_{\beta\mu} D^\mu \delta \right) (Lx) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) \\ &= R'_\beta(Lx) \mathcal{D}_{\beta\alpha}(L) \quad , \end{aligned}$$

et de même si R est remplacé par A .

D'où un découpage covariant $C = R' - A'$

Application

Supposons qu'on ait des opérateurs de Wightman vectoriels $j_\mu^1(x)$ conservés $\partial_\mu j_\mu^1(x) = 0$.

Alors $C_{\mu\nu} = \langle 0 | [j_\mu^{(1)}(x), j_\nu^{(2)}(x_2)] | 0 \rangle$ est un tenseur qui vérifie de plus $\partial_\mu C_{\mu\nu} = \partial_\nu C_{\mu\nu} = 0$.

On sait d'après ce qui précède qu'il existe un découpage en tenseurs :

$$C_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - A_{\mu\nu} .$$

On peut de plus choisir $R_{\mu\nu}$ et $A_{\mu\nu}$ de façon que

$$\partial_{\mu} R_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\mu\nu} = 0 = \partial_{\nu} R_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu\nu}$$

$$\partial_{\mu} C_{\mu\nu} = \partial_{\mu} R_{\mu\nu} - \partial_{\mu} A_{\mu\nu} = 0 ,$$

d'où
$$\partial_{\mu} R_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu\nu} = \sigma_{\nu} ,$$

où σ_{ν} a pour support l'origine et se comporte comme un quadrivecteur :

$$\sigma_{\nu}(x) = \sigma_{\nu}(\Lambda x) \Lambda^{\nu}_{\mu} .$$

On en déduit
$$\sigma_{\mu}(x) = \partial_{\mu} P(\square) \delta(x) ,$$

d'où
$$\partial_{\mu} \left[R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} P(\square) \delta(x) \right] = \partial_{\mu} \left[A_{\mu\nu} - P(\square) \delta(x) \right] = 0 ,$$

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} P(\square) \delta(x) , \quad A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} P(\square) \delta(x)$$

fournissent le découpage cherché.

L'utilisation des propriétés spectrales montre alors que $R_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$ sont de la forme $(\square g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu}) R$, par suite on a aussi $\partial_{\nu} R_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu\nu} = 0$. Cet exemple se présente en électrodynamique quantique dans le calcul perturbatif de la "polarisation du vide" et montre la possibilité de définir un courant induit conservé.

Le cas n = 3 .

A partir des six distributions de Wightman

$$W_P(x_0, x_1, x_2) = \langle 0 | A_{P(0)}(x_{P(0)}) A_{P(1)}(x_{P(1)}) A_{P(2)}(x_{P(2)}) | 0 \rangle ,$$

on construit les trois doubles commutateurs

$$C_{P(0)P(1)P(2)} = - C_{P(0)P(2)P(1)} = \langle 0 | \left[A_{P(0)}(x_{P(0)}) , \left[A_{P(1)}(x_{P(1)}) , A_{P(2)}(x_{P(2)}) \right] \right] | 0 \rangle$$

qui satisfont l'identité de Jacobi

$$\sum_{\substack{P \\ \text{paires}}} C_{P(0)P(1)P(2)} = 0 .$$

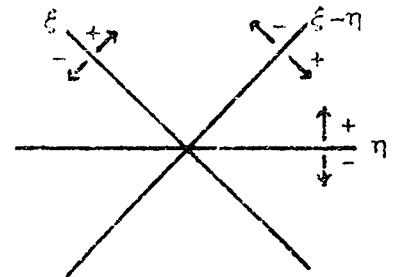
Pendant un moment on fixera P à l'identité.

C_{012} a les propriétés suivantes :

soient $\xi = x_0 - x_2$, $\eta = x_1 - x_2$. En vertu de l'invariance du vide par translation, on peut considérer C comme une distribution en ξ, η .

En vertu de la commutativité locale et de l'identité de Jacobi

$$\text{support } C = \left(\eta \in \bar{V}^+ \cap \xi \in \bar{V}^- \right) \cup \left(\eta \in \bar{V}^+ \cap \xi - \eta \in \bar{V}^- \right) \\ \cup \left(\eta \in \bar{V}^- \cap \xi \in \bar{V}^- \right) \cup \left(\eta \in \bar{V}^- \cap \xi - \eta \in \bar{V}^+ \right)$$



En vertu des propriétés spectrales, la transformée de Fourier partielle par rapport à ξ : $\tilde{C}(p, \eta)$ s'annule pour $p^2 < M_0^2$, $p^2 \neq m_0^2$. La restriction de \tilde{C} à un voisinage de $p^2 = m_0^2$ est une mesure d'ordre 1 concentrée sur $p^2 = m_0^2$, de sorte que $\tilde{C}'(p, \eta) = (p^2 - m_0^2) \tilde{C}(p, \eta)$ s'annule pour $p^2 < M_0^2$.

Un théorème de Dyson, Gårding et Wightman^[2] assure qu'il existe une solution tempérée $\Gamma'(\xi, \kappa, \eta)$, paire en κ , de l'équation de Klein Gordon

$$\text{KG}\Gamma' = \left(\square_{\xi} - \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} + M_0^2 \right) \Gamma'(\xi, \kappa, \eta) = 0 \quad ,$$

telle que $C'(\xi, \eta) = (\square_{\xi} + m_0^2) C(\xi, \eta) = \Gamma'(\xi, \kappa, \eta) \Big|_{\kappa=0}$

et qu'inversement la restriction à $\kappa=0$ d'une telle solution est la transformée de Fourier d'une distribution nulle pour $p^2 < M_0^2$.

Le théorème du couple cône montre que, étant donné le support de C indiqué plus haut,

$$\text{support } \Gamma(\xi, \kappa, \eta) = \text{support } C \times \{-\infty < \kappa < +\infty\} \quad .$$

Ce support est régulier de sorte qu'on peut décomposer Γ' selon

$$\Gamma' = \Gamma'^+ - \Gamma'^- \quad \text{supp } \Gamma'^{\pm} = \text{supp } \Gamma' \cap (\eta \in \bar{V}^{\pm}) \quad ,$$

de sorte que

$$\text{KG } \Gamma'^+ = \text{KG } \Gamma'^- = \sigma \quad ,$$

où σ est une distribution tempérée avec

$$\begin{aligned} \text{support } \sigma &= \text{support } \Gamma'^+ \cap \text{support } \Gamma'^- = \text{support } \Gamma' \cap (\eta = 0) \\ &= \{\xi \in \bar{V}^+\} \cap \{\eta = 0\} \cup \{\xi \in \bar{V}^-\} \cap \{\eta = 0\} \quad . \end{aligned}$$

On peut donc à nouveau écrire $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$

avec $\text{support } \sigma_{\pm} = \{\xi \in \bar{V}^{\pm}\} \cap \{\eta = 0\} \quad .$

On peut alors résoudre

$$\Gamma'^{\pm} = \overset{0}{\Gamma}'^{\pm} + D_{\text{ret}} * \sigma_{+} + D_{\text{av}} * \sigma_{-} \quad ,$$

où D_{ret} sont les solutions élémentaires retardée et avancée de l'équation de Klein Gordon, $\overset{0}{\Gamma}'^{\pm}$ des solutions de l'équation homogène ayant ~~même~~ supports que Γ'^{\pm} car le support de la solution particulière $D_{\text{ret}} * \sigma_{+} + D_{\text{av}} * \sigma_{-}$ appartient à support $\Gamma'^{+} \cap \text{support } \Gamma'^{-}$.

On a donc :

$$\Gamma' = \overset{0}{\Gamma}'^{+} - \overset{0}{\Gamma}'^{-} \quad .$$

Par la réciproque du théorème de Dyson Gårding Wightman, $\overset{0}{\Gamma}'^{\pm}$ ont des restrictions C'^{\pm} , à $\kappa = 0$ dont les transformées de Fourier s'annulent pour $p^2 < M_0^2$, et on a

$$c' = c'^{+} - c'^{-} \quad .$$

Nous noterons

$$c'^{+} = \left(\square_{x_0} + m_0^2 \right) \langle 0 | [A_0(x_0), A(x_1) \uparrow A(x_2)] | 0 \rangle$$

$$c'^{-} = \left(\square_{x_0} + m_0^2 \right) \langle 0 | A_0(x_0), A(x_1) \downarrow A(x_2) | 0 \rangle \quad .$$

On peut maintenant résoudre

$$\left(\square_{x_0} + m_0^2 \right) c^{\pm} = c'^{\pm} \quad .$$

On découpe d'abord c'^{\pm} suivant $c'^{\pm}_{+} - c'^{\pm}_{-}$ avec :

$$\text{support } c'^{+}_{+} = (\eta \in \bar{V}^{+}) \cap (\xi \in \bar{V}^{+})$$

$$\text{support } C_{-}^{+} = (\eta \in \bar{V}^{+}) \cap (\xi - \eta \in \bar{V}^{-})$$

$$\text{support } C_{+}^{-} = (\eta \in \bar{V}^{-}) \cap (\xi - \eta \in \bar{V}^{+})$$

$$\text{support } C_{-}^{-} = (\eta \in \bar{V}^{-}) \cap (\xi \in \bar{V}^{-})$$

et on écrit

$$C^{\pm} = C_{0}^{\pm} + D_{\text{ret}} * C_{+}^{\pm} - D_{\text{av}} * C_{-}^{\pm}$$

où $D_{\text{ret,av}}$ sont les solutions élémentaires retardée ou avancée de l'opérateur $\square_{\xi} + m_0^2$. On voit facilement que C^{\pm} ont en (ξ, η) le même support que C_{\pm}^{\pm} et que leurs transformées de Fourier s'annulent pour $p^2 < m_0^2$ sauf sur $p^2 = m_0^2$.

On écrira

$$C^{\pm} = \langle 0 | A_0(x_0), A(x_1) \downarrow A(x_2) | 0 \rangle$$

La question de la covariance par rapport à l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ de C^{\pm} , comme celle de C , se résout comme dans le cas $n=1$, pourvu que l'on montre que l'ambiguïté de la solution se comporte, par l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ comme un vecteur d'un espace de représentation de dimension finie de $SL(2, \mathbb{C})$.

Or, supposons connues deux décompositions satisfaisant aux propriétés voulues de support en (ξ, η) et en p :

$$C = C^{+} - C^{-} = \tilde{C}^{+} - \tilde{C}^{-}$$

On a
$$C^{+} - \tilde{C}^{+} = C^{-} - \tilde{C}^{-} = \sigma$$

avec
$$\text{support } \sigma = \{(\eta = 0) \cap (\xi \in \bar{V}^{+})\} \cup \{(\eta = 0) \cap (\xi \in \bar{V}^{-})\}$$

$$\tilde{\sigma}(p, \eta) = 0, \quad p^2 < m_0^2 \quad p^2 \neq m_0^2$$

$$\tilde{\sigma}^{\pm}(p, \eta) = (p^2 - m_0^2) \tilde{\sigma}(p, \eta) = 0, \quad p^2 < M_0^2.$$

On peut donc écrire

$$\sigma^{(\prime)}(\xi, \eta) = \sum_{[\alpha]=0}^N D_{\alpha}(\eta) \delta(\eta) \left[r_{\alpha+}^{(\prime)} - r_{\alpha-}^{(\prime)} \right].$$

Mais on voit facilement, à cause des propriétés de spectre, au moyen de l'argument de Dyson Gårding Wightman et de la résolution d'un problème de Cauchy, qu'on a une représentation pour σ du type

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(p, \eta) = & \sum_{\substack{[\alpha]=0 \\ [\alpha]=N}} D_{\alpha}(\eta) \delta(\eta) \sum_{\substack{[\beta]=0 \\ [\beta]=N}} p^{[\beta]} \left[C_{\alpha\beta} \epsilon(p^0) \delta(p^2 - m_0^2) \right. \\ & \left. + \int_{M_0^2}^{\infty} dk^2 \rho_{\alpha\beta}(k^2) \epsilon(p^0) \delta(p^2 - k^2) \right], \end{aligned}$$

où ρ est une distribution en k^2 .

On est alors amené, comme précédemment, à considérer des cocycles $C_{\alpha\beta}(L)$ et $\rho_{\alpha\beta}(k^2, L)$ définis sur $SL(2, C)$. La seule difficulté provient de la nécessité de saturer ρ par une fonction test : $\rho_{\alpha\beta}(\varphi, L) = \langle \rho_{\alpha\beta}(\cdot, L), \varphi \rangle$ et de montrer que $\rho_{\alpha\beta}(\varphi)$ défini par $\rho_{\alpha\beta}(\varphi, L) = \rho_{\alpha'\beta'}(\varphi) (\mathcal{D}_{\alpha'\beta', \alpha\beta}(L))^{-1} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}$ peut être choisi continu en φ , ce qui est facile en intégrant sur le sous-groupe compact $SU(2)$ de $SL(2, C)$.

C^{\pm} sont alors définis modulo une ambiguïté du type ci-dessus, de covariance identique à celle de C .

Enfin on écrira :

$$C_{012}^{\pm} = 0\uparrow 1\uparrow 2 - 0\downarrow 1\uparrow 2 - 0\uparrow 1\downarrow 2 + 0\downarrow 1\downarrow 2$$

avec

$$\begin{aligned} \text{support } 0\uparrow 1\uparrow 2 &= x_0 - x_2 \in \bar{V}^+ \cap x_1 - x_2 \in \bar{V}^+ \\ \text{support } 0\downarrow 1\uparrow 2 &= x_0 - x_1 \in \bar{V}^- \cap x_2 - x_1 \in \bar{V}^- \\ \text{support } 0\uparrow 1\downarrow 2 &= x_0 - x_1 \in \bar{V}^+ \cap x_2 - x_1 \in \bar{V}^+ \\ \text{support } 0\downarrow 1\downarrow 2 &= x_0 - x_2 \in \bar{V}^- \cap x_1 - x_2 \in \bar{V}^- \end{aligned}$$

et les décompositions analogues pour C_{120}^\pm , C_{201}^\pm , et, utilisant l'identité de Jacobi, on montrera qu'on peut choisir ces décompositions de sorte que

$$\begin{aligned} 0\uparrow 1\uparrow 2 &= -0\uparrow 2\downarrow 1 = 1\uparrow 0\uparrow 2 \\ 0\downarrow 1\downarrow 2 &= -0\downarrow 2\uparrow 1 = 1\downarrow 0\downarrow 2 \quad \text{etc ...} \end{aligned}$$

de sorte qu'on a défini les six distributions voulues avec les propriétés de coïncidence recherchées en vertu du support en p des $\tilde{C}^\pm(p, \eta)$. La possibilité de les choisir covariants est à nouveau due au fait que l'ambiguïté de cette décomposition se transforme selon une représentation de dimension finie de $SL(2, \mathbb{C})$. L'ambiguïté de cette décomposition est, dans l'espace transformé de Fourier, de la forme :

$$P_0(p_1, p_2) C_0(p_0) + P_1(p_0, p_2) C_1(p_1) + P_2(p_2, p_1) C_2(p_2)$$

avec $p_0 + p_1 + p_2 = 0$, les P_i polynômes covariants selon l'action de $SL(2, \mathbb{C})$, $C_i(p_i)$ holomorphe pour $p_i^2 \neq m_i^2 + \rho$, ρ réel > 0 à l'exception de $p_i^2 = m_i^2$ où il y a un pôle du premier ordre.

Application

Supposons donnés un courant conservé j_μ , $\partial^\mu j_\mu = 0$ et deux opérateurs Φ, Φ^+ , et considérons

$$C_\mu = \langle 0 | [j_\mu(x_0), [\Phi(x_1), \Phi^+(x_2)]] | 0 \rangle .$$

On a un découpage covariant des C_{μ} en R_{μ} ...

Comme $\partial_{\mu} C_{\mu} = 0$, $\partial_{\mu} R_{\mu}$ a la forme de l'ambiguïté du découpage, à savoir dans les transformées de Fourier

$$(p_{1\mu} + p_{2\mu}) C(p_1) + (p_{1\mu} - p_{2\mu}) \sum D(p_1) ,$$

où les C, D sont holomorphes pour $p_1^2 \neq M_1^2 + \rho$ avec éventuellement des pôles à $p_1^2 = m_1^2$. Il n'est donc en général pas possible de trouver un découpage où les R_{μ} vérifient $\partial_{\mu} R_{\mu} = 0$. Un tel phénomène est cohérent avec l'existence des "identités de Ward" de l'électrodynamique quantique.

Remarque sur les cas $n > 2$.

La raison pour laquelle ces cas n'ont pas été résolus est que, implicitement, le théorème de Dyson Gårding Wightman ne permet de traiter des propriétés de support que dans un quadrivecteur à la fois. L'extension de cette méthode au cas où plusieurs quadrivecteurs entrent en jeu semble nécessiter l'étude de systèmes surdéterminés qui n'a pas été menée à bien.

REFERENCES

- [1] - H. ARAKI - Journal of Mathematical Physics 2, 163, (1961) .
- [2] - A.S. WIGHTMAN dans "Relations de dispersions et particules élémentaires"
Hermann - Paris - (1961) .

Les résultats résumés ici feront l'objet d'une publication ultérieure. Ils résultent de contributions de J. BROS, H. EPSTEIN, V. GLASER, O. LANDFORD, B. MALGRANGE, R. STORA .