R. STORA

Propriétés d'analyticité des amplitudes de réaction en théorie quantique des champs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 4
« Conférences de R. Stora et textes sur les C*-Algèbres de S. Doplicher, A. Guichardet, D. Kastler et G. Loupias », , exp. n° 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__4__A2_0>

Mars 1967

II

PROPRIETES D'ANALYTICITE DES AMPLITUDES DE REACTION
EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par

R. STORA

Service de Physique Théorique
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
BP n° 2 - 91, Gif-sur-Yvette

Les notations seront celles de [1]. On utilisera à volonté la théorie L.S.Z , la théorie de Haag Ruelle Hepp basée sur les axiomes de Wightman, ou la théorie de Haag Araki.

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est de deux façons un produit tensoriel d'espaces de Fock, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$ correspondant à la description d'assemblées de particules stables asymptotiquement libres, admettant un vecteur $|0\rangle$ (le vide) stable par l'action d'une représentation bien connue du groupe de recouvrement du groupe de Lorentz inhomogène $U(a,A)$.

Les particules sont créées par l'action sur le vide d'opérateurs de création $a_{\alpha_i}^{*\,\substack{in\\out}}$ en correspondance biunivoque avec les états $|\alpha_i\rangle$ à une particule , et on a :

$$a_{\alpha_i}^{\substack{in\\out}}|0\rangle = 0 \qquad (a_{\alpha_i} = \text{adjoint de } a^*_{\alpha_i}) \quad .$$

On a les règles de commutation canoniques :

$$\left[a_{\alpha_i}^{\substack{in\\out}} \quad a_{\beta_j}^{*\substack{in\\out}}\right]_{\pm} = \langle\alpha_i|\beta_j\rangle \mathbb{1} \qquad \left[a_{\alpha_i}^{\substack{in\\out}} \quad a_{\beta_j}^{\substack{in\\out}}\right]_{\pm} = \left[a_{\alpha_i}^{\substack{in\\out}*} \quad a_{\beta_j}^{\substack{in\\out}*}\right]_{\pm} = 0 \quad ,$$

le signe $\pm$ étant pris suivant que la particule créée a un spin demi-entier ou entier.

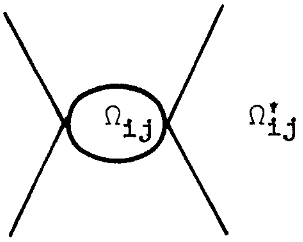
Les opérateurs $B_i(x_i)$ sont quasi-locaux :

$$[B_i(x_i),\ B_j(x_j)]_{\pm} = 0 \qquad \text{si } (x_i - x_j) \in [\Omega_i \text{ "+" } \Omega_j]' = \Omega'_{ij} \quad ,$$

Ω_i et Ω_j étant des ouverts aussi petits et aussi voisins que l'on veut :

$$\Omega_i \text{ "+" } \Omega_j = \{x \mid x = y_i - y_j \ , \ y_i \in \Omega_i \ , \ y_j \in \Omega_j\}$$

$$\Omega'_{ij} = \{x \mid (x-y)^2 < 0 \ , \ \forall\, y \in \Omega_{ij}\} \quad .$$



Pour simplifier on peut prendre $\Omega_i = \Omega_j = \Omega$.

Les états asymptotiques $|\alpha_1 \ldots \alpha_n\rangle_{\substack{in \\ out}}$ sont obtenus comme limites fortes pour $t \to \pm \infty$ des états $\prod_{i=1}^{n} B_i^{*(1)}(f_{\alpha_i}, t)\,|0\rangle$ avec :

$$B_i^{(1)}(f_{\alpha_i}, t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x_0 = t} d^3x \ f^*_{\alpha_i}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} B_i^{(1)}(x) \ ,$$

où $f_{\alpha_i}(x) = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \varphi_{\alpha_i}(\vec{p}) \ e^{-i\,p.x}$ avec $p^0 = \omega_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_i^2}$

et $\tilde{B}_i^{(1)}(p) = \tilde{B}(p)\,\chi_i(p)$ où $\chi_i(p)$ est C^∞ , nulle en dehors d'un petit voisinage de $(p_i^2 = m_i^2 \ , \ p_i^0 > 0)$ et vaut 1 sur cette nappe d'hyperboloïde , et on a :

$$\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \ \varphi^*_{\alpha_j}(p) \ \varphi_{\alpha_i}(\vec{p}) \ \rho_{ij}(\vec{p}) \quad ,$$

avec $\rho_{ij}(\vec{p}) = \text{"}\langle 0 | B_j(0) | \vec{p}, \omega_j(p) \rangle \langle \vec{p}, \omega_i(p) | B_i^*(0) | 0 \rangle\text{"}$,

(ρ_{ij} définit une mesure par $\rho_{ij}(\chi) = \langle 0|B_j(0)\; E^1_\chi\; B_i^*(0)|0\rangle$
où $E^1_\chi = \int dE(p)\; \tilde{\chi}(p)$ avec $\tilde{\chi}$ définie dans le voisinage de $p^2 = m_i^2$,
de restriction $\chi(\vec{p})$ sur $p^2 = m_i^2$).

I - LA FORMULE DE REDUCTION

On obtient celle-ci en utilisant la convergence faibles vers les états à une particule de $\prod_i B_i^*(f_{\alpha_i},t)|0\rangle$ (et non plus la convergence forte de $\prod_i B_i^{(1)}(f_{\alpha_i},t)|0\rangle$:

$$\langle\beta_{\underline{1}}\ldots\beta_{\underline{m}}|S|\alpha_1\ldots\alpha_n\rangle^c = \frac{(i)^{n-m}}{(2\pi)^{3(n+m)/2}}\int dx_1\ldots dx_n\;\; dx_{\underline{1}}\ldots dx_{\underline{m}}\prod_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}(x_i)$$

$$\prod_{\underline{i}=\underline{1}}^{\underline{m}} f^*_{\beta_{\underline{i}}}(x_{\underline{i}})\;(\Box_{x_1}-m_1^2)\ldots(\Box_{x_n}-m_n^2)\;(\Box_{x_{\underline{1}}}-m_{\underline{1}}^2)\ldots(\Box_{x_{\underline{m}}}-m_{\underline{m}}^2)$$

$$\times\;\langle 0|T(B_1^*(x_1)\ldots B_n^*(x_n)\; B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}})\ldots B_{\underline{m}}(x_{\underline{m}})|0\rangle^T .$$

L'esprit de la démonstration est que chaque fois qu'on développe un produit chronologique en produits tronqués, les partitions contenant des sous-ensembles de deux points apportent une contribution nulle à cause de la surabondance des opérateurs de Klein Gordon :

$$\left[(p_i - m_i^2)(p_j^2 - m_j^2)\;\mathcal{F}\;\langle 0|T(B_i(x_i)\; B_j(x_j)|0\rangle\Big|_{\substack{p_i^2 = m_i^2\\ p_j^2 = m_j^2}} = 0\right]$$

mais ces termes sont réintroduits par les termes de surfaces intervenant dans le processus de réduction :

$$\langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | T(B_1(x_1) \dots B_p(x_p) \quad a^{*in}_{\alpha_{p+1}} | \alpha_{p+2} \dots \alpha_n \rangle$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx_{p+1} \; f_{\alpha_{p+1}}(x_{p+1})(\Box_{x_{p+1}} - m^2_{p+1}) \langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | T(B_1(x_1) \dots B_{p+1}(x_{p+1})$$

$$| \alpha_{p+2} \dots \alpha_n \rangle + \sum_{\underline{j}=\underline{1}}^{\underline{j}=\underline{m}} \langle \beta_{\underline{j}} | \alpha_{p+1} \rangle \langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{j}} \dots \beta_{\underline{m}} | T(B_1(x_1) \dots B_p(x_p) | \alpha_{p+2} \dots \alpha_n \rangle \quad .$$

II - DEFINITION ET PROPRIETES DES EXTRAPOLATIONS ANALYTIQUES DES AMPLITUDES CONNEXES

D'après l'invariance par translation on a :

$$\mathcal{F}_{p_1 \dots p_n \;\; p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}}} \langle 0 | T(B^*_1(x_1) \dots B_{\underline{m}}(x_{\underline{m}}) | 0 \rangle^T = (2\pi)^4 \, \delta \left(\sum_1^n p_i + \sum_{\underline{1}}^{\underline{m}} p_{\underline{i}} \right)$$

$$\times \quad \tilde{\tau}(p_1 \dots p_n, \; p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}}) \quad .$$

On va montrer que $\tilde{\tau}(p_1 \dots p_n, \; p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}})$ coïncide, en conséquence du spectre de P_μ , par morceaux dans l'espace des p avec des distributions $\tilde{\rho}_\alpha$ qui, en vertu de la commutativité presque locale, sont valeurs au bord sur les réels de fonctions holomorphes dans des tubes à bases imaginaires.

a) Les transformées de Fourier des "fonctions" de Wightman

Soit $\tilde{W}(1 \dots n) = \langle 0 | B_1(x_1) \dots B_n(x_n) | 0 \rangle$

$$\tilde{W}(1 \dots n) = \int dx_1 \dots dx_n \quad e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \quad \langle 0 | B_1(x_1) \dots B_n(x_n) \; | 0 \rangle$$

$$= \int dx_1 \ldots dx_n \; e^{-i[p_1(x_1-x_2)+(p_1+p_2)(x_2-x_3)+\ldots+(p_1+\ldots p_{n-1})(x_{n-1}-x_n)+(p_1+\ldots+p_n)x_n]} \times$$

$$\times \langle 0|B_1(0)\; U(x_2-x_1)\; B_2(0)\; U(x_3-x_2) \ldots \; B_{n-1}(0)\; U(x_n-x_{n-1})\; B_n(0)|0\rangle$$

$$= (2\pi)^4 \, \delta\left(\sum_1^n p_i\right) \int d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \; e^{i\sum_{i=1}^{n-1} P_i \, \xi_i} \langle 0|B_1(0)\; U(\xi_1)\; B_2(0)\; U(\xi_2)$$

$$\ldots B_{n-1}(0)\; U(\xi_{n-1})|0\rangle$$

où on a utilisé $B_i(x_i) = U(x_i)\, B_i(0)\, U^{-1}(x_i)$,

la stabilité du vide

la définition $P_i = p_1 + \ldots + p_i$,

on en déduit :

$$\text{supp } \tilde{W} = \left(P_1 \in \{0\} \cup \overline{V}_1^+\right) \cap \left(P_2 \in \{0\} \cup \overline{V}_2^+\right) \cap \ldots \cap \left(P_i \in \{0\} \cup \overline{V}_i^+\right)$$

$$\cap \left(P_{n-1} \in \{0\} \cup \overline{V}_{n-1}^+\right) \quad ,$$

où $\{0\}$ correspond à l'état du vide , $\overline{V}_i^{+(m,M)} = \left\{ p \,|\, p^0 > 0 \;,\; p^2 = m_i^2 \;\cup\; p^2 \geq M_i^2 \right\}$

les masses m_i , M_i étant celles qui correspondent aux états stables et aux seuils de spectre continu pour lesquels $\langle 0|B_1(0)\ldots B_i(0)|p\rangle \neq 0$, qui sont calculables si on connaît le spectre de P_μ et les règles de sélection.

b) <u>Les transformées de Fourier des fonctions de Wightman tronquées et la commutativité locale</u>

On montre par récurrence que le support de $\tilde{W}^T$ est déduit du précédent en supprimant partout le $\{0\}$ qui provient de la contribution du vide.

Il semble à première vue que la définition des W^T soit bien torturée pour neutraliser les contributions du vide. Le point est cependant que cette façon de le faire respecte les propriétés de commutativité locale :

$$\langle 0|B_1(x_1)\ldots B_i(x_i)\, B_{i+1}(x_{i+1})\ldots B_n(x_n)|0\rangle$$

$$= \langle 0|B_1(x_1)\ldots B_{i+1}(x_{i+1})\, B_i(x_i)\ldots B_n(x_n)|0\rangle \qquad x_i - x_{i+1} \in (\Omega + \Omega)'$$

et aussi, dans les mêmes conditions :

$$\langle 0|B_1(x_1)\ldots B_i(x_i)\, B_{i+1}(x_{i+1})\ldots B_n(x_n)\;|0\rangle^T$$

$$= \langle 0|B_1(x_1)\ldots B_{i+1}(x_{i+1})\, B_i(x_i)\ldots B_n(x_n)\;|0\rangle^T \; .$$

A remarquer que, en vertu du fait que les états de masses m_i correspondent à une mesure de Dirac $\theta(p_i^o)\,\delta\,(p_i^2 - m_i^2)$ dans le spectre, les fonctions de Wightman "amputées" par application des opérateurs de Klein-Gordon $(\Box_{x_i} - m_i^2)$ ont des propriétés de spectre analogues aux précédentes, où :

$\bar{V}^+(m,M)$ est remplacé par $\bar{V}^+(M) = \left\{ p \,|\, p^o > 0 \quad p^2 \geq M^2 \right\}$.

c) <u>Les fonctions retardées généralisées</u>

A la fonction à n points $\langle 0|T\,(B_1(x_1)\ldots B_n(x_n)|0\rangle^T$ on associe l'espace S^n d'éléments $\underline{S} = (S_1 \ldots S_n)$; on considère dans l'hyperplan $\sum_{i=1}^{n} S_i = 0$ la triangulation effectuée par les plans $S_I = \sum_{i \in I} S_i = 0$ I sous-ensemble quelconque de $(1 \ldots n)$. (Remarquer que $S_I = 0$ et $S_{\complement I} = 0$ déterminent le même hyperplan dans $\sum_{i=1}^{n} S_i = 0$.

Soit γ_α un polyèdre ouvert de cette triangulation tel que dans γ_α tout S_I admette un signe défini. A γ_α on associe :

$$\underline{r}_\alpha(x_1 \ldots x_n) = \sum_{P(1\ldots n)} \left[\pm\, \theta_\pm (x^o_{P(1)} - x^o_{P(2)}) \right] \cdots \left[\pm\, \theta_\pm\, (x^o_{P(n-1)} - x^o_{P(n)}) \right]$$

$$\langle 0 | B_{P(1)}\, (x_{P(1)}) \ldots\, B_{P(n)}\, (x_{P(n)}) | 0 \rangle^{(T)} \quad ,$$

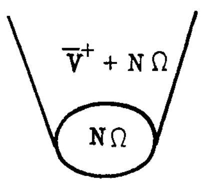
où on écrira $\pm\, \theta_\pm\, (x^o_{P(i)} - x^o_{P(i+1)})$ suivant que $S_{P(1)} + \ldots + S_{P(i)}$ est positif ou négatif dans γ_α

$$\left(\theta_+(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad ; \quad \theta_-(t) = 1 - \theta_+(t) \right) \; .$$

On montre alors que $\underline{r}_\alpha$ est indépendante du fait qu'on utilise les fonctions de Wightman ou les fonctions de Wightman tronquées.

La condition de localité permet de montrer que le support de r_α est à l'intérieur de :

$$\sum_{\underline{S} \in \gamma_\alpha} S_i\, x_i \in \overline{V}^+ + N\,\Omega$$



N étant un entier dépendant de n ; sa transformée de Fourier $\tilde{r}_\alpha$ est par conséquent prolongeable en une fonction de $p_i \ldots p_n$, définie sur l'hyperplan $p_1 + \ldots + p_n = 0$, holomorphe dans le tube à base imaginaire.

$$\mathrm{Im}\, p_i = \sum_\lambda \mu_\lambda S_i^\lambda \quad ,$$

où les S^λ sont des vecteurs de S, portés par les frontières de dimension 1 de γ_α, les μ_λ variant librement dans V^+.

Utilisant de façon répétée l'identité $-\theta_- = \theta_+ - 1$, on a l'identité :

$$r_\alpha(x_1 \ldots x_n) = - \sum_{[i|S_i<o \text{ ds } \gamma_\alpha]} \langle 0|B_i(x_i)\; C_i(x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n)|0\rangle^T + \sum_{[ij|S_i+S_j<o \text{ ds } \gamma_\alpha]} \langle 0|T(B_i(x_i)B_j(x_j)$$

$$\times\; C_{ij}(x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_n)|0\rangle^T + \ldots + \sum_{[i_1 \ldots i_p|S_{i_1}+\ldots+S_{i_p}<o \text{ ds } \gamma_\alpha]} \langle 0|T[Bi_1(xi_1)\ldots Bi_p(xi_p)]$$

$$\times\; C_{i_1 \ldots i_p}(x_1 \ldots \hat{x}_{i_1} \ldots \hat{x}_{i_2} \ldots \hat{x}_{i_p} \ldots x_n)|0\rangle^T + \langle 0|T\; B_1(x_1) \ldots B_n(x_n)|0\rangle^T$$

où les $C_{i_1 \ldots i_p}$ sont des opérateurs à p points. La condition spectrale implique que :

$$\tilde{\rho}_\alpha(p) = \tilde{\tau}(p) \qquad \text{dans} \quad \bigcap_{(I|S_I<o \text{ ds } \gamma_\alpha)} \left\{ p \;\Big|\; \left(p_I = \sum_{i \in I} p_i\right) \notin \overline{V}^+(m_I, M_I) \right\} \quad .$$

La communication de deux tubes adjacents (correspondant à γ_α, γ_β, telles que toutes les S_J aient même signe dans γ_α, γ_β à l'exception de S_I)

s'obtient à nouveau via la condition spectrale par l'identité :

$$r_\alpha - r_\beta = \langle 0 | C_I \, C_{\complement I} - C_{\complement I} \, C_I | 0 \rangle \quad ,$$

où C_I et $C_{\complement I}$ sont des opérateurs à points pris dans I , $\complement I$ respectivement, d'où coïncidence des valeurs au bord de $\tilde{\rho}_\alpha$, $\tilde{\rho}_\beta$ sur la frontière

$$\operatorname{Im} p_i = \sum_{S^\lambda \in (S_I = 0)} \mu_\lambda \, S_i^\lambda$$

commune aux deux tubes de définition, pour $(\operatorname{Re} p_I)^2 \neq m_I^2$, $(\operatorname{Re} p_I)^2 < M_I^2$; d'où, par le théorème de l'edge of the wedge, l'existence d'une continuation analytique commune à $\tilde{\rho}_\alpha$, $\tilde{\rho}_\beta$ dans un voisinage complexe du tube aplati

$$\operatorname{Im} p_i = \sum_{\substack{S^\lambda \in \{S_I = 0\} \\ S^\lambda \in \bar{\Upsilon}_\alpha \cap \bar{\Upsilon}_\beta}} \mu_\lambda \, S_i^\lambda \quad \text{au-dessus de} \quad (\operatorname{Re} p_I)^2 \neq m_I^2, < M_I^2 \ .$$

On a enfin les identités entre valeurs aux bords de quatre fonctions adjacentes caractérisées par quatre cellules $\Upsilon_{\substack{++\\--}}$ où tous les S_K ont mêmes signes sauf S_I , S_J qui sont $\gtrless$ $\gtrless 0$ respectivement dans $\Upsilon_{\substack{++\\--}}$, avec la condition $I \not\subset J$ $I \not\subset \complement J$ $J \not\subset I$, $J \not\subset \complement I$. Alors, on a l'identité :

$$r_{++} - r_{+-} - r_{-+} + r_{--} = 0 \ ;$$

par suite, la somme avec les signes adéquats des valeurs aux bords de $\rho_{\substack{++\\--}}$ sur :

$$\operatorname{Im} p_i = \sum_{\substack{s^\lambda \in \{s_I = s_J = 0\} \\ s^\lambda \in \bigcap_{\pm\pm} \bar{\gamma}_{\pm\pm}}} \mu_\lambda \, s_i^\lambda \quad ,$$

est identiquement nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - R. STORA - Théorie des collisions et théorie quantique des champs - Conférences à la réunion de la R.C.P. n° 25 - Strasbourd, novembre 1966.

[2] - H. ARAKI - Einfuehrung in die Axiomatisch, Quantenfeld theorie, Zurich E.T.H. 1961 , notes miméo.