Recherche Coopérative sur Programme n° 25

R. Stora

Théorie des collisions et théorie quantique des champs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 4
« Conférences de R. Stora et textes sur les C*-Algèbres de S. Doplicher, A. Guichardet, D. Kastler et G. Loupias », , exp. n° 1, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__4__A1_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Mars 1967

I

THEORIE DES COLLISIONS ET THEORIE† QUANTIQUE DES CHAMPS

par

R. STORA

Service de Physique Théorique
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
BP n° 2 - 91, Gif-sur-Yvette

---

† Ces notes sont accompagnées d'un appendice technique qui a fait l'objet d'une suite de séminaires à l'Institut Henri Poincaré (G. Rideau) au printemps 1965.

INTRODUCTION

Le but de ces notes est d'essayer de donner des éléments suffisants pour servir de motivation au désir que nous avons de résoudre les problèmes techniques évoqués au cours d'exposés précédents.[0] Nous avons choisi de suivre quelques étapes importantes dans l'histoire de l'affinement des concepts utilisés à l'heure actuelle. Ce choix est purement subjectif et les quelques éléments donnés ici ne peuvent éventuellement que servir d'introduction à la lecture de livres et articles cités en références.

Il va sans dire que nous ne mentionnerons que quelques aspects particuliers de la théorie quantique des champs, à savoir ceux qui servent à formuler une théorie de collisions, et que nous nous arrêterons à une description de celle-ci en termes juste assez précis pour "donner un sens" aux exposés précédents.

L'idée centrale qui est à l'origine de ces développements est évidemment celle de la fameuse dualité entre ondes et particules, les "ondes" intervenant ici sous forme de champs, objets dont la définition a atteint un degré croissant de précision et de généralité, les particules ayant également reçu une définition précise en mécanique quantique, au moins en ce qui concerne les particules stables, c'est-à-dire qui ne se décomposent pas spontanément*.

La description quantique d'une particule libre a été donnée par Omnès[1]. La forme actuelle, compatible avec le principe de relativité a été donnée par E.P. Wigner en 1939[2]. Les états d'une particule de masse m , de spin 0

---

* La hiérarchisation des interactions suivant leurs forces, ou, de façon équivalente, suivant les temps caractéristiques de leurs durées, permet de considérer comme approximativement stables pour une classe d'interactions, des particules dont l'instabilité est caractérisée par un temps plus long (une force d'interaction plus faible) que le temps (que celle qui est caractéristique) des interactions de cette classe.

sont représentés par les vecteurs d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}^1_{[m,o]}$ dans lequel agit la représentation unitaire irréductible $[m,O]$ du (groupe de recouvrement universel du) groupe de Lorentz inhomogène $(M_4 \times SL(2,C))$. $\mathcal{H}^1_{[m,o]}$ est commodément réalisé comme $L^2(\mathbb{R}^3)$ avec le produit scalaire

$$(\Phi,\Psi) = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \varphi^*(\vec{p})\, \psi(\vec{p}) \quad ; \quad \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad ;$$

l'état transformé de Φ par (a,A) a pour fonction d'onde :

$$\{a,A\}_{\varphi(\vec{p})} = \Big(U(a,A)\varphi\Big)(p) = e^{i.p.a}\, \varphi\Big(\overrightarrow{\Lambda^{-1}(A)\, p}\Big) \quad ,$$

$$\text{où} \quad a = (a^o, a^1, a^2, a^3) = (a^o, \vec{a})$$
$$p = (p^o, p^1, p^2, p^3) = (p^o, \vec{p}) \quad (\text{ici}, \ p^o = \omega_p)$$

sont des vecteurs de l'espace de Minkowsky M_4 et $\Lambda(A)$ est l'image de $A(SL(2,C))$ dans l'application connue de $SL(2,C)$ sur le groupe de Lorentz qui agit sur M_4 .

Historiquement, les particules libres ont été décrites quantiquement, d'abord de façon compatible avec l'invariance galiléenne par "quantification canonique" des équations d'Hamilton "libres" de la mécanique classique, (Schrödinger, Heisenberg, Dirac)[3], puis de façon compatible avec la relativité restreinte (Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac)[3], et l'effort a été concentré sur la description Hamiltonienne des interactions entre "particules" via l'introduction de potentiels à deux corps dans la fonction Hamiltonienne. Le but était à l'époque de trouver une théorie permettant de calculer les niveaux d'énergie d'un électron dans le champ coulombien créé par un noyau chargé. Ce n'est que plus tard que l'on a éprouvé le besoin de définir avec précision le concept de particule asymptotiquement libre ainsi que celui d'interaction.

Au même moment où l'on réussissait à formuler la description quantique de ce qui était auparavant une particule classique, c'est-à-dire un Hamiltonien classique, on donnait une description quantique de ce qui était auparavant un champ classique : le champ de Maxwell (Heisenberg, Pauli)[3], et la formulation quantique permettait d'interpréter le champ de Maxwell comme décrivant de façon équivalente une assemblée d'un nombre quelconque de particules (photons) ; de même on interprétait le champ scalaire neutre de masse m comme décrivant un nombre arbitraire de particules de masse m (Pauli Weisskopf)[3]; nous traiterons cet exemple qui est peu différent du précédent, et un peu plus simple, car il ne fait intervenir que les représentations $[m,0]$ du groupe de Lorentz inhomogène.

L'équation de champ est* l'équation de Klein-Gordon :

$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0 \quad ,$$

c'est une conséquence des équations d'Hamilton pour l'Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : \left[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^o}\right)^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right] :$$

(on ne se préoccupe pas trop de ce que doit être $\varphi(x)$ pour que H existe !). Si on choisit une base φ_α dans $\mathcal{H}^1_{[m,o]}$.- à la lumière des perfectionnements ultérieurs, nous choisirons même les $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, ce qui est possible - et si on définit :

$$f_\alpha(x) = \int \frac{d^3p}{2\omega_p}\, e^{i(\omega_p x^o - \vec{p}\,\vec{x})}\, \varphi_\alpha(\vec{p}) \quad ,$$

---

* nous utilisons dans ce qui suit un système d'unités où $\hbar = c = 1$.

on peut résoudre l'équation initiale sous la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha f_\alpha(x) + a^*_\alpha f^*_\alpha(x) \quad .$$

L'Hamiltonien prend alors la forme :

$$H = \sum_{\alpha,\beta} a^*_\alpha \omega_{\alpha\beta} a_\beta \quad ,$$

où :

$$\omega_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \varphi^*_\alpha(\vec{p}) \omega_p \varphi_\beta(\vec{p}) = \omega^*_{\beta\alpha} \quad .$$

La quantification canonique s'effectue en supposant que les a_α, a^*_α sont des opérateurs (a^*_α l'adjoint de a_α) satisfaisant aux règles de commutation canoniques :

$$[a_\alpha , a^*_{\beta'}] = \delta_{\alpha,\beta} \mathbb{1} \quad ; \; [a_\alpha , a_\beta] = [a^*_\alpha , a^*_\beta] = 0 \quad ,$$

qui sont représentés par des opérateurs non bornés à domaine dense dans l'espace de Fock[4] que nous allons maintenant décrire.

A partir de l'espace $\mathcal{H}^1_{[m,o]}$ précédemment défini, on construit les puissances tensorielles Hilbertiennes symétrisées d'éléments $\varphi(\vec{p}_1 \ldots \vec{p}_n)$ symétriques dans leurs arguments, tels que :

$$\frac{1}{n!} \int \frac{d^3p_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3p_n}{2\omega_n} \left|\varphi(p_1 \ldots p'_n\right|^2 < \infty, \; 1 \leq n < \infty) : \; \mathcal{H}^n_{[m,o]} = \left(\mathcal{H}^1_{[m,o]}\right)^{\otimes n}_{\mathcal{S}}$$

($\mathcal{S}$ voulant dire "symétrisée") ,

et on considère l'espace d'Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{o}^{\infty} \mathcal{H}^{n}_{[m,o]} = \lim_{\overrightarrow{N\to\infty}} \bigoplus_{o}^{N} \mathcal{H}^{n}_{[m,o]}$$

avec $\mathcal{H}_o = \mathbb{C}$ (composante du vide) , obtenue par complétion de l'espace sous-tendu par les combinaisons linéaires de vecteurs appartenant à un nombre fini d'espaces $\mathcal{H}^n$: c'est l'espace des suites de fonctions $(\varphi_o \ldots \varphi_n \ldots)$ $\varphi_i \in \mathcal{H}^i$ telles que :

$$\sum_{o}^{\infty} \| \varphi_i \|_{\mathcal{H}_i} < \infty \quad .$$

Les opérateurs a_α , a^*_α sont définis par :

$$a_\alpha |o\rangle = 0 \qquad \text{avec} \quad |o\rangle = (1,0,0,0\ldots) ,$$

$$a^*_\alpha |\varphi_n\rangle = \{0 \ldots\ldots \varphi^\alpha_{n+1} , 0,0 \ldots\} ,$$

avec :

$$\varphi^\alpha_{n+1}(\vec{p}_1 \ldots \vec{p}_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_\alpha(\vec{p}_k)\, \varphi_n(\vec{p}_1 \ldots \hat{\vec{p}}_k \ldots \vec{p}_{n+1}) ,$$

et : $$a_\alpha |\varphi_n\rangle = \{0 \ldots\ldots \varphi^\alpha_{n-1} , 0 \ldots.\}$$

avec :

$$\varphi^\alpha_{n-1}(\vec{p}_1 \ldots \vec{p}_{n-1}) = \int \frac{d^3p}{2\omega_p}\, \varphi^*_\alpha(\vec{p})\, \varphi_n(\vec{p}, \vec{p}_1 \ldots \vec{p}_{n-1}) \quad .^{*}$$

---

* avec ces conventions $\prod_\alpha \frac{(a^*_\alpha)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} |o\rangle$ est normalisé à l'unité si $\langle o|o\rangle = 1$.

On vérifie facilement les règles de commutation $[a_\alpha , a^*_\beta] = \delta_{\alpha\beta}\mathbf{1}$.

Dans chaque $\mathcal{H}^n_{[m,o]}$ agit la puissance tensorielle $n^{\text{ième}}$ de la représentation du groupe de Lorentz inhomogène qui agit dans $\mathcal{H}^1_{[m,o]}$, ce qui définit une représentation $U(a,A)$ dans $\mathcal{H}$ à condition de convenir que $|0\rangle$ se transforme suivant la représentation identité. L'Hamiltonien H n'est alors, proprement défini, rien d'autre que le générateur infinitésimal des translations dans le temps $\mathcal{U}(x^o, \vec{0} ; \mathbf{1})$.

On a de façon évidente :

$$U(a,A)\ a_\alpha\ U^{-1}\ (a,A) = a_{\{a,A\}_\alpha}$$

$$U(a,A)\ a^*_\alpha\ U^{-1}\ (a,A) = a^*_{\{a,A\}_\alpha}$$

avec :
$$\{a,A\}_{\varphi_\alpha(\vec{p})} = e^{ip.a}\ \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{\Lambda^{-1}(A)\ p}\right) .$$

On voit alors que l'opérateur $\varphi(f) = \int \varphi(x)\ f(x)\ d^4x, (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4))$, est défini (symétrique, non borné), sur toute somme finie $\bigoplus_{n\in I} \mathcal{H}^n$ (I sous-ensemble fini de N) , et que ce domaine $D = \bigcup_{I \text{ fini}} \bigoplus_{n\in I} \mathcal{H}^n$ est stable par application de tout polynôme $\mathcal{P}(\varphi) = \sum_{i\in I} \int \varphi(x_1)\dots \varphi(x_i)\ f_i(x_1\dots x_i)\ dx_1\dots dx_i$, $(f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4i}))$, ainsi que par l'action de $U(a,A)$, et contient $|0\rangle$. De plus, d'après la définition même de $\mathcal{H}$, et la possibilité de créer suffisamment d'éléments de $\mathcal{H}^n$ par action répétée de a^*_α sur $|0\rangle$, il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs de la forme $\mathcal{P}(\varphi)|0\rangle$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Ces propriétés élémentaires nous seront utiles pour comprendre dans la suite les systèmes d'axiomes que nous présenterons.

Pour l'instant, citons deux propriétés élémentaires : la distribution à valeur opérateur $\varphi(x^o,\vec{x})$ possède des propriétés de régularité en x^o après saturation des variables $\vec{x}$ par une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, et, inversement, de régularité en $\vec{x}$ après saturation de la variable x^o par une fonction de $\mathcal{S}$; ces deux propriétés sont dues au fait que $\varphi(x)$ est la solution d'une équation hyperbolique. En particulier, on a les règles de commutation canoniques :

$$\left[\varphi(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x'^o}(x')\right]_{x^o = x'^o} = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left[\varphi(x), \varphi(x')\right]_{x^o = x'^o} = 0$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^o}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x'^o}(x')\right]_{x^o = x'^o} = 0 \quad ,$$

et plus généralement :

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\,D_m(x-x') \quad ,$$

où $D(x)$ est la solution (distribution tempérée), invariante de Lorentz de l'équation d'onde, impaire en x , satisfaisant aux conditions initiales

$D(x)\Big|_{x^o = o} = 0$, $\frac{\partial D}{\partial x^o}(x)\Big|_{x^o = o} = \delta^3(\vec{x})$, qui jouit de la propriété importante : $D(x) = 0$ $x^2 < 0$, d'où suit la propriété de commutativité locale - ou microcausalité - :

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0 \qquad (x-x')^2 < 0 \qquad (x \sim x') \quad ,$$

sur laquelle nous reviendrons également par la suite :

- Remarque -

On peut également associer à toute représentation $[m,s]$ du groupe de recouvrement du groupe de Lorentz inhomogène un champ libre "spinoriel" et mener à bien la construction ci-dessus, à la différence près que, pour s demi-entier, on doit utiliser des règles d'anticommutation canoniques $[a_\alpha , a^*_\beta]_+ = \delta_{\alpha\beta}\mathbf{1}$, $[a_\alpha , a_\beta]_+ = [a^*_\alpha , a^*_\beta]_+$ si on veut respecter la localité qui se présente ici sous forme d'anticommutativité locale.

A la suite de ce modèle de champs libres, susceptible de décrire, en nombre quelconque, des particules sans interactions - (libres) - et, en s'inspirant toujours d'équations classiques existantes, on a été amené à écrire des équations de champs couplés, dont la quantification canonique et l'interprétation en termes de particules libres était destinée à décrire les interactions entre celles-ci, en nombre arbitraire. Le formalisme Lagrangien a été, pour des raisons de covariance, préféré au formalisme Hamiltonien, la construction de l'Hamiltonien à partir du Lagrangien permettant la quantification canonique. Nous allons succintement décrire le cas de l'électrodynamique quantique, dans une des versions qui en était donnée vers les années 1950.[5].

Les équations de Maxwell :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

où A_μ est le vecteur potentiel et $F_{\mu\nu}$ le tenseur antisymétrique de Maxwell, qui groupe de façon covariante les champs électrique et magnétique $(\vec{E}, \vec{H})$, peuvent s'obtenir à partir de la densité de Lagrangien :

$$\mathcal{L}_{Max}(x) =: \left[F_{\mu\nu}(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right](x) :$$

L'équation de la particule chargée décrite par un champ complexe $\varphi(x) \neq \varphi^{*}(x)$:

$$(\Box - m^2)\, \varphi\, (x) = 0 \quad ,$$

se déduit de la densité de Lagrangien :

$$\mathcal{L}_{ch}(x) =: \left[\partial^{\mu} \varphi^{*} \partial_{\mu} \varphi + m^2 \varphi^{*} \varphi \right](x) : \quad .$$

Le principe d'invariance de jauge connu en physique classique conduit à écrire le Lagrangien décrivant l'interaction du champ de Maxwell avec le champ des particules chargées :

$$\mathcal{L} = \left[\mathcal{L}_{Max} + (\partial^{\mu} + ie_o A^{\mu})\, \varphi^{*}\, (\partial_{\mu} - ie_o A_{\mu})\, \varphi + m_o^2 \varphi^{*} \varphi \right](x) \quad ,$$

les équations qu'on en déduit sont :

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = J_{\nu} \qquad (\longrightarrow \partial^{\mu} J_{\mu} = 0)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

$$(\partial^{\mu} - ie_o A^{\mu})(\partial_{\mu} - ie_o A_{\mu})\, \varphi + m_o^2 \varphi = 0$$

$$\text{i.e} \quad (\Box + m^2)\, \varphi = f \quad ,$$

où J_ν , f , sources du champ de Maxwell et du champ chargé respectivement contiennent des expressions monômiales dans les champs pris en un point, ce qui laisse prévoir quelques catastrophes après notre remarque que les champs libres quantifiés sont des distributions !

Par exemple, $J_\mu = ie_o \varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \varphi + 2 e_o^2 A_\mu \varphi^* \varphi$. Les paramètres e_o, m_o seront ajustés à la masse m et à la charge électrique e des particules que l'on veut décrire* .

Il s'agit maintenant de trouver une représentation des opérateurs $F_{\mu\nu}$, A_ν , φ satisfaisant aux règles de commutation canoniques à temps égaux, dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ où on puisse faire une interprétation en termes de particules : on récrit les équations du mouvement sous forme intégrale, après avoir imposé la condition de transversalité** $\partial^\mu A_\mu |\Phi\rangle = 0 \qquad \Phi \in \mathcal{H}$:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\substack{in\\out}}(x) + \int D_o^{\substack{ret\\av}}(x-x')\, J_\mu(x')\, d^4x'$$

$$\Phi(x) = \Phi^{\substack{in\\out}}(x) + \int D_m^{\substack{ret\\av}}(x-x')\, \tilde{f}(x')\, d^4x' \qquad \text{(Y.F.)}$$

où : $\Box A_\mu^{\substack{in\\out}}(x) = 0 \quad ; \quad (\Box + m^2)\, \Phi^{\substack{in\\out}}(x) = 0 \quad ;$

$$\partial_\mu A^{\mu\, \substack{in\\out}}(x) |\Phi\rangle = 0 \quad ,$$

et $D^{\substack{ret\\av}}$ sont les solutions élémentaires retardées ou avancées (à supports $\bar{V}^\pm = \{x | x^2 \geq 0 \;\; x^o \gtrless 0\}$ des opérateurs différentiels définissant les équations des champs libres. Les deux ensembles d'opérateurs in, out sont des limites,

---

* nous avons en fait simplifié la situation réelle.

** condition technique particulière à l'électrodynamique.

dans un sens que nous préciserons ultérieurement des opérateurs de champ couplés. On suppose alors que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est de deux façons (in et out) le produit tensoriel des espaces de Fock pour le champ de Maxwell libre et pour le champ chargé, de masse m , libre, autrement dit qu'il existe dans $\mathcal{H}$ deux représentations de Fock (unitairement équivalentes) des règles de commutation canoniques des opérateurs de création et d'annihilation de particules libres, au moyen des champs in et out : $\gamma_\alpha^{\substack{in\\out}}$, $\gamma_\alpha^{*\substack{in\\out}}$, $c_\alpha^{\substack{in\\out}}$, $c_\alpha^{*\substack{in\\out}}$, annihilateurs et créateurs de photons et de particules chargées.

On suppose de plus que l'état du vide $|o\rangle$ est le même pour les deux représentations, ainsi que les états à une particule :

$$|o_{in}\rangle = |o_{out}\rangle = |o\rangle$$

$$\gamma_\alpha^{*in}|o\rangle = \gamma_\alpha^{*out}|o\rangle = |\gamma_\alpha\rangle$$

$$c_\alpha^{*in}|o\rangle = c_\alpha^{*out}|o\rangle = |c_\alpha\rangle \quad .$$

De ce qui précède, il découle qu'il existe un opérateur unitaire S , dans $\mathcal{H}$, tel que :

$$S^\dagger \begin{matrix} \gamma_\alpha^{*in} \\ \gamma_\alpha^{in} \\ c_\alpha^{*in} \\ c_\alpha^{in} \end{matrix} \quad S = \begin{matrix} \gamma_\alpha^{*out} \\ \gamma_\alpha^{out} \\ c_\alpha^{*out} \\ c_\alpha^{out} \end{matrix}$$

$$(S^\dagger S = S\,S^\dagger = \mathbb{1}$$

$$S|o\rangle = |o\rangle \qquad S|\gamma_\alpha\rangle = |\gamma_\alpha\rangle \qquad S|c_\alpha\rangle = |c_\alpha\rangle \;)$$

Une théorie des collisions est alors possible. La question standard est la suivante:étant donné un état entrant $|\gamma_{\alpha_1}^{in} \ldots \gamma_{\alpha_n}^{in} ; c_{\beta_1}^{in} \ldots c_{\beta_m}^{in}\rangle$ composé

de particules loin les unes des autres et n'interagissant pas* , quelle est l'amplitude de probabilité de trouver au bout d'un temps "infiniment grand" un autre état de particules indépendantes $\langle \gamma^{out}_{\alpha_1}, \ldots \gamma^{out}_{\alpha_n}, c^{out}_{\beta_1}, \ldots c^{out}_{\beta_m} |$

Autrement dit, peut on calculer :

$$\langle \gamma^{out}_{\alpha_1}, \ldots \gamma^{out}_{\alpha_n}, c^{out}_{\beta_1}, \ldots c^{out}_{\beta_m} | \gamma^{in}_{\alpha_1} \ldots \gamma^{in}_{\alpha_n} c^{in}_{\beta_1} \ldots c^{in}_{\beta_m} \rangle$$

$$= \langle \gamma^{in}_{\alpha_1}, \ldots \gamma^{in}_{\alpha_n}, c^{in}_{\beta_1}, \ldots c^{in}_{\beta_m} | S | \gamma^{in}_{\alpha_1} \ldots \gamma^{in}_{\alpha_n} c^{in}_{\beta_1} \ldots c^{in}_{\beta_m} \rangle$$

$$= \langle \gamma^{out}_{\alpha_1}, \gamma^{out}_{\alpha_n}, c^{out}_{\beta_n}, \ldots c^{out}_{\beta_m} | S | \gamma^{out}_{\alpha_1} \ldots \gamma^{out}_{\alpha_n} c^{out}_{\beta_1} \ldots c^{out}_{\beta_m} \rangle \quad ,$$

en fonction des paramètres e_o , m_o intervenant dans la théorie. Ce problème est "résolu" par une méthode de perturbations suivant les puissances de e (la charge vraie) . On écrit :

$$e = e_o \sum_{n=o}^{\infty} \varepsilon_{2n} e_o^{2n}$$

$$m^2 = m_o^2 + \sum_{n=o}^{\infty} \mu_{2n} e_o^{2n}$$

$$S = \mathbb{1} + \sum_{n=o}^{\infty} e^{2n} S_{2n} \quad .$$

(Il se trouve que la symétrie des équations est telle que seules les puissances paires de e_o interviennent) et on développe en série de perturbations les équations de Yang Feldman mises sous la forme :

---

* c'est un problème particulier à l'electrodynamique où, les photons ayant une masse nulle, la portée des forces est infinie, que deux particules chargées ne sont jamais loin l'une de l'autre ! de sorte que l'électrodynamique est un très mauvais exemple pour servir d'introduction à une théorie de collision.

$$A^{\mu}_{out}(x) = A^{\mu}_{in}(x) + \int D_o(x-x')\, j_{\mu}(x')\, d^4x'$$

$$\varphi_{out}(x) = \varphi_{in}(x) + \int D_m(x-x')\, \tilde{f}(x')\, d^4x'$$

$$S^{\dagger} \begin{matrix} A^{\mu}_{in}(x) \\ \varphi_{in}(x) \end{matrix} \quad S = \begin{matrix} A^{\mu}_{out}(x) \\ \varphi_{out}(x) \end{matrix} ,$$

ce qui permet de calculer les S_{2n} en fonction des opérateurs in et out et d'évaluer les amplitudes de transition au moyen de l'application des règles de commutation canoniques pour les champs in ou out .

Malheureusement, dès qu'on cherche à calculer des termes correctifs à l'approximation d'ordre le plus bas en e on tombe sur des expressions indéterminées ou infinies qui s'écrivent formellement comme produits de distributions singulières. Des prescriptions de calcul sont alors imposées, qui permettent de lever ces ambiguïtés et les résultats numériques qui émergent se trouvent en accord avec l'expérience à un degré de précision qui n'a jamais -et de loin - été retrouvé dans le domaine de la physique des particules. Ces succès ont alors conduit vers les années 1950 à essayer de formaliser, par analogie avec l'électrodynamique, l'idée de Yukawa selon laquelle les forces nucléaires, liant les nucléons (neutrons, protons) dans les noyaux, étaient dues à l'échange de mésons π , de même que les forces électriques étaient dues à l'échange de photons entre particules chargées . On écrit alors un Lagrangien contenant les champs de nucléons (champ spinoriel de Dirac ψ) et ceux des mésons π (scalaires Φ):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{nucléons}} + \mathcal{L}_{\text{mésons}} + \mathcal{L}_{\text{int.}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{nucléon}} = \bar{\psi}\,(\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} + M_o)\,\psi \equiv \bar{\psi}\,\mathcal{D}\,\psi$$

$$\mathcal{L}_{\text{méson}} = \partial^{\mu}\,\underline{\Phi}\,\partial_{\mu}\,\underline{\Phi} + m_o^2\,\underline{\Phi}\,\underline{\Phi} \equiv \underline{\Phi}\,KG\,\underline{\Phi}$$

$$\mathcal{L}_{int} = i g\, g_o\, \bar{\psi}\, \gamma_5\, \psi\, \underline{\Phi} = \underline{j}\, \underline{\Phi} \quad ,$$

où $\mathcal{D}$ et KG sont les opérateurs de Dirac et Klein-Gordon, respectivement . Les équations du mouvements sont alors :

$$\mathcal{D}\ \psi = f$$

$$KG\ \underline{\Phi} = \underline{j} \quad ,$$

et on essaye de résoudre comme précédemment en théorie des perturbations en puissance de g_o^2 :

$$M = M_o + \sum_n^{\infty} M_{2n}\ g_o^{2n}$$

$$m^2 = m_o^2 + \sum_{n=o}^{\infty} m_{2n}\ g_o^{2n}$$

$$g^2 = \sum_{n=o}^{\infty} g_o^{2n}\ \gamma_{2n} \quad ,$$

où M et m sont les masses observées des nucléons et mésons π et g^2 la constante de couplage physique de l'interaction pion-nucléon.

On développe $S = 1 + \sum g^{2n}\ S_{2n}$ et on trouve malheureusement que l'on doit prendre $\frac{g^2}{4\pi} = 15$ au lieu de $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ en électrodynamique ; le paramètre effectif intervenant dans le développement des éléments de matrice S se trouve être $\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 = 0{,}08$,ce qui empêche le développement perturbatif de converger numériquement et enlève toute possibilité de reproduire les résultats expérimentaux.

Cet échec de la théorie perturbative "Lagrangienne" dans une tentative d'explication des interactions "fortes" conduisit des physiciens à

construire une théorie :

- indépendante d'un Lagrangien - la découverte de nouvelles particules en interactions fortes laissa penser qu'il était sans doute difficile de construire un Lagrangien correct, (ce qui éliminait en même temps l'envie d'utiliser des développements perturbatifs - le Lagrangien n'étant pas connu) ;

- si possible moins ambiguë mathématiquement que la théorie Lagrangienne.

La première théorie "axiomatique" des champs est la théorie de Lehmann Symanzik Zimmerman[6] (1954) qui est axée sur la théorie des collisions. Elle est ensuite raffinée par Wightman (1956)[7] au moyen d'un système d'axiomes à partir desquels une théorie de collisions vient d'être développée jusqu'à un point où elle puisse être utilisée.

L'interprétation du point de vue de la mécanique quantique (existence d'observables "locales") de la théorie de Wightman conduit elle même aux théories d'anneaux locaux de Haag Araki, Haag Kastler, pour lesquelles il existe également une théorie des collisions. Ces théories concrétisent des idées de Haag qui sont celles mêmes qui permirent de compléter la théorie des collisions (Haag Ruelle) dans les théories de Wightman et de faire le pont avec la théorie de LSZ (Hepp).

I - LA THEORIE DE L.S.Z.[6]

En raison de la difficulté de définir des états de particules asymptotiquement libres, signalée dans le cas où les interactions électromagnétiques sont produites par les photons, de masse nulle, et sont donc de portée infinie, cette théorie ne s'appliquera pas telle quelle à la description des phénomènes électromagnétiques.

On se donne un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui coïncide de deux façons avec les produits tensoriels d'espaces de Fock des particules stables que l'on veut décrire : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$ et un opérateur unitaire qui applique les vecteurs

de $\mathcal{H}_{in}$ sur les vecteurs correspondants de $\mathcal{H}_{out}$ ainsi qu'il a été précédemment expliqué :

$$\langle \alpha_{out} | \; S = \langle \alpha_{in} |$$

$$SS^{\dagger} = S^{\dagger}S = \mathbb{1}$$

$$|0\rangle = |0_{in}\rangle = |0_{out}\rangle = U_{in}(a,A) = U_{out}(a,A)$$

$$|1 \text{ particule in}\rangle = |1 \text{ particule out}\rangle \quad .$$

Soit $U(a,A)$ <u>la</u> représentation du groupe de recouvrement du groupe de Lorentz inhomogène, définie par la construction de $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$, de sorte que :

$$U(a,A)\; S\; U^{-1}(a,A) \;=\; S$$

$$(S^{\dagger} U_{in}(a,A)\; S = U_{out}(a,A)) \quad ,$$

qui exprime que l'opérateur S est invariant par le groupe de relativité.

On suppose que certains au moins des champs $\varphi^{\substack{in\\out}}$ sont interpolables par des champs couplés dans le sens suivant. Utilisant l'expression des champs libres en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, on peut inversement écrire :

$$a_{\alpha}^{\substack{in\\out}} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o = t} f_{\alpha}(x) \overleftrightarrow{\partial_o}\, \varphi^{\substack{in\\out}}(x)\; d^3x$$

$$a_{\alpha}^{*\substack{in\\out}} = \frac{}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o = t} f^{*}_{\alpha}(x) \overleftrightarrow{\partial_o}\, \varphi^{*\substack{in\\out}}(x)\; d^3x \quad ,$$

où les $\tilde{f}_\alpha(\vec{p})$ sont supposés appartenir à $\mathcal{S}(R^3)$, $f \overleftrightarrow{\partial_o} g = f \frac{\partial}{\partial x^o} g - \left(\frac{\partial f}{\partial x^o}\right) g$, et les intégrales écrites ne dépendent pas de t en vertu de l'équation de champ libre. Pour certains champs $\varphi^{\substack{in\\out}}$, on suppose l'existence de champs interpolants $\varphi(x)$ dans le sens que :

$$a_\alpha(t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o = t} f_\alpha(x) \overleftrightarrow{\partial_o} \varphi(x)\, d^3x \quad ,$$

et

$$a^*_\alpha(t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o = t} f^*_\alpha(x) \overleftrightarrow{\partial_o} \varphi^*(x)\, d^3x \quad ,$$

qui dépendent de t sauf si φ est lui-même un champ libre, convergent faiblement vers :

$$a_\alpha^{\substack{in\\out}} \quad , \quad a_\alpha^{\substack{in\\out}*} \quad \text{lorsque } t \to \pm\infty \ :$$

Pour suffisamment* de vecteurs Φ, Ψ de $\mathcal{H}$:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \langle \Phi | a_\alpha(t) | \Psi \rangle = \langle \Phi | a_\alpha^{\substack{in\\out}} | \Psi \rangle$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \langle \Phi | a^*_\alpha(t) | \Psi \rangle = \langle \Phi | a_\alpha^{*\substack{in\\out}} | \Psi \rangle \quad .$$

Le champ $\varphi(x^o, \vec{x})$ est supposé être une distribution en $\vec{x}$, une fois différenciable en x^o.

On peut montrer[8] que dans cette théorie, on peut construire un champ interpolant tout champ asymptotique pourvu qu'il existe au moins un champ interpolant par "secteur de supersélection" (voir appendice) de $\mathcal{H}$. Cette question

---

* sur un domaine dense dans $\mathcal{H}$ contenant suffisamment d'états de collision.

ainsi que les questions de domaine et de régularité en x^o seront précisées dans la théorie de Wightman.

Enfin, les champs interpolants sont supposés (ou par construction) locaux :

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{\pm} = 0 \qquad (x-y)^2 < 0$$

(+ si le champ φ correspond à un spin $\frac{1}{2}$ entier,
- si le champ φ correspond à un spin entier),
et covariants par l'action de $U(a,A)$ comme le sont les champs asymptotiques.

On n'a pas supposé les règles de commutation canoniques à temps égaux, qui posent la question de choisir leurs représentations, dont la variété liée à l'infinité des degrés de liberté soulève un problème insurmonté à l'heure actuelle.[9]

Muni de ces hypothèses, on va exprimer les amplitudes de transition au moyen de transformées de Fourier de valeurs moyennes dans le vide de certains produits d'opérateurs de champs interpolants et utiliser la commutativité locale et les propriétés de spectres de $U(a, \mathbb{1})$ pour déduire des propriétés d'analyticité des noyaux correspondants. Ces expressions sont données par des formules communément désignées sous le nom de

<u>Formules de réduction.</u>

Soit à évaluer $\langle \{\beta\}_{out} | \{\alpha\}_{in} \rangle = S_{\beta\alpha}$

où $$\{\alpha\} = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \ldots \otimes \alpha_n$$

$$\{\beta\} = \beta_{\underline{1}} \otimes \beta_2 \otimes \ldots \otimes \beta_{\underline{m}} \quad ,$$

où les α_i , β_j sont des états à une particule de type arbitraire. On écrira $\{\alpha - \alpha_1\} = \alpha_2 \otimes \ldots \alpha_n$.

On va écrire :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \{\beta\}_{out} | a^{*in}_{\alpha_1} | \{\alpha-\alpha_1\} \rangle$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \langle \{\beta_{out}\} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o=t} d^3x\, f_{\alpha_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial_o} \varphi_1(x_1)\, d^3x$$

$$| \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle \quad ,$$

(utilisant l'expression de $a^{*in}_{\alpha_1}$ en fonction de $\varphi_1^{in}(x_1)$, la condition asymptotique, et faisant l'hypothèse que les états $\{\alpha-\alpha_1\}$ sont justiciables de celle-ci). On intègre alors par partie en utilisant la formule de Green comme suit :

$$S_{\beta\alpha} = \left(\lim_{t\to-\infty} - \lim_{t\to+\infty}\right) \langle \{\beta\}_{out} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o=t} d^3x\, f_{\alpha_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial_o} \varphi_1(x_1)\, d^3x$$

$$\times \quad | \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle$$

$$+ \lim_{t\to+\infty} \langle \{\beta\}_{out} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o=t} d^3x\, f_{\alpha_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial_o} \varphi_1(x_1)\, d^3x \; | \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle \quad .$$

Le deuxième terme s'écrit immédiatement en utilisant à nouveau la condition asymptotique :

$\langle \{\beta\}_{out} | a^{*out}_{\alpha_1} | \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle$, qui s'évalue facilement au moyen des règles de commutation canoniques des opérateurs "out" pour donner

$$\sum_{\underline{j}=\bar{1}}^{\bar{j}=\bar{m}} \langle \beta_{\underline{j}} | \alpha_1 \rangle \quad \langle \{\beta-\beta_{\underline{j}}\}_{out} | \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle \quad ,$$

$\langle \beta_j | \alpha_1 \rangle$ étant pris égal à zéro si α_1, β_j sont des états de particules de types différents (masses,spins, etc...). Les facteurs $S_{\beta-\beta_j, \alpha-\alpha_1}$ seront évalués par répétition du procédé en cours :

Le premier terme s'écrit :

$$S^1_{\beta\alpha} = \langle \{\beta\}_{out} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x_1 \; \partial_o \left(f_{\alpha_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial_o} \varphi_1(x_1) \right) | \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle$$

$$= \langle \{\beta\}_{out} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x_1 \; f_{\alpha_1}(x_1) \; \partial_o^2 \varphi_1(x_1) - \left(\partial_o^2 f_{\alpha_1}(x_1) \right) \varphi_1(x_1) | \{\alpha-\alpha_1\}_{in} \rangle \quad ,$$

comme f_{α_1} est solution de l'équation libre $(\partial_o^2 - \nabla^2 + m_1^2) f_{\alpha_1} = 0$ et que φ_1 est distribution en $\vec{x}_1$, une "intégration par partie" au sens des distributions donne :

$$S^1_{\beta\alpha} = \langle \{\beta\}_{out} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x_1 \; f_{\alpha_1}(x_1) \; (\Box_{x_1} + m_1^2) \; \varphi_1(x_1) | \{\alpha\}-\{\alpha_1\}_{in} \rangle \quad ;$$

à remarquer qu'on ne peut pas intégrer par partie sur la variable x^o, faute de supposer $a^{*in}_{\alpha_1} = a^{*out}_{\alpha_2}$, ce qui revient à dire que les particules de type 1 n'interagissent pas.

Pour continuer ce processus il est bon de définir le produit chronologique de n opérateurs de champs interpolants :

$$T\left(\varphi_1(x_1) \; \ldots \; \varphi_p(x_p)\right) = \sum_{P(1\ldots p)} \theta_+\left(x^o_{P(1)} - x^o_{P(2)}\right) \ldots \theta_+\left(x^o_{P(p-1)} - x^o_{P(p)}\right)$$

$$\varphi_{P(1)}\left(x_{P(1)}\right) \times \ldots\ldots \times \varphi_{P(p)}\left(x_{P(p)}\right),$$

où $\theta_+(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, et P est une permutation de l'ensemble d'indices $(1 \ldots p)$,

et de démontrer la formule :

$$\langle \Phi_{out} | \int dx_1 \ldots dx_p \, f_{\alpha_1}(x_1) \ldots f_{\alpha_p}(x_p) \, (\Box_{x_1} - m_1^2) \ldots (\Box_{x_p} - m_p^2) \times$$

$$T(\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_p(x_p)) \, a^{*in}_{\alpha_{p+1}} | \Psi_{in} \rangle$$

$$= \langle \Phi_{out} | a^{*out}_{\alpha_{p+1}} \int dx_1 \ldots dx_p \; f_{\alpha_1}(x_1) \ldots f_{\alpha_p}(x_p) (\Box_{x_1} - m_1^2) \ldots (\Box_{x_p} - m_p^2)$$

$$T(\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_p(x_p)) | \Psi_{in} \rangle \quad +$$

$$\langle \Phi_{out} | \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx_1 \ldots dx_{p+1} \; f_{\alpha_1}(x_1) \ldots f_{\alpha_{p+1}}(x_{p+1}) (\Box_{x_1} - m_1^2) \ldots$$

$$\times \quad (\Box_{x_{p+1}} - m_{p+1}^2) \; T(\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_{p+1}(x_{p+1})) | \Psi_{in} \rangle \; ,$$

au moyen de la condition asymptotique et de la structure du produit chronologique due à la présence des fonctions de Heaviside. Lorsque l'application répétée de ce procédé* a permis de se ramener à des valeurs moyennes dans le vide, la totalité des termes obtenus s'organise comme suit :

---

* et du procédé analogue permettant de faire passer des opérateurs de destruction, out de gauche à droite où il se transforment en opérateurs de destruction in .

On définit les amplitudes connexes $S^c_{\beta\alpha}$ de façon récurrente par :

$$\langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | S | \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle = \sum_{\substack{\{\lambda_1 \dots \lambda_k\} \\ \in \Lambda(\underline{1},\dots \underline{m},1,\dots n)}} \prod_{i=1}^{k} \langle \lambda_i(\beta) | S | \lambda_i(\alpha) \rangle^c \quad ,$$

où $\Lambda(\underline{1} \dots \underline{m}, 1 \dots n)$ est l'ensemble des partitions de la collection d'indices $(\underline{1} \dots \underline{m}, 1 \dots n)$ en sous-ensembles $\lambda_1 \dots \lambda_k$ et $\lambda_i(\beta)$, $\lambda_i(\alpha)$ les ensembles d'éléments β , α appartenant à la partie λ_i de cette partition.

De façon similaire, on définit $W^T(x_1 \dots x_p) = \langle 0 | \varphi_1(x_1) \dots \varphi_p(x_p) | 0 \rangle^T$ (T pour tronqué) , récursivement par :

$$\langle 0 | \varphi_1(x_1) \dots \varphi_p(x_p) | 0 \rangle = \sum_{\substack{\{\lambda_1 \dots \lambda_k\} \\ \in \Lambda\ (1 \dots p)}} \prod_{i=1}^{k} W^T\ (\lambda_i(x)) \quad ,$$

où $\lambda_i(x)$ est l'ensemble de points indexés par les éléments de la partie λ_i d'une partition Λ , ces points étant rangés dans l'ordre naturel où ils apparaissent dans l'ensemble $(x_1 \dots x_p)$ ordonné suivant les indices croissants*.

La définition des valeurs moyennes dans le vide des produits chronologiques tronqués s'effectue de façon naturelle et les formules de réduction de L.S.Z se réduisent à :

---

* Dans le cas de champs anticommutants on doit insérer dans ces définitions de même que dans celles des produits chronologiques quelques signes $\pm$ tenant compte de la parité des permutations auxquelles sont soumis ces champs.

$$\langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | S | \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle^c = \frac{(i)^{n-m}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n+m)}} \int dx_1 \dots dx_n \quad dx_{\underline{1}} \dots dx_{\underline{m}}$$

$$\times f_{\alpha_1}(x_1) \dots f_{\alpha_n}(x_n) \quad f^*_{\beta_{\underline{1}}}(x_{\underline{1}}) \dots f^*_{\beta_{\underline{m}}}(x_{\underline{m}}) \; (\Box_{x_1} - m_1^2) \dots (\Box_{x_n} - m_n^2)(\Box_{x_{\underline{1}}} - m_{\underline{1}}^2) \dots (\Box_{x_{\underline{m}}} - m_{\underline{m}}^2)$$

$$\times \langle 0 | \; T \; (\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \; \varphi_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \; \dots \; \varphi_{\underline{n}}(x_{\underline{m}}) | 0 \rangle^T \; . \quad (*)$$

Nous allons maintenant citer quelques résultats - conséquences de la nature du spectre de l'opérateur P_μ et de la commutativité locale - qui permettent de définir une

Extrapolation analytique des noyaux connexes[21].

Par noyau connexe nous entendons la transformée de Fourier de la valeur moyenne dans le vide d'un produit chronologique tronqué "amputé" par les opérateurs de Klein Gordon :

$$\langle - p_{\underline{1}} \dots - p_{\underline{m}} | S | p_1 \dots p_n \rangle^c = \mathcal{F}_{p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}}, \; p_1 \dots p_n} \left(\prod_{i=1}^{i=\underline{m}} (\Box_{x_i} - m_i^2) \right)$$

$$\times \; \langle 0 | \; T \; (\varphi_1(x_1) \dots \varphi_{\underline{m}}(x_{\underline{m}}) | 0 \rangle^T \; .$$

1) L'invariance par translation montre que ce noyau est de la forme :

$$(2\pi)^4 \; \delta \left(\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{\underline{i}=\underline{1}}^{\underline{i}=\underline{m}} p_{\underline{i}} \right) \tilde{\tau} \; (p_1 \dots p_n, \; p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}}) \; .$$

---

* dans le cas où les champs ne sont pas symétriques, on doit remplacer les $\varphi_i(x_i)$ par $\varphi^*_i(x_i)$.

2) $\tilde{\tau}(p_1 .. p_n, p_{\underline{1}} .. p_{\underline{m}})$ coïncide dans chaque ouvert Ω_α d'un recouvrement de $\mathbb{R}^{4(m+n-1)}$ avec une distribution $\tilde{\rho}_\alpha$ (conséquence du spectre de P_μ), valeur au bord sur les réels d'une fonction holomorphe dans un tube à base imaginaire (conséquence de la commutativité locale qui fournit un support maximum pour ρ_α, dans l'espace des x).

Les propriétés des $\tilde{\rho}_\alpha$ ont été énoncées dans un précédent exposé[10].

Les ρ_α s'obtiennent à partir du produit chronologique par changement judicieux de certaines fonctions de Heaviside θ_+ en $-\theta_- = -1+\theta_+$.

Les Ω_α associés aux cônes γ_α définis dans[10] sont définis par $\bigcap_I p_I \notin \bar{V}_I^+$ si $S_I \gtrless 0$ dans γ_α, où $\bar{V}_I^\pm = \{ p_I^o \geq 0 \ , \ p_I^2 \geq M_I^2 \}$, la masse M_I étant connue par le spectre de P_μ ; il suffit pour le voir de partir de la définition de $\tilde{\rho}_\alpha$:

$$\rho_\alpha(x_1 \dots x_{\underline{m}}) = \sum_{P(1\dots\underline{m})} \left[\pm \theta_\pm (x^o_{P(1)} - x^o_{P(2)}) \right] \left[\pm \theta_\pm (x^o_{P(2)} - x^o_{P(3)}) \right]$$

$$- \left[\pm \theta_\pm (x^o_{P(\underline{m}-1)} - x^o_{P(\underline{m})}) \right] \langle 0 | \varphi_{P(1)}(x_{P(1)}) \dots \varphi_{P(\underline{m})}(x_{P(\underline{m})}) | 0 \rangle^T \ ,$$

où on écrit $\pm \theta_\pm (x^o_{P(i)} - x^o_{P(i+1)})$ suivant que $S_{P(1)} + \dots + S_{P(i)} \gtrless 0$ dans γ_α, de calculer $\rho_\alpha - \tau$ par utilisation itérée de l'identité $\theta_+ + \theta_- = 1$ et de tenir compte du fait que la troncature revient à négliger le point $p = 0$ du spectre de P_μ.

Il reste enfin à exprimer la condition d'unitarité $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$ sur les amplitudes connexes, laquelle ne prendra sa force que lorsque le

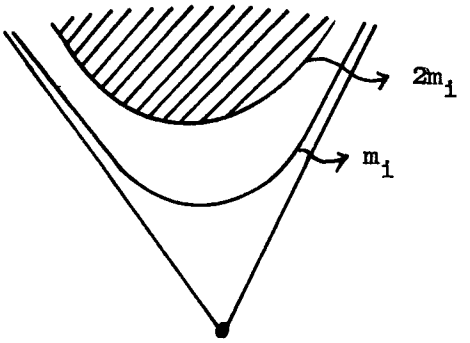
problème de complétion analytique posé par l'existence des $\tilde{\rho}_\alpha$ sera résolu.

Remarques

Si la théorie de L.S.Z se débarrasse de la quantification canonique à temps égaux et des problèmes épineux des représentations de celle-ci[9], eu égard à l'infinité du nombre de degrés de liberté, elle suppose encore des propriétés de régularité très forte pour les champs qui sont considérés ici comme fonctions de x^o. Or c'est précisément l'un des drames des calculs perturbatifs basés sur un Lagrangien, que les valeurs moyennes de produits d'opérateurs $W(1\ldots n) = \langle 0|\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n)|0\rangle$ émergent comme distributions suffisamment singulières pour $x_i^o = x_{i+1}^o$ pour que la multiplication par les fonctions de Heaviside soit illégale. La question des domaines de définition des opérateurs de champ ainsi que de leurs adjoints est également laissée dans l'ombre. Ces questions trouvent une solution plus satisfaisante dans la

II - LA THEORIE DE WIGHTMAN[11]

On se donne dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ une représentation unitaire continue $U(a,A)$ du groupe de recouvrement du groupe de Lorentz inhomogène, contenant un vide unique $|0\rangle$ (la représentation identité ne se trouve qu'une fois), un certain nombre de représentations irréductibles de type $[m_i, s_i]$, $m > 0$ chacune étant contenue avec la multiplicité 1, et une intégrale directe de représentations de ce type



dont on pourra montrer à partir des axiomes qui suivent qu'elle débute à $2\min. m_i$.

Ces hypothèses, plus particulières que celle qui demande que le spectre de P_μ appartienne au $\overline{V}^+$ sont seulement nécessaires- unicité du vide mise à part - en vue de l'interprétation de la théorie en termes de particules.

On se donne de plus une famille dénombrable de distributions de $\mathcal{S}'$ (ou $\mathcal{D}'$) , à valeurs opérateurs non bornés , $\varphi^i(f) = \int \varphi^i(x)\, f(x)\, d^4x$, $f \in \mathcal{S}$ ou $\mathcal{D}$, définis ainsi que leurs adjoints sur un domaine D dense dans $\mathcal{H}$, contenant $|0\rangle$, stable par application des $\varphi^i(f)$ et de leurs adjoints, ainsi que l'action de $U(a,A)$.

Enfin ces champs sont groupés en sous-ensembles covariants :

$$U(a,A)\ \varphi^i_\alpha(x)\ U^{-1}(a,A) \ = \ \varphi_\beta(\Lambda(A).x + a)\ \ \mathcal{D}^{s_i}_{\beta\alpha}(A)$$

et locaux :

$$[\vec{\varphi}^i(\vec{f}),\ \vec{\varphi}^j(\vec{g})]_\pm = 0 \qquad \text{si } (x-y)^2 < 0 \qquad \text{pour } \begin{cases} \forall x \in \text{support } f \\ \forall y \in \text{support } g \end{cases}$$

$$\left(\vec{\varphi}^i(\vec{f}) = \int d^4x \sum_{\alpha=-s_i}^{\alpha=+s_i} \varphi^i_\alpha(x)\ f^\alpha_i(x)\right) ,$$

le commutateur ou l'anticommutateur étant pris suivant que le nombre de champs de spin demi entier se trouvant dans cette relation est inférieur ou égal à 2 .

L'espace des fonctions sur lesquelles les φ^i sont définis comme distributions est choisi d'après l'expérience que l'on a des champs libres ou d'expressions perturbatives ; la nécessité de les considérer comme distributions est montrée par un théorème de Wightman[12] selon lequel, en vertu des axiomes précédemment énoncés - hormis la définition des opérateurs comme distributions - de tels champs ne peuvent être des fonctions de x sans que la théorie soit vide.

Le choix de $\mathcal{S}'$ ou de tout autre espace[13] de distributions définies sur un espace test contenant suffisamment de fonctions de $\mathcal{D}$ pour que l'axiome de localité garde un sens, et pour lesquelles la transformée de Fourier soit définie, est motivé par le désir que l'on a de donner une interprétation de la théorie en termes de particules.

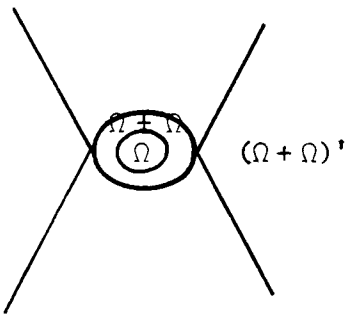
Nous ne décrirons pas ici les résultats nombreux qui ont été déduits de ces axiomes et sont exposés dans les excellents livres de R.F. Streater, A.S. Wightman et R. Jost , et mentionnerons seulement les résultats relativement récents qui ont trait à la théorie des collisions[11] :

1) il existe un théorème célèbre (Reeh Schlieder[11]) qui dit que non seulement les vecteurs obtenus par application sur le vide de polynômes dans les champs testés

$$\mathcal{P} = \sum_{p=1}^{N} \int \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_p(x_p) \; f_p(x_1 \ldots x_p) \, dx_1 \ldots dx_p$$

forment un ensemble dense dans $\mathcal{H}$, mais que les vecteurs $\mathcal{P}(\Omega)|0\rangle$ forment eux-mêmes un ensemble dense, pour tout ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^4$, où $\mathcal{P}(\Omega)$ est un polynôme à coefficients $f_p(x_1 \ldots x_p)$ pris dans $\mathcal{D}(\Omega^p)$. Ainsi pour tout état $|1\rangle$ de $\mathcal{H}$ appartenant à un sous-espace à une particule (sur lequel $U(a,A)$ se restreint à $[m_i, s_i]$, ainsi qu'il a été supposé ci-dessus), on peut trouver, quelque soit Ω un $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\langle 1|\mathcal{P}(\Omega)|0\rangle \neq 0$; appelons le B et, soit $B(x) = U(x)\, B\, U^{-1}(x)$, qui est un champ défini au point x et presque local :

$$[B(x), B(y)]_{\pm} = 0 \qquad (x-y) \in (\Omega+\Omega)'$$



Soit alors $\tilde{B}(p)$ la transformée de Fourier de $B(x)$, $\tilde{B}_i^1(p) = \chi_i(p)\,\tilde{B}(p)$ où $\chi_i(p)$ est une fonction C^∞ dont l'intersection du support avec le spectre de l'opérateur P_μ se réduit à la nappe d'hyperboloïde $p_i^2 = m_i^2$, $p_i^o > 0$, telle que $\chi_i(p)\Big|_{p_i^2 = m_i^2} = 1$, et soit $B_i^{(1)}(x)$ la transformée de Fourier de $\tilde{B}_i^1(p)$. L'expression

$$B_{\alpha i}^{(1)}(t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o = t} f_\alpha^*(x) \overleftrightarrow{\partial_o} B_i^{(1)}(x)\, d^3x$$

a alors un sens et on peut montrer que les vecteurs

$$\prod_{i=1}^{L=n} B_{\alpha i}^{(1)*}(t)\,|\Omega\rangle \quad ,$$

tendent en norme dans $\mathcal{H}$ pour t tendant vers $\pm\infty$ vers des vecteurs qui engendrent déux espaces de Fock (et même, pour $n=1$ sont indépendants de t). Soient $\mathcal{F}_{in}$ et $\mathcal{F}_{out}$ les ensembles de tous ces vecteurs (n et α_i variant) ; si on suppose $\mathcal{F}_{in}$ (et par conséquent $\mathcal{F}_{out}$ en vertu du "théorème TCP")[11] dense dans $\mathcal{H}$, on est à même de donner une interprétation particulaire <u>complète</u> de la théorie et d'appliquer $\mathcal{F}_{in}$ sur $\mathcal{F}_{out}$ par un opérateur <u>unitaire</u> S .

2) On peut alors montrer les formules de réduction de L.S.Z sous la forme suivante :

Soit : $$B_{\alpha i}(t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^o = t} f_\alpha^*(x) \overleftrightarrow{\partial_o} B_i(x)\, d^3x \quad ,$$

(B et non plus $B^{(1)}$), alors, pour "suffisamment" de vecteurs $\Phi_{in} \in \mathcal{F}_{in}$, les vecteurs $\prod_i B_{\alpha i}^*(t)\,|\Phi_{in}\rangle$ tendent faiblement et suffisamment rapidement

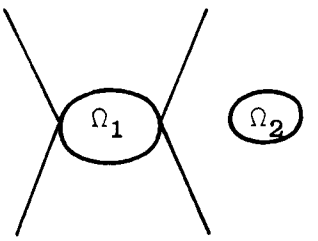
pour $t \to -\infty$ vers des vecteurs de $\mathcal{F}_{in}$ - avec la propriété analogue pour les états out -. Ainsi les éléments de matrice S connexes s'expriment au moyen des transformées de Fourier de produits chronologiques d'opérateurs $B_i(x)$.

Remarque

On peut définir de cette façon des fonctions ρ_α qui sont un peu moins bonnes que celles de L.S.Z en ce sens que : 1) leurs supports sont légèrement étalés ($\Omega \neq 1$ point) ce qui implique la perte de bornes polynomiales à l'infini dans les tubes de définition des $\tilde{\rho}_\alpha$, 2) ces ρ_α ont perdu toutes propriétés de covariance. D'où le désir que l'on a de définir des ρ_α, à supports stricts, covariantes, comme on a pu le faire dans un cas particulier[10].

En dehors de la possibilité de faire une théorie de collisions, il se pose la question de définir dans les théories de Wightman des observables locales : étant donné un polynôme $\mathcal{P}_1(\Omega_1)$ symétrique sur D, peut-on en définir une extension self-adjointe $\overline{\mathcal{P}_1(\Omega_1)}$ dont les projecteurs spectraux $E_{\lambda_1}[\mathcal{P}(\Omega_1)]$ pourront être considérés comme décrivant des observables localisées dans le "laboratoire" Ω_1 et ce de telle sorte que si $\Omega_2 \sim \Omega_1$

$$\left[E_{\lambda_1}[\mathcal{P}_1(\Omega_1)] \, , \, E_{\lambda_2}[\mathcal{P}_2(\Omega_2)]\right] = 0$$



(indépendance ou compatibilité de mesures dans des laboratoires qui ne peuvent être mis en communication par un signal lumineux).

Une condition suffisante[15] pour que $E_\lambda(\mathcal{P}(\Omega))$ existe est que $|0\rangle$ soit un vecteur analytique pour tout $\mathcal{P}(\Omega)$, Ω fixé, i.e. que la série :

$$\sum \frac{\| \mathcal{P}(\Omega) |0\rangle \|^{n}}{n!} z^{n}$$

ait un rayon de convergence non nul. Alors on peut montrer que si tel est le cas pour Ω_1, Ω_2, $\Omega_1 \sim \Omega_2$, les projecteurs spectraux correspondants commutent. Cette condition suffisante d'analyticité du vecteur du vide est malheureusement très forte, et il existe des cas où elle n'est pas vérifiée, ce qui n'empêche pas que l'on puisse construire des observables localisées dans la région Ω.

La difficulté de résoudre ce problème (de façon satisfaisante) conduit à formuler un nouveau système d'axiomes où les objets de base sont des algèbres d'opérateurs bornés dans un espace d'Hilbert, attachés à chaque ouvert borné Ω de M^4, ce qui est parfaitement satisfaisant pour définir une théorie quantique locale* ; c'est

III - LA THEORIE DE HAAG ARAKI[16]

On se donne un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et une représentation $U(a,A)$ qui satisfait aux hypothèses faites dans la théorie de Wightman. A tout ouvert borné Ω de M^4 on associe une algèbre de Von Neumann (ou une C^* algèbre) $\mathcal{A}(\Omega)$, dans $\mathcal{H}$, de façon que

1) si $\Omega_1 \supset \Omega_2$ $\qquad \mathcal{A}(\Omega_1) \supset \mathcal{A}(\Omega_2)$

2) si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ $\qquad \mathcal{A}(\Omega_1) \subset \mathcal{A}(\Omega_2)'$

3) quel que soit le recouvrement $\bigcup_i \Omega_i$ de M_4 $\bigcup_i \mathcal{A}(\Omega_i)$ admette une fermeture uniforme et une fermeture faible bien déterminées : $\bar{\mathcal{A}}(M)$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}}(M)$.

---

* à ceci près qu'on est en droit de se demander[12] si cela a un sens de parler d'expériences dans un domaine de M^4 de dimensions de l'ordre de $[(10^{-13})\text{cm}]^3 \times \times 10^{-23}$ s.

La théorie des collisions peut se développer en toute généralité moyennant l'adjonction aux $\mathcal{A}(\Omega)$ de familles d'éléments unitaires $\Psi(\Omega)$, $\Psi^*(\Omega)$ qui permettent de passer d'un secteur de supersélection (cf. appendice) de $\mathcal{H}$ à un autre[17]; leur définition fait l'objet d'un travail de H. Borchers qui ne semble pas être dans son état définitif, suivant lequel on a les propriétés de localité :

$$\Psi(\Omega_1) \subset \mathcal{A}'(\mathcal{O}_2) \quad \text{si} \quad \mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2$$
$$\Psi^*(\Omega_1) \subset \mathcal{A}'(\mathcal{O}_2) \quad \text{si} \quad \mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2$$

$$\Psi_1^*(\Omega)\, \Psi_2(\Omega) \subset \mathcal{A}(\Omega)$$
$$\Psi_2^*(\Omega)\, \Psi_1(\Omega) \subset \mathcal{A}(\Omega)$$

$$\Psi_1^{(*)}(\Omega_1)\, \Psi_2^{(*)}(\Omega_2) = \varepsilon \quad \Psi_2^{(*)}(\Omega_2)\, \Psi_1^{(*)}(\Omega_1) \quad \text{si} \quad \Omega_1 \sim \Omega_2$$

$\varepsilon = \pm 1$ indépendamment de Ω_1 , Ω_2 , $\Psi_1^{(*)}(\Omega_1)$, $\Psi_2^{(*)}(\Omega_2)$ et H. Epstein[18] a montré que si les $\Psi(\Omega)$ réalisent la règle de supersélection de spin, $\varepsilon = -1$. Moyennant le théorème de Reeh Schlieder qui est encore vrai ici[16], on crée les particules $[m_i, s_i]$ à partir d'éléments d'un $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ arbitraire (éventuellement étendu par les $\Psi(\mathcal{O})$) et la théorie des collisions[16] se déroule normalement avec les champs :

$$\left.\begin{aligned} B(x) &= U(x)\, B\, U^{-1}(x) \\ \Psi(x) &= U(x)\, \Psi\, U^{-1}(x) \end{aligned}\right. \qquad B \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

ou des champs régularisés :

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}(x) &= \int f(x-x')\, B(x')\, dx' \\ \tilde{\Psi}(x) &= \int f(x-x')\, \Psi(x')\, dx' \end{aligned}\right. \qquad \text{supp. } f \text{ petit}$$

à la différence près avec la théorie de Wightman que les formules de réduction s'établissent pour des états initiaux et finaux à énergies bornées[16].

CONCLUSION

Nous avons essayé d'esquisser ici quelques unes des étapes qui ont conduit à des systèmes d'axiomes "raisonnables" amenant naturellement à l'étude de noyaux décrivant les processus de collisions qui, dans ces diverses théories, présentent des propriétés d'analyticité décrites dans des exposés précédents.

Le drame de ces théories est l'impossibilité actuelle de construire des exemples non triviaux satisfaisant aux postulats - la théorie du champ libre admettant une théorie des collisions vide ($S = 1$). Dans le cas des théories Lagrangiennes, des définitions mathématiquement correctes des noyaux ont été formulées[19] et une "théorie des perturbations"[20] a été définie dans le cadre de la théorie de L.S.Z, mais, à la connaissance de l'auteur de ces notes, ces travaux n'ont pas été appliqués au cas de l'électrodynamique quantique.

Des travaux sont également en cours en ce qui concerne la définition mathématiquement précise d'une "théorie Lagrangienne" et l'existence de ses solutions[22].

En ce qui concerne la théorie de Wightman, l'existence de théories non triviales n'a pas été prouvée, non plus qu'en ce qui concerne la théorie de Haag Araki.

APPENDICE

LES REGLES DE SUPERSELECTION[2]

On peut relaxer l'hypothèse faite parfois en mécanique quantique que l'on a une représentation d'un ensemble d'opérateurs self adjoints bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont tout rayon détermine un état possible du système. En fait, il est souvent nécessaire de considérer $\mathcal{H}$ comme somme directe "secteurs de supersélection" , ou sous-espaces cohérents $\mathcal{H}_i$ à l'intérieur de chacun desquels l'hypothèse précédente est faite. C'est le cas lorsque la représentation des observables admet un commutant non trivial à spectre discret.

Exemple

L'opérateur charge électrique commute avec toutes les observables, la charge électrique étant absolument conservée et les systèmes physiques que l'on sait préparer étant dans des états propres de l'opérateur charge électrique. Ici $\mathcal{H}_i$ est le sous-espace de $\mathcal{H}$ correspondant à la valeur propre q_i de Q. En particulier, on voit que les observables se représentent par des opérateurs diagonaux en bloc dans les $\mathcal{H}_i$.

En conséquence les vecteurs de $\mathcal{H}$ représentent des états du système modulo la relation d'équivalence :

$$\sum_i |\Phi_i\rangle \sim \sum_i \eta_i |\Phi_i\rangle \qquad \text{avec} \qquad |\eta_i| = 1 \quad , \quad |\Phi_i\rangle \in \mathcal{H}_i \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE*

[0] - Exposés de BROS et STORA aux réunions précédentes de la R.C.P. n° 25.

[1] - Conférence d'OMNES , réunion de novembre 1966.

[2] - Voir par exemple :
A.S. WIGHTMAN dans "Relations de dispersion et particules élémentaires", Hermann, Paris, 1961.

[3] - Voir n'importe quel livre de Mécanique Quantique, par exemple :
A. MESSIAH, Mécanique Quantique, Dunod, Paris, 1960.

[4] - Voir par exemple :
A.S. WIGHTMAN, L. GÅRDING - Arkiv. För Fysik 28, 13 p.129, 1964.

[5] - Voir par exemple :
J.M. JAUCH, F. ROHLRICH - Theory of photons and electrons, Addison-Wesley 1955 - London.
N.N. BOGOLIUBOV, D.V. SHIRKOV, "Introduction to the theory of quantized Fields, "New-York, Interscience 1959.
G. KALLEN - Handbuch der Physik, vol. V/1 Springer Verlag 1958.

[6] - Voir les articles originaux de H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN et V. GLASER - H. LEHMANN, W. ZIMMERMANN, reproduits par exemple dans :
"Dispersion relations and the abstract approach to Field theory"
L. Klein éditeur, Gordon-Breach, New-York, 1961.
L.S.Z. Nuovo Cimento I , n° 1 , p. 205 (1955)
" IV , n° 2 , p. 320 (1957)
G.L.Z. VI , n° 5 , p. 1122 (1957) .

[7] - A.S. WIGHTMAN - Phys. Rev. 101, p.860, 1956
reproduit dans le volume cité en [6].

[8] - W. ZIMMERMANN - Nuovo Cimento, X, n° 4 , p.597, 1958.

[9] - H. ARAKI - J.M.P. 1, 492-504, (1960).

[10] - Voir les exposés de BROS et STORA en 1965-1966.

[11] - On trouvera deux traitements exhaustifs de la théorie de Wightman dans :
A.S. WIGHTMAN, R.F. STREATER : "PCT, spin and statistics and all that" , Benjamin, New-York, 1964 (théorie des collisions non traitée), et :
R. JOST : "The general theory of quantized field" Am. Math. Soc. 1965, (théorie des collisions traitée jusqu'aux formules de réduction non comprises).
A.S. WIGHTMAN - dans Theoretical Physics IAEA , Vienna, 1963. (i.e)

[12] - A.S. WIGHTMAN - Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. I , 1964.

[13] - A. JAFFE a considéré des champs définis sur des espaces autres que $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{D}$, susceptibles de décrire des théories "non renormalisables" (preprint).

[14] - K. HEPP - Comm. Math. Phys. 1 , n° 2 , p.95 (1965).

[15] - H.J. BORCHERS, W. ZIMMERMANN - Nuovo Cimento , XXXI , n° 4 , p.1047, et réf.[4] .

[16] - H. ARAKI - Einfuehrung in die Axiomatische Quantenfeld theorie, Zurich E.T.H. 1961 , notes miméo, et livre en préparation.

[17] - voir l'appendice et :
H.J. BORCHERS - Comm. Math. Phys. vol. 1 , n° 1 p.51 et n° 4 p.281 (1965) ;
H.J. BORCHERS - cours de Cargèse (1965) , à paraître.

[18] - H. EPSTEIN - "CPT invariance of the S matrix in a theory of local observables" , I.A.S. Princeton 1966.

[19] - K. HEPP - Comm. Math. Phys. 2 , n° 4 , p.301 , (1966).

[20] - O. STEINMANN - Ann. Phys. 29, p.76 , 1964 et 36, p.267, 1966 où l'on se heurte au problème de la multiplication de distributions par des fonctions de Heaviside.

[21] - D. RUELLE - Nuovo Cimento , XIX , n° 2 n p.356 , (1961).
H. ARAKI - J.M.P. 2 , p.163 , (1961).

[22] - K. SYMANZIK - J.M.P. 7, n° 3 , p.510 , 1966 .

---

* Pour des applications de la théorie des champs à la physique des particules élémentaires, voir par exemple : G. KÄLLEN , Elementary Particle Physics, Addison-Wesley, 1964.