Aldo Andreotti
François Norguet

Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 1
« Travaux de A. Andreotti et F. Norguet sur les espaces analytiques Q-pseudoconvexes »,
, exp. n° 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__1__A1_0>

I

QUELQUES PROPRIETES DE COURANTS DEFINIS A L'AIDE DE FONCTIONS HOLOMORPHES

par Aldo ANDREOTTI et François NORGUET

1. Soit $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans une variété analytique complexe connexe V, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V. Soit $\mathcal{D}'(V)$ l'espace vectoriel topologique des courants dans V.

Pour toute $f \in \mathcal{H}(V)-\{0\}$, $\log|f|$ est une fonction plurisousharmonique [1] dans V, donc est localement sommable dans V, et par conséquent définit un courant de degré zéro dans V, que l'on désignera encore par $\log|f|$.

<u>Théorème 1</u>.

<u>L'application de</u> $\mathcal{H}(V) - \{0\}$ <u>dans</u> $\mathcal{D}'(V)$, <u>qui à</u> f <u>associe</u> $\log|f|$, <u>est continue</u>.

<u>Preuve</u>.

Ce théorème étant local, il suffit de le démontrer pour un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

a) Soit D' un domaine borné de $\mathbb{C}^n$; pour toute fonction φ à valeurs complexes définie dans $\overline{D'}$, on pose

$$M(\varphi) = \sup_{z\in\overline{D'}} |\varphi(z)| .$$

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D'}$; soit Φ l'ensemble des fonctions g , holomorphes au voisinage de $\overline{D'}$, et vérifiant

$$|f(z) - g(z)| \leq \frac{1}{2} M(f) \qquad \text{pour} \quad z \in \overline{D'}$$

Alors :

i) pour tout $z \in \overline{D'}$, et tout $g \in \Phi$, on a

$$|g(z)| \leq |f(z)| + |g(z) - f(z)| \leq \frac{3}{2} M(f) \quad ;$$

donc

$$M(g) \leq \frac{3}{2} M(f) \quad .$$

ii) en un point z_o de $\overline{D'}$ tel que $|f(z_o)| = M(f)$, on a , pour tout $g \in \Phi$,

$$\begin{aligned} M(f) &= |f(z_o)| \leq |g(z_o)| + |f(z_o) - g(z_o)| \\ &\leq |g(z_o)| + \frac{1}{2} M(f) , \end{aligned}$$

d'où

$$|g(z_o)| \geq \frac{1}{2} M(f) \quad ;$$

par conséquent la fonction nulle n'est pas limite de fonctions de Φ dans D' .

Soit K un compact contenu dans D' , et soit D un domaine vérifiant $K \subset D \subset\subset D'$. D'après le corollaire du Théorème 4 de [2] , il existe deux nombres a et ω tels que l'on ait, pour toute boule $B(M,R)$, de centre M et de rayon R , contenue dans $\overline{D}$, et pour toute fonction $g \in \Phi$,

$$\lambda(\log|g| , M,R) \geq a + \omega \log R ,$$

en désignant par $\lambda(\log|g|, M,R)$ la moyenne de $\log|g|$ sur la sphère de centre M et de rayon R . En désignant par β_n l'élément de volume de $\mathbb{R}^{2n}$, on a donc

$$\int_{B(M,R)} \log|g|.\beta_n = \int_0^R \lambda(\log|g|, M,r)\, r^{2n-1}\, dr$$

$$= \frac{1}{2n} \int_0^R \lambda(\log|g|, M,r)\, d(r^{2n}) ,$$

d'où

$$\int_{B(M,R)} \log|g|.\beta_n \geq \frac{1}{2n} \int_0^R (a+\omega \log r)\, d(r^{2n})$$

et

$$(1) \qquad \int_{B(M,R)} \log|g|.\beta_n \geq R^{2n}(b + \theta \log R)$$

où $\quad b = \frac{1}{2n}\left(a - \frac{\omega}{2n}\right) \quad$ et $\quad \theta = \frac{\omega}{2n}$.

b) Soit B le bord de D , et soit $F = \{z \ ; \ z \in \overline{D} \ , \ f(z) = 0\}$; supposons $F \cap D \neq \emptyset$; soit σ l'aire de $F \cap D$. Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on pose $D_\alpha = \{z \ ; \ z \in D \ , \ d(z,B) > \alpha\}$. Soient deux nombres réels $\epsilon > 0$ et $H > 0$.

Soit un nombre réel $\eta > 0$ tel que l'on ait $K \subset D_\eta$.

Soit $A = \{z \ ; \ z \in \overline{D} \ , \ |f(z)| = 1\}$.

Soit δ un nombre réel > 0 vérifiant

$$\delta \leq \frac{\eta}{2} \ , \ \delta \leq \frac{1}{2}\, d(F,A) \quad \text{et} \quad - 18 \left(\frac{72n}{\pi}\right)^{n-1}(n-1)!\,\delta^2(b+\theta\log\delta)\sigma \leq \frac{\epsilon}{2H} \ .$$

Soient $\rho = \dfrac{\delta}{2\sqrt{2n}}$,

$$\Delta_\rho = \{z \ ; \ z \in D \ , \ d(z,F) \leq \rho \ , \ d(z,B) \geq 3\rho\sqrt{2n}\} ,$$

$$\Lambda_\rho = \Delta_\rho \cap \overline{D}_\eta = \{z \ ; \ z \in D \ , \ d(z,F) \leq \rho \ , \ d(z,B) \geq \eta\} .$$

Conformément au Théorème 3 de [2] , soit $(B(M_i,\delta))_{1\leq i\leq N}$ un recouvrement de Δ_ρ par des boules de rayon δ , centrées aux points M_i de F ,

$1 \leq i \leq N$, avec

$$N \leq 3^{2n} \frac{(n-1)!}{(\pi\rho^2)^{n-1}} \sigma .$$

Soit I l'ensemble des i vérifiant $1 \leq i \leq N$ et tels que l'on ait $B(M_i,\delta) \cap \Lambda_\rho \neq \phi$; $(B(M_i,\delta))_{i\in I}$ est un recouvrement de Λ_ρ .

Pour tout $i \in I$, il existe $x \in \Lambda_\rho$ tel que

$$d(M_i,x) \leq \delta \leq \frac{\eta}{2} ;$$

comme $d(x,B) \geq \eta$, on a

$$\eta \leq d(x,B) \leq d(x,M_i) + d(M_i,B) \leq \frac{\eta}{2} + d(M_i,B)$$

et par conséquent

$$d(M_i,B) \geq \frac{\eta}{2} \geq \delta ,$$

d'où

$$M_i \in F \cap \overline{D}_{\frac{\eta}{2}} \quad \text{et} \quad B(M_i,\delta) \subset \overline{D} .$$

c) Soit un nombre réel χ vérifiant $0 \leq \chi \leq \frac{1}{2} M(f)$ et tel que les conditions

$$g \in \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad |f(z) - g(z)| \leq \chi \text{ pour tout } z \in \overline{D}' \text{ entraînent}$$

i) $G = \{z \; ; \; z \in \overline{D} , \; g(z) = 0\} \subset \{z \; ; \; z \in \overline{D} , \; d(z,F) \leq \rho\}$.

ii) $|g(z)| \leq 1$ pour $z \in \overline{D}$ et $d(z,F) \leq \frac{1}{2} d(F,A)$

iii) $\Big|\log|f(z)| - \log|g(z)|\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2VH}$ pour tout $z \in D_\eta - \Lambda_\rho$,

V désignant le volume de D_η .

La première condition peut être réalisée grâce au théorème de Rouché ; la seconde, grâce au principe du maximum ; la troisième, parce que F est à distance positive de $D_\eta - \Lambda_\rho$.

Soit une fonction $g \in \Phi$, vérifiant $|f(z) - g(z)| \leq \chi$ pour tout $z \in \overline{D}'$. On a

$$G \cap \overline{D}_\eta \subset \{z \; ; \; z \in \overline{D} \; , \; d(z,F) \leq \rho \; , \quad d(z,B) \geq \eta\} = \Lambda_\rho$$

et

$$B(M_i,\delta) \subset \{z \; ; \; z \in \overline{D} \; , \quad |g(z)| \leq 1\} \; .$$

En posant $U = \bigcup_{i \in I} B(M_i,\delta)$, on a donc

$$G \cap \overline{D}_\eta \subset \Lambda_\rho \subset U \subset \{z \; ; \; z \in \overline{D} \; , \; |g(z)| \leq 1\} \; .$$

Dans Λ_ρ , on a $\log|g| < 0$. Donc

$$\int_{\Lambda_\rho} \big|\log|g|\big| \; \beta_n = \int_{\Lambda_\rho} -\log|g| \; \beta_n \leq \sum_{i \in I} \int_{B(M_i,\delta)} -\log|g| \; \beta_n \; .$$

Or, d'après l'inégalité (1) , on a

$$\int_{B(M_i,\delta)} \log|g| \; \beta_n \geq \delta^{2n} \; (b + \theta \log \delta) \; ;$$

par conséquent, on a

$$\int_{\Lambda_\rho} \big|\log|g|\big| \, \beta_n \leq - N \, \delta^{2n} \; (b + \theta \; \log \; \delta)$$

$$\leq - 3^{2n} \; \frac{(n-1)!}{(\pi\rho^2)^{n-1}} \; \delta^{2n}(b + \theta \; \log \; \delta) \; \sigma$$

$$\leq - 9 \; (\frac{72n}{\pi})^{n-1} \; (n-1)! \quad \delta^2(b + \theta \; \log \; \delta)\sigma \leq \frac{\varepsilon}{4H} \; .$$

d) Soit φ une fonction continue dans D , dont le support est contenu dans K , et vérifiant $M(\varphi) \leq H$. On a

$$\int_D \varphi(\log|f| - \log|g|)\,\beta_n = \int_{D_\eta} \varphi(\log|f| - \log|g|)\,\beta_n =$$

$$\int_{\Lambda_\rho} \varphi \log|f|\,\beta_n - \int_{\Lambda_\rho} \varphi \log|g|\,\beta_n + \int_{D_\eta - \Lambda_\rho} \varphi(\log|f| - \log|g|)\,\beta_n \,.$$

Donc

$$\left|\int_D \varphi(\log|f| - \log|g|)\beta_n\right| \leq M(\varphi)\left[\int_{\Lambda_\rho} \left|\log|f|\right|\beta_n + \int_{\Lambda_\rho}\left|\log|g|\right|\beta_n + \int_{D_\eta - \Lambda_\rho}\left|\log|f| - \log|g|\right|\beta_n\right]$$

$$\leq H\left(\frac{\epsilon}{4H} + \frac{\epsilon}{4H} + \frac{\epsilon}{2H}\right) = \epsilon \,.$$

2. Pour toute $f \in \mathcal{H}(V)$, la forme différentielle holomorphe $\frac{df}{f}$ est localement sommable dans V , donc définit dans V un courant de degré 1 qu'on désignera encore par $\frac{df}{f}$; ce courant est égal à $2d'\log|f|$, où $\log|f|$ est un courant défini plus haut .

Le courant $\frac{i}{\pi}\, d'd''\log|f| = \frac{1}{2i\pi}\, d\,\frac{df}{f}$ (où $\frac{df}{f}$ est le courant défini ci-dessus) est le courant d'intégration sur le diviseur de f .

Comme les opérateurs d, d' et d'' sont continus pour la topologie des courants, on déduit immédiatement du Théorème 1 :

<u>Corollaire 1</u> .

<u>L'application de</u> $\mathcal{H}(V)-\{0\}$ <u>dans</u> $\mathcal{D}'(V)$, <u>qui à</u> f <u>associe</u> $\frac{df}{f}$, <u>est continue</u> .

<u>Corollaire 2</u> .

<u>L'application de</u> $\mathcal{H}(V)-\{0\}$ <u>dans</u> $\mathcal{D}'(V)$, <u>qui à</u> f <u>associe le courant d'intégration sur le diviseur de</u> f , <u>est continue</u> .

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. LELONG Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. Ec. Norm. Sup. t 62 , pp. 301-338 , 1945 .

[2] P. LELONG Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation. Ann. Ec. Norm. Sup. , t 67 , pp. 393-419 , 1950 .