

RAYMOND DUVAL

**Écriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes
de démonstration par les élèves ?**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 79-98

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998__S4_79_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCRITURE ET COMPREHENSION : POURQUOI FAIRE ÉCRIRE DES TEXTES DE DÉMONSTRATION PAR LES ÉLÈVES ?

Raymond Duval

Nous allons nous centrer sur cette question, thème principal du colloque. Le simple fait de sembler y accorder de l'importance présente certainement un caractère de défi d'un point de vue mathématique. Car cette question semble traduire une préoccupation marginale pour l'enseignement des mathématiques. N'est-ce pas la résolution de problème qui caractérise l'activité mathématique et ne serait-ce pas dans la recherche que se nouerait et se dénouerait la «compréhension»? «Il n'y a plus qu'à rédiger» entend-on souvent dire après une phase de recherche. Et encore, il faudrait pouvoir transcrire ici l'intonation de cette formule révélatrice ! Écrire ne pourrait donc rien apporter d'essentiel à la compréhension et à la démonstration déjà acquises dans les discussions et les explications orales ayant trié et mis en évidence la résolution d'un problème : seulement fixer et, éventuellement, évaluer le travail fait antérieurement. Écrire ne serait plus qu'une affaire de langue ou de maîtrise de langue.

En réalité derrière cette question se cache un ensemble de phénomènes très complexes dont la méconnaissance conduit à aggraver les difficultés d'apprentissage des élèves en mathématiques. C'est sur cette complexité que nous voudrions attirer l'attention. En effet, la question «pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ?» se trouve au carrefour de plusieurs questions. Nous en retiendrons six :

| Questions | Plan de l'exposé |
|---|---|
| (1) Qu'est-ce qu'un texte ? | I. De l'écrit au texte : une dissociation récente entre rapport oral et rapport écrit au langage. |
| (2) Pourquoi l'écriture de texte peut-elle être un moment fondamental dans l'apprentissage des démarches intellectuelles ? | II. Le rapport du sujet à l'expression : variations de ses positions possibles et modifications de son fonctionnement cognitif. |
| (3) Qu'est-ce qu'un texte de démonstration ? | III. Des degrés de liberté rédactionnelle pour les textes de démonstration. |
| (4) Pourquoi écrire un texte de démonstration est-il décisif dans la prise de conscience du pourquoi et du comment une démonstration prouve ? | IV. Écriture d'un texte et prise de conscience de l'organisation d'un discours et des exigences d'une démarche de raisonnement. |
| (5) Quelle situation permet aux élèves que l'écriture fonctionne comme une expérience mentale ? | V. L'apprentissage de l'écriture de textes de démonstration. |
| (6) Que faut-il formuler pour avoir un texte de démonstration ? | |

Pour pouvoir bien saisir la nature des phénomènes auxquels chacune de ces questions renvoie nous serons conduits à distinguer, dans une perspective historique, le texte et les objets culturels que sont les «écrits». Et, dans une problématique d'apprentissage, nous serons également conduits à bien distinguer le texte et l'expression en tant qu'activité d'un sujet. Cette seconde distinction est fondamentale, car elle oblige à regarder les différences de fonctionnement cognitif qui séparent l'expression orale et l'expression écrite, et que Vygotski avait déjà commencé à analyser. Mais, surtout, elle nous permettra d'attirer l'attention sur l'existence d'un stade intermédiaire auquel beaucoup d'élèves reste, au collège et peut-être aussi au lycée, celui de la pratique orale de l'écrit. Or la prise de conscience de ces démarches spécifiques qui sont requises pour comprendre comment une démonstration mathématique «prouve», ne peut pas se faire tant que les individus n'accèdent pas à une pratique écrite de l'écrit. Ce sera évidemment là que nous retrouverons la question globale sur laquelle cet exposé est centré. Toute notre analyse s'appuiera alors sur des propositions que nous avons présentées et développées dans d'autres travaux. Pour que la suite de ces propositions, disséminées au fil des analyses, puisse être facilement retrouvée, nous les avons numérotées de (1) à (4). Mais elles ne doivent pas être confondues avec les propositions essentielles de cet exposé que nous avons notées par des lettres de (a) à (d).

1. De l'écrit au texte : la dissociation récente entre rapport oral et rapport écrit au «langage»

La notion de **texte** est une notion complexe et, d'une certaine manière, récente. Les définitions qui en ont été proposées peuvent varier selon les disciplines ou même les problématiques. Aussi pour en bien cerner les différents aspects, il faut commencer par la mettre en perspective dans la fantastique évolution historique de **cet objet culturel qu'est un «écrit»**.

Cette évolution peut être envisagée de plusieurs points de vue : point de vue technique des supports matériels utilisés (papyrus, parchemin, papier -à partir du XIV^e siècle- et, maintenant, écran électronique) et des conditions de production de l'objet (copie, composition typographique avec l'imprimerie au XV^e, traitement de texte..), point de vue fonctionnel des rôles et de la place de cet objet dans la vie sociale et culturelle, point de vue des pratiques intellectuelles qu'il tend à développer ou à instituer. Nous ne retiendrons dans cette longue évolution que les conséquences de deux moments, celui du passage du manuscrit à l'imprimerie et celui du passage à un mode de production industriel de l'écrit durant la seconde moitié du XIX^e siècle.

1. L'une des conséquences décisives du passage du manuscrit à l'imprimé a été l'émergence d'une fonction nouvelle de l'écrit : la fonction documentaire. Jusqu'alors la fonction de l'écrit était de garder une trace du discours oral et cela avait déjà pour conséquence de contribuer à stabiliser, voire à en fixer les formes (Goody 1994, p.268-273). Avec l'imprimerie une organisation visuelle de l'espace de la page devient possible dans le but de permettre au lecteur d'aller directement à ce qu'il recherche sans avoir besoin de tout lire.

Alors que le manuscrit conservait graphiquement, dans l'alignement de caractères de même type, la continuité uniforme de la parole, un découpage visuel du discours est introduit avec un marquage des parties découpées. Cela se fait avec l'apparition de titres, de sous-titres, de la pagination, de numérotation des lignes, avec la variation des types de caractères... (Escarpit 1973, p. 35-37; Labarre 1994, p. 60-64;). Cela veut dire que des indicateurs visuels de classement ou de rangement fonctionnel des unités des discours se trouvent introduits dans l'écriture du discours. Et c'est ce classement

perceptible comme une disposition spatiale d'unités étiquetées ou codées qui permet au lecteur de choisir dans l'écrit l'entrée qu'il souhaite en fonction de ce qui l'intéresse. Dans un écrit, on peut donc se contenter de **ne lire que ces seules marques de classement et de catégorisation** (titres, sous-titres...) **qui sont comme un «script over»**. Lire, c'est d'abord feuilleter.

Cette fonction documentaire est devenue absolument prédominante avec ce type d'écrit que l'on appelle les magazines, avec les journaux, mais également avec les manuels scolaires. De ce point de vue, certains manuels peuvent être considérés comme de véritables patchworks d'énoncés, de tableaux, de figures, aux typographies multiples... Ajoutons que le «multimédia» (CD-ROM) vient ajouter au développement de ce caractère multiregistre des journaux, des encyclopédies et des manuels, le caractère multimodal d'un accès à la fois visuel et sonore.

2. L'autre conséquence de ce passage du manuscrit à l'imprimé a été la diversification des rôles de l'écrit. De référence normative dans une tradition, il est vraiment devenu un objet de travail indépendant.

Jouant déjà le rôle d'un code (en référence au *codex* qui a remplacé le *volumen* vers le II^e siècle) c'est-à-dire d'un «recueil de constitutions» pour régir les différentes formes d'activités d'un pays ou d'une institution, l'écrit est devenu un objectif de recherche, une source d'informations et un instrument de formation. Un objectif de recherche, avec l'apparition de la critique textuelle : celle-ci est apparue avec la nécessité éditoriale d'un choix parmi les manuscrits transmis (Labarre 1994, p.71). Même l'histoire des mathématiques ne peut pas faire l'économie d'une recherche sur les filiations éventuelles des différents manuscrits qui nous ont transmis le discours mathématique d'Euclide. Une source d'information, avec les consultations quotidiennes, anonymes, ponctuelles, d'écrits pour des reproductions discursives (orales ou écrites) sans citation et sans prise en compte du contexte! Un instrument de formation avec les manuels, avec les «choix de textes», avec les anthologies. Rappelons que la lecture du premier livre des *Éléments* d'Euclide constituait le point de départ de l'enseignement de la géométrie dans les collèges des jésuites, au XVI^e, et que cette lecture précédait la résolution de problèmes (*Ration Studiorum* 1997). Et on peut ainsi observer que l'écrit comme objet culturel a d'abord été l'objet et l'enjeu d'une pratique de lecture avant de devenir l'enjeu d'une expérience d'écriture.

3. La conséquence des innovations techniques dans la production de l'écrit imprimé à la fin du XIX^e siècle, a été de faire faire un saut extraordinaire à la diffusion et à la consommation de cet objet culturel, car il a commencé à devenir accessible à tous. Et cela a entraîné une diversification dans les pratiques de lecture, c'est-à-dire dans les usages que des lecteurs, sans cesse plus nombreux, font de l'écrit, dans leurs attitudes et dans leurs attentes, y compris à l'école (Chartier A.M. et Hebrard J. 1989). Les historiens ont retracé le passage d'une «lecture orale» à une «lecture silencieuse», et celui de l'appropriation par répétition d'un petit nombre de textes «repris et commentés pendant toute une vie à «la consommation de livres» où l'un fait oublier l'autre (Cavallo G. et Chartier R. 1997).

Toutes ces conséquences de l'évolution de l'objet culturel qu'est l'écrit ont entraîné une transformation culturelle très profonde laquelle n'a commencé véritablement à se manifester qu'au cours de notre XX^e. On est passé progressivement d'un stade où il y avait prédominance du DISCOURS ORAL dans les échanges sociaux et dans la formation (la place centrale donnée à la rhétorique dans la formation jusqu'avant la première guerre mondiale en est un indicateur typique) et donc subordination du DISCOURS ÉCRIT à la parole, à un stade où le rapport s'est en quelque sorte inversé. Cette transformation se traduit :

- par la dissociation entre le discours oral et le discours écrit,
- par la modification, pour les individus, de leur pratique orale du discours en fonction de leur maîtrise ou de leur non maîtrise de sa pratique écrite.

C'est seulement au XX^e siècle que cette conception de l'écriture comme dissociée de la pratique du discours oral est devenue explicite. Ainsi, Vygotski vers les années 1930, (c'est-à-dire bien avant que Piaget ne développe sa théorie opératoire de l'intelligence, théorie résolument non «langagière» et non sémiotique qui, depuis son célèbre ouvrage de 1941, a dominé la réflexion pédagogique) a attiré l'attention sur l'importance des différences de fonctionnement entre le langage oral et le langage écrit, entre la parole et le texte. Il partait de la constatation que l'apprentissage du langage écrit se révèle non seulement plus tardif mais aussi beaucoup plus long et plus coûteux que l'apprentissage oral (Vygotski 1985). Et plus récemment, la définition du texte élaborée dans l'approche sémiologique décrite par Roland Barthes (1985) systématise en quelque sorte la rupture culturelle entre un rapport oral au langage et un rapport exclusivement écrit, lecture et écriture devenant alors indissociables.

Cette très rapide mise en perspective historique montre que la notion de texte doit être située, d'une part, par rapport à l'écrit comme objet culturel et, d'autre part, par rapport à l'écart existant entre le rapport au «langage» oral et le rapport au «langage» écrit.

Par rapport à l'écrit comme objet culturel, la mise en perspective historique permet de dégager trois aspects à prendre compte. La différence entre les définitions du texte que l'on peut rencontrer vont en grande partie dépendre de l'aspect qui se trouve privilégié ou de la manière dont on les associe. Ces trois aspects sont :

- l'aspect du **discours comme expression écrite d'une démarche** qui utilise les possibilités d'expansion discursive que donne une langue,
- l'aspect de l' **organisation de l'espace de la page** pour un accès visuel rapide et direct aux différentes informations recherchées,
- l'aspect **extrait d'une œuvre**, comme on peut le voir dans les «choix de textes». La représentation d'une œuvre par des extraits s'impose en raison du changement d'échelle qui est nécessaire pour qu'un discours puisse devenir accessible à un lecteur. En effet, beaucoup d'ouvrages requièrent des capacités d'appréhension en mémoire de travail, des disponibilités de temps ainsi qu'un degré d'investissement dont la plupart des lecteurs, à commencer par les élèves, ne peuvent toujours disposer. Un extrait, s'il est «représentatif», ramène à l'échelle d'une ou de plusieurs pages un discours qui peut s'étendre sur des centaines de pages. Mais cela entraîne évidemment une dénivellation importante, dans l'intelligibilité, entre le niveau des extraits, fussent-ils nombreux et celui de l'œuvre.

En mathématiques, les démonstrations qui sont proposées aux élèves ne peuvent se situer qu'à l'échelle de l'extrait et non à celle de l'œuvre, qui est celle de la construction axiomatique explicite permettant de voir l'enchaînement déductif de ces énoncés qui prennent le statut théorique de théorèmes. Or l'intelligibilité de la démonstration ne peut véritablement se situer qu'à cette échelle de l'œuvre. Car c'est seulement à cette échelle qu'un cadre théorique peut être réellement compris, c'est-à-dire éprouvé dans toute la dynamique d'une construction axiomatique explorant complètement les possibilités et les limites d'un système de propositions initiales. Ainsi, c'est tout l'ensemble du premier livre des *Éléments* qu'il faut travailler, et non pas seulement la démonstration de tel ou tel énoncé particulier, pour découvrir les lacunes de la construction axiomatique. Mais indépendamment de cela, ce changement d'échelle nécessaire peut être envisagé d'un autre point de vue : peut-il y avoir des extraits de textes mathématiques comme on présente des extraits de textes littéraires ? La réponse est loin d'être évidente, même si on se limite à un choix de textes dans une perspective strictement historique.

Dans le cadre de cet exposé, nous ne retiendrons que l'aspect discours comme expression écrite d'une démarche et nous nous en tiendrons à l'échelle de l'extrait, c'est-à-dire à la présentation d'une ou de plusieurs démonstrations d'un énoncé particulier. Nous avons bien conscience que, pour la démonstration, l'aspect discours devrait être aussi envisagé à l'échelle de l'œuvre. Rappelons que l'ouvrage d'Euclide a longtemps servi de manuel ou, plus exactement, d'outil de formation. Et c'est peut-être le charme perdu des *Éléments* que d'avoir longtemps présenté un discours mathématique, non pas

au niveau de démonstrations locales; mais à celui plus global d'une dérivation intrinsèque de résultats. Mais si l'on veut aborder la question, centrale pour notre propos, «pourquoi l'écriture d'un texte peut-elle être un moment fondamental dans un apprentissage de démarches intellectuelles ?», et cela au niveau du collège, il faut d'abord envisager la notion de texte par rapport à l'écart existant entre le rapport au «langage» oral et celui au «langage» écrit. Car les enjeux et la portée de cet écart est plus décisive que la différence entre un extrait et l'œuvre, laquelle relève d'abord un changement d'échelle de temps.

II. Le rapport du sujet à l'expression : variations des positions possibles et modifications du fonctionnement cognitif

Pour analyser le rôle de l'écriture d'un texte dans la compréhension d'une démarche intellectuelle, il y a une notion fondamentale d'où il faut partir : celle d'expression et non pas celle de discours.

L'expression est à la fois l'activité intentionnelle d'un sujet et la manifestation de cette activité à travers une forme et un contenu qui deviennent indépendants de l'intention du sujet. C'est en effet à travers son corps comme à travers les systèmes sémiotiques qu'il s'est approprié qu'un sujet peut s'exprimer. Les manifestations de cette activité vont considérablement varier selon les systèmes mis en œuvre de façon prédominante par le sujet pour accomplir un acte d'expression : elles peuvent être aussi diverses qu'une mimique, un pas de danse, que des dessins, que des discours, que des formules... Il n'y a pas d'expression sans la mobilisation d'un système sémiotique, sans celle de systèmes effecteurs. **L'expression met donc en œuvre un complexe d'opérations, qui suppose la coordination de systèmes de fonctionnements hétérogènes.** Pour la parole, par exemple, il y a le fonctionnement propre au système linguistique utilisé (phonèmes, règles syntaxiques de segmentation ou de concaténation, contraintes lexicales...), ceux propres à l'activité plus générale de traitement de l'information (comme les mémoires mobilisées selon la modalité sensorielle de l'expression), et ceux des mécanismes phono-acoustiques pour l'appareil vocal. On voit donc l'insuffisance de la notion de discours, d'un point de vue didactique, pour analyser les démarches de compréhension. Les possibilités d'expansion et de maîtrise d'un discours¹ ou d'un type de discours dépendent de son mode de production, c'est-à-dire de l'architecture cognitive du système mise en œuvre pour le produire. C'est à cela que renvoie la notion d'expression.

C'est à travers l'activité d'expression qu'un sujet peut apprendre à différencier les divers mécanismes d'expansion discursive, c'est-à-dire les différents fonctionnements discursifs possibles dans l'utilisation d'une langue (Duval 1995). Or cette conscience ou cette prise de conscience que permet l'activité d'expression peut changer complètement selon l'architecture cognitive du système qu'elle mobilise. C'est ce point particulier mais essentiel que nous allons maintenant mettre évidence.

¹ D'une façon générale l'expression est une activité intentionnelle qui remplit une fonction de communication, une fonction de traitement ou une fonction d'objectivation. Le discours est ce qui est exprimé dans une langue naturelle ou formelle. Tout discours dans une langue naturelle implique un propos, une organisation des propositions énoncées et des choix de formulations pour chacune des propositions énoncées.

a. Positions par rapport à l'expression et les deux types de pratique de l'écrit

Nous allons nous centrer sur l'expression en langue naturelle. Nous n'oublions pas que l'expression, en mathématiques, implique la mobilisation de plusieurs systèmes sémiotiques, et non pas d'un seul. Mais c'est dans la mobilisation de la langue naturelle que l'activité d'expression se révèle être la plus complexe malgré l'apparente «spontanéité» de la parole dans les échanges du type conversation ou débat. Car l'expérience montre qu'il est difficile de faire passer les élèves d'un usage familier de langue, limité et monofonctionnel, à une exploitation contrôlée des multiples fonctionnements discursifs qu'elle permet.

Il y a, pour un sujet, quatre positions possibles par rapport à l'activité d'expression en langue naturelle. Cela dépend non seulement du fait que c'est lui qui s'exprime ou qu'il doit appréhender ce qu'un autre sujet exprime, mais également de la modalité sensorielle dans laquelle s'effectue l'expression. Or pour chacune de ces quatre positions possibles, l'architecture cognitive des systèmes mobilisés n'est pas la même. Et, par conséquent, la conscience que le sujet peut prendre des opérations discursives, des unités de discours, de leur organisation et du «sens» ne peut pas être la même.

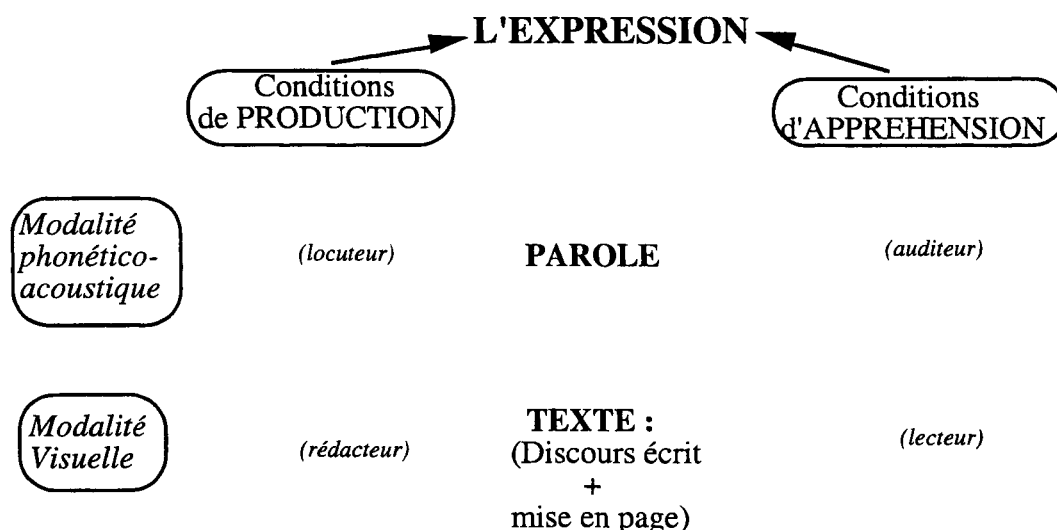


Figure 1. Les positions possibles d'un sujet par rapport à l'expression

Ce rappel des quatre positions possibles d'un sujet par rapport à l'expression n'a apparemment rien que de très trivial. Mais les réflexions précédentes doivent attirer notre attention sur les trois phénomènes fondamentaux qui y sont étroitement liés :

— (a) il y a un fonctionnement cognitif qui est spécifique à chacune de ces quatre positions par rapport à l'expression. Car la synergie des systèmes mobilisés par le fonctionnement cognitif n'est pas la même dans chacune des quatre positions possibles qu'un sujet peut avoir par rapport à l'expression. Il y a d'une part les positions complémentaires, potentiellement alternantes et réciproques, de locuteur/auditeur et, d'autre part, celles, non alternantes et non réciproques, de rédacteur/lecteur¹. Or chacun de ces fonctionnements spécifiques permet une

¹ Cette analyse des quatre positions possibles d'un sujet par rapport à l'expression ne doit pas être confondue avec l'analyse classique des situations de communication selon le schéma émetteur/recepteur (Jakobson 1970, p. 87, 90-92, 213-214). Car dans toute situation de communication verbale, un sujet doit être capable de se tenir à ces deux positions. Et le schéma de communication ne permet pas de différencier véritablement une communication fondée sur l'expression selon la modalité phonético-acoustique et une communication fondée sur la modalité visuelle

utilisation plus ou moins grande possible des capacités de traitement que donne une langue.

— (b) il y a une distance longue et difficile à franchir pour passer de l'expression en modalité phonético-acoustique («expression orale») à l'expression en modalité visuelle («expression écrite»). Cette distance est peut-être plus longue et plus difficile que celle que Vygotski a décrite (Vygotski 1985 p. 259-263; 360-368).

— (c) Dans le passage de l'expression orale à l'expression écrite, beaucoup de sujets en restent à un stade intermédiaire que nous avons appelé «**la pratique orale du texte**», et cela aussi bien dans la lecture que dans l'écriture (Duval 1995, p. 350-351). Cela veut dire que les élèves, vis-à-vis de l'expression écrite s'en tiennent aux fonctionnements cognitifs mobilisés par l'expression orale. Et cela peut être suffisant pour réussir scolairement. Cette conservation des fonctionnements propres au rapport à l'expression orale n'empêche pas l'accès à l'écrit, du moins en tant qu'objet culturel qu'un sujet doit être capable de plus ou moins bien utiliser dans différentes situations. Mais en rester à ces fonctionnements est totalement insuffisant pour acquérir la maîtrise de démarches intellectuelles théoriques comme, par exemple, la compréhension de la démonstration en mathématiques. Le passage d'une pratique orale des textes à une pratique écrite requiert un apprentissage qui favorise le fonctionnement cognitif propre à ce que nous pourrions appeler une «**pratique écrite des textes**».

On voit donc l'importance, pour un sujet, de pouvoir adopter, selon les exigences des situations rencontrées, l'une ou l'autre des quatre positions possibles vis-à-vis de l'expression et de ne pas s'en tenir seulement à deux, comme dans le cas d'une pratique orale des textes. Et dépasser ce que nous appelons le stade intermédiaire d'une pratique orale du langage écrit (aussi bien en lecture qu'en «écriture») est l'un des enjeux stratégiques des apprentissages scolaires au collège comme en début de lycée. Et cela ne concerne pas seulement l'enseignement du français mais également l'enseignement des mathématiques. Car, et c'est le point crucial pour répondre à la question centrale de notre propos,

— (d) le fonctionnement propre à la découverte de ce qu'est une démonstration ne peut se mettre en place chez un sujet que lorsqu'il accède à l'expression dans la modalité visuelle et non plus phonético-acoustique. En effet, c'est dans la position de rédacteur que les capacités de traitement que donne une langue sont le plus accessibles.

b. Les modifications de fonctionnement cognitif du sujet selon sa position par rapport à l'expression

Pour bien voir le caractère fondamental des phénomènes (b) et (c) que nous venons d'évoquer, il nous faut décrire, très globalement, les différences de fonctionnement cognitif qui modifient l'activité du sujet. Cela revient à analyser la nature des tâches, lorsque sa position par rapport à l'expression (a) change. Pour cette analyse nous retiendrons quatre aspects (en caractères gras dans la figure 2) :

1. Le premier aspect est celui **des deux contraintes temporelles liées à l'expression**. L'une concerne le rythme, c'est-à-dire la possibilité, ou non, de différer l'activité d'expression ou son appréhension (fluence ou intermittence). L'autre concerne la réversibilité, c'est-à-dire la possibilité, ou non, pour le sujet de revenir en arrière. En expression orale, les contraintes de fluence sont si fortes que toute interruption, fût-elle de quelques secondes, est ressentie comme une faiblesse de l'activité d'expression ou comme son arrêt. D'où, par exemple, tous les tics verbaux que l'on peut observer chez ceux qui apprennent à exposer sans le secours d'un texte ou de notes.

2. Le deuxième aspect est celui du **mode de disponibilité des unités discursives produites**. Le mode dépend évidemment de la modalité sensorielle de l'expression, phonétique ou visuelle : ce mode peut être exclusivement séquentiel comme dans la

modalité phonético-acoustique ou, au contraire, ouvert à la possibilité d'une appréhension simultanée dont le champ variera selon la base de connaissances dont les individus disposent.

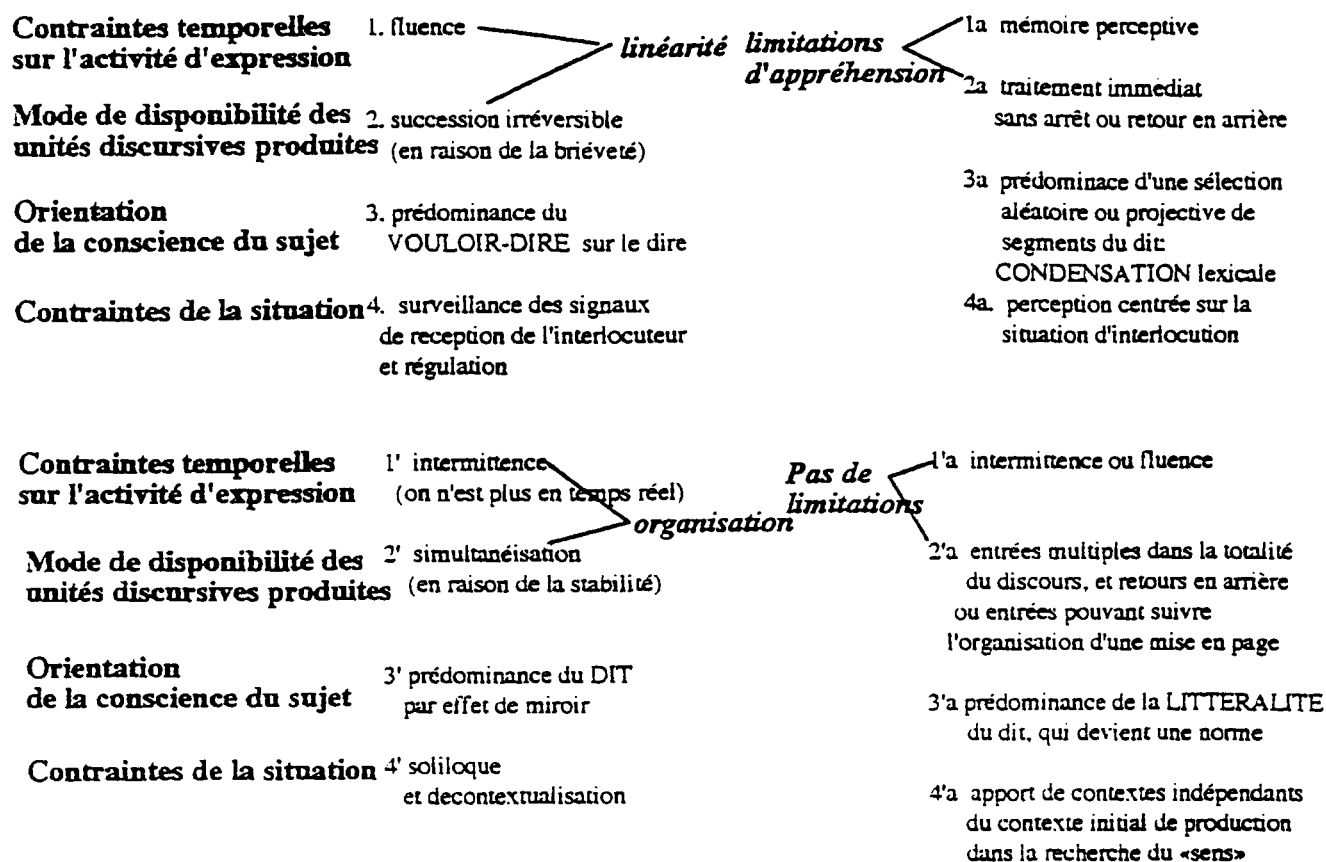


Figure 2. Caractéristiques du fonctionnement cognitif selon chacune des quatre positions possibles du sujet par rapport à l'expression. On notera que les caractéristiques, pour chacun des quatre aspects envisagés, correspondent à des propriétés de fonctionnement qui peuvent s'opposer entre elles. D'où les ruptures impliquées par les changements de position.

C'est la combinaison de ces deux aspects qui détermine les conditions **de maîtrise ou de contrôle dans l'effectuation** de l'acte d'expression ou de l'accès à la compréhension du discours.

En condition de fluence et de séquentialité (modalité phonético-acoustique), l'activité d'expression ne peut donner lieu qu'à un traitement local, sans retour en arrière et sans délai. *Traitement local*, parce que la totalité et l'organisation du discours en cours de formulation ne sont pas données : il y a oubli rapide de ce qui a été exactement dit et ce qui va être dit est incertain. *Sans retour en arrière*, parce qu'il n'y a pas de véritable reprise possible de ce qui vient d'être dit : pas d'annulation des paroles malheureuses. *Sans délai*, car l'expression orale ne tolère pas les interruptions prolongées, c'est-à-dire les silences se prolongeant seulement de quelques secondes... Ces caractéristiques déterminent la **linéarité de toute parole** et donc de tout discours oral.

Au contraire, les conditions d'intermittence et de simultanésation (modalité visuelle) ouvrent la possibilité d'un traitement global, ainsi que de tous les retours en arrière et tous les délais de réflexion dont le sujet, en position d'écriture ou de lecture, peut avoir besoin. *Traitement global* sans lequel, l'activité d'expression ne peut avoir de

prise sur l'organisation discursive. *Retours en arrière* permettant toutes les réélaborations selon la formule classique : «écrire, c'est réécrire». D'où les variations rédactionnelles que l'on peut observer à travers les variantes ou les versions successives d'un texte¹. *Délai*, laissant le temps à la recherche et aux choix des termes. Ce sont ces caractéristiques de fonctionnement qui **font échapper le discours écrit à la linéarité de toute parole**. Elles permettent à l'activité d'expression de «construire le discours» ; **l'écriture devient ainsi le lieu et le moyen d'une activité de contrôle de la pensée**. Elles permettent également d'utiliser systématiquement, voire de développer au maximum, toutes les possibilités syntaxiques et sémantiques d'une langue. Ce qui peut être résumé dans le tableau suivant :

| L'expression selon la modalité phoné- tico- acoustique | L'expression selon la modalité visuelle |
|--|--|
| <p>traitement <i>local</i></p> <p><i>Sans</i> retour en arrière</p> <p><i>Sans</i> délai</p> <p>entrée <i>unique et contrainte</i></p> | <p>Traitement <i>global</i></p> <p>retours en arrière</p> <p>délais</p> <p>entrées <i>multiples au choix</i></p> |
| <p>Linéarité de la parole</p> | <p>Le discours écrit échappe à la linéarité de la parole et donne un moyen de contrôle de la pensée</p> |

Figure 3.

On voit tout de suite pourquoi demeure la possibilité de continuer à se comporter vis-à-vis d'un écrit ou d'un texte de la même manière que l'on se comporte vis-à-vis de quelqu'un qui parle : on se contente d'un traitement local, sans retour en arrière et sans délai. On se contente de ce que l'on a retenu au terme d'un seul balayage effectué de façon rapide et ininterrompue. En face d'un texte, un lecteur doit avoir la possibilité d'adopter cette pratique orale de l'écrit ou au contraire la pratique écrite de l'écrit. Mais il semble que beaucoup d'élèves se tiennent à cette pratique et aient beaucoup de difficultés à entrer dans l'autre pratique dont, parfois, ils ne soupçonnent même pas l'existence.

3. Le troisième aspect est lié à **ce sur quoi la conscience du sujet se trouve dirigée** de façon prédominante. Cela peut être soit le **vouloir-dire** («l'intention significative qui n'est qu'un certain vide», Merleau-Ponty, Signes, 1960, p.113), soit le **dit** (ce qui est effectivement exprimé), soit la **littéralité** (les formes d'expression qui demeurent invariantes selon les interprétations possibles), soit les **mots-clés** (on procède par écrémage, ce qui implique des «moteurs d'inférence» fonctionnant plus de façon associative que selon des règles bien explicites).

Ce sont ces changements de prédominance qui sont essentiels pour pouvoir répondre à notre question centrale. **Il y a, en effet, des incompatibilités entre ces différentes prédominances, chacune étant liée à une position du sujet par rapport**

¹ D'où la nécessité de resituer dans un processus de variations rédactionnelles pour en faire une analyse cognitive.

à l'expression. Passer du vouloir dire à ce qui est effectivement dit constitue un saut qui implique, pour reprendre un terme piagetien, une véritable «décentration» du sujet par rapport à son vouloir dire. En d'autres termes, le passage du vouloir dire à l'effectivement dit implique un véritable «renversement» de perspective. Parallèlement, passer d'une pratique orale de compréhension et d'interprétation, laquelle repose sur la sélection de mots-clés et sur la condensation, à une pratique écrite fondée sur la littéralité, c'est-à-dire sur la prise en compte des formes d'expressions, des propositions, de leur organisation constitue également un saut qui implique une neutralisation de toutes les interprétations immédiates et une activité de contrôle que seule la disponibilité visuelle du discours ou du déjà exprimé rend possible. Et cela ne joue pas seulement pour l'expression des autres, disponible sous forme d'écrit, mais également pour sa propre expression.

Avec la prédominance visuelle de ce qu'il dit sur ce qu'il veut dire, un sujet accède à une image de son discours, un peu comme il peut accéder à l'image de son propre corps et de son visage. Cet accès peut jouer, dans la construction de la pensée du sujet, un rôle analogue à celui joué par la découverte et l'appropriation de l'image du corps dans la prise de conscience de soi. C'est en ce sens que nous pouvons parler d'un effet miroir de l'écriture. Cette image du discours ne doit pas évidemment être confondue avec l'image du texte résultant de la mise en page (la «fonction iconique» du texte dont parle Escarpit). En d'autres termes, l'écriture ne permet pas seulement une explicitation (ce que permet aussi la parole), elle conduit à une **désobjectivation de la pensée** en ce sens qu'*au cours de l'écriture, c'est le déjà écrit qui*

- devient la référence à la place du vécu, lequel porte le vouloir-dire, et à la place de la mémoire de travail laquelle est censée garder à l'esprit ce qui a déjà été effectué mentalement ou exprimé vocalement,

- libère de la nécessité d'une non interruption dans l'activité d'expression, non interruption nécessaire à l'expression orale pour laquelle le moindre arrêt provoque des «où en étais-je ?», «qu'est-ce que tu disais ?»...

Mais **cette désobjectivation de la pensée s'effectue d'abord personnellement dans la sphère privée** et, en ce sens, elle permet une véritable appropriation. La désobjectivation de la pensée relève d'un processus totalement différent de celui de l'interaction sociale à l'intérieur d'un groupe : elle constitue un processus d'**auto-interaction** permettant une fonction d'objectivation indépendamment de toute communication.

4. Le quatrième aspect concerne **la situation commandant l'activité d'expression**, cette situation étant intrinsèquement déterminée par deux facteurs. L'un concerne les raisons motivant l'activité d'expression : tâches imposées, problème à résoudre, apprentissage, curiosité, débat, échange... L'autre concerne la présence ou l'absence d'un interlocuteur (émetteur ou destinataire).

Ce deuxième facteur a été l'une des données sur lesquelles Vygotski s'est appuyé pour montrer la différence séparant le fonctionnement du langage écrit par rapport à celui du langage oral. La présence d'un interlocuteur, comme dans une conversation, implique un champ commun, mais provisoire, de référence. C'est cette présence qui favorise ce que Vygotski appelait un «abrègement» du langage oral par rapport au langage écrit et qui constitue, par son caractère interactif, une motivation pour l'expression orale.

C'est ce deuxième facteur qui a été également utilisé comme variable didactique dans les activités de messages téléphonés. Il s'agit, par exemple, de faire construire une figure de géométrie sans que celui qui donne les instructions puisse voir ce que fait le destinataire lorsqu'il met en œuvre les instructions reçues. Cela oblige à passer des conditions normales de l'expression orale spontanée à celles d'une communication par écrit dans laquelle il n'y a plus d'informations visuelles communes comme dans tout échange direct. Remarquons que cette variable didactique joue seulement sur la dissociation, dans une situation de communication, entre le moment de la production du discours et celui de sa transmission à autrui. Elle ne permet que très indirectement de faire basculer la prédominance du vouloir sur le dit.

Nous voyons donc tous les sauts et les renversements d'orientation que suppose un changement de position du sujet par rapport à l'expression. Et cela est particulièrement net lorsque le changement de position est lié à un changement de modalité sensorielle pour la production ou pour l'appréhension de l'expression. Mais cette description du fonctionnement cognitif propre à chacune des quatre positions montre également qu'on ne peut pas s'en tenir à une opposition formelle ou matérielle entre expression orale et expression écrite. Il y a en effet la possibilité pour le sujet, face à l'écrit comme objet culturel, d'en rester aux types de fonctionnement cognitifs qui sont nécessaires et suffisants pour l'expression orale en situation d'interaction verbale réelle (conversation, discussion, échanges dans un groupe, écoute de ce que dit l'enseignant...). **Dans ce cas, écrire c'est transcrire : on transpose, immédiatement ou de mémoire, la parole spontanée, la parole dictée... Et lire, c'est simplement reconnaître au premier coup d'œil : on effectue un parcours «courant» en relevant des mots-clés ou des expressions en fonction de schémas ou de situations déjà bien connus.** Bref, c'est la pratique antérieure de l'expression orale qui délimite alors le champ de la compréhension possible pour un lecteur et/ou celui de ce qu'il peut écrire. Le rapport à l'expression écrite n'a plus alors pour fonction que de retrouver, de confirmer. Il ne peut permettre d'ouvrir des champs nouveaux d'exploration. **Entre l'expression orale et l'expression écrite, il y a ce stade intermédiaire de la pratique orale du texte.**

En résumé, s'il y a un premier saut à franchir comme le soulignait déjà Vygotski pour passer d'une pratique purement orale et prégraphique du langage à une pratique orale du langage écrit, **il y a un autre saut tout aussi difficile pour passer d'une pratique orale du langage écrit à une pratique écrite des textes.** Les raisons de la difficulté de ce second saut sont faciles à apercevoir. Car les contraintes cognitives qui pèsent sur l'expression sont plus importantes dans la modalité visuelle que dans la modalité phonético-acoustique. Et cela explique le décalage important que l'on peut observer entre le niveau de performances des élèves en expression orale et en expression écrite, décalage qui subsiste bien longtemps après la période de l'enseignement primaire.

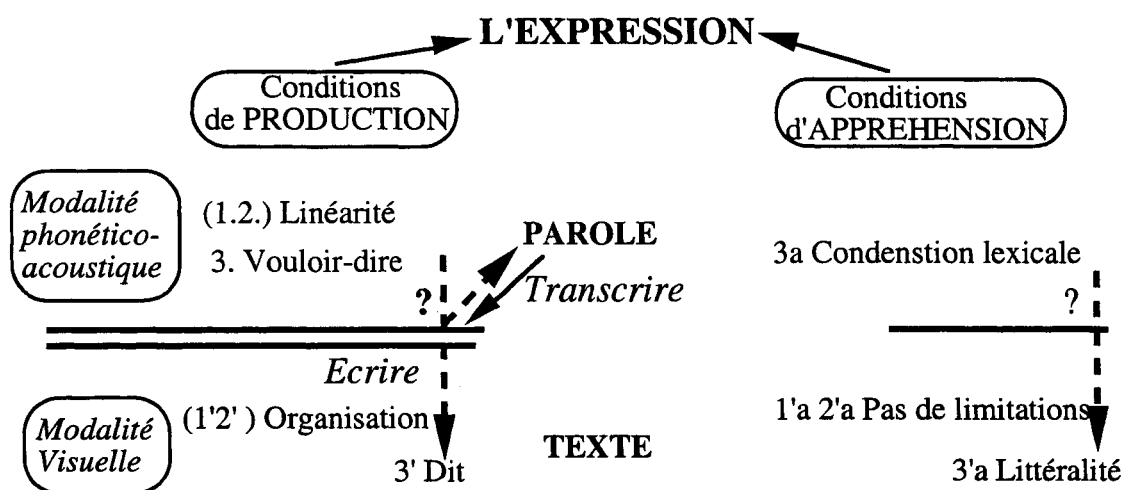


Figure 4. L'ambiguïté des deux types de pratique de l'écrit et du texte : le changement de modalité (phonético-acoustique ou visuelle) dans l'expression n'entraîne pas nécessairement un changement dans les conditions de production ou d'appréhension pour le sujet. Le passage d'une pratique orale de l'écrit à une pratique écrite de l'écrit implique un changement complet d'attitude dans la mesure où il requiert des traitements plus longs et plus coûteux.

Pourquoi le passage d'une pratique orale de l'écrit à une pratique écrite du texte est-il si important pour les apprentissages intellectuels ? La réponse apparaît maintenant relativement précise. En modalité visuelle, l'expression ne remplit pas prioritairement

une fonction de communication, tandis que cette fonction est, au contraire, dominante en modalité phonético-acoustique car l'expression y est toujours plus ou moins liée à une interaction sociale en temps réel. En modalité visuelle, l'expression permet de remplir des fonctions de traitement et d'objectivation, car **c'est seulement dans cette modalité que peuvent être utilisées toutes les possibilités de traitement qu'une langue, ou plus généralement un système sémiotique, offrent.** En d'autres termes, la pratique écrite de l'écrit, et plus particulièrement l'écriture comme activité d'expression, est la condition pour une prise de conscience par le sujet de démarches intellectuelles qu'il aurait, autrement, beaucoup de mal à discriminer ou à différencier.

L'écriture affranchit des limitations de l'expression orale. Limitations de la quantité d'informations pouvant être prise en compte dans la seule production mentale. Limitations aussi dues aux centrations de l'attention sur des mots-clés (substantifs, adjectifs) au détriment des propositions et leurs relations. L'écriture permet ensuite un **contrôle** des différentes opérations discursives que l'on effectue : contrôle de la référence aux objets contre les dérives de la condensation lexicale, explicitation des multiples substitutions d'«expressions» les unes aux autres qu'implique tout discours, organisation ou réorganisation de la suite des propositions... L'écriture permet aussi une **exploration** systématique de toutes les associations qu'une langue permet d'effectuer, de toutes les combinaisons qu'ouvre un système de représentation. Bref, l'écriture ouvre la dimension de la «**composition**», selon le sens que prend ce terme en peinture comme en musique. C'est pourquoi l'écriture d'un texte peut être à la fois le lieu d'une «expérience mentale» ou celui d'une création.

III. Des degrés de liberté rédactionnelle pour les textes de démonstration

La question «qu'est-ce qu'un texte de démonstration ?» peut paraître embarrassante car elle ne semble pas avoir de réponse unique ou définitive. En effet, pour être en mesure d'avancer une réponse à cette question, il faut prendre en compte plusieurs types de données. Non seulement des données d'ordre historique car les exigences théoriques concernant la démonstration se sont développées avec les mathématiques. Ou encore les données propres à l'état des problèmes et des recherches dans chaque domaine des mathématiques. Mais également des données d'ordre cognitif concernant les registres de représentation mobilisés pour effectuer la démonstration...

C'est donc plus dans une perspective d'apprentissage en formation initiale que nous allons aborder cette question. Et, dans cette perspective d'apprentissage, le registre de la langue naturelle est fondamental, du moins pour une prise de conscience de la manière dont une preuve théorique peut fonctionner. Nous entendons par preuve théorique une preuve qui s'appuie *sur les ressources d'un raisonnement valide* et non sur les données recueillies à l'aide de dispositifs instrumentaux et expérimentaux plus ou moins complexes comme cela s'avère nécessaire pour les problèmes portant sur l'existence ou non de la glace sur la lune, par exemple, ou pour les problèmes soulevés par la connaissance du fonctionnement du cerveau ! Dans cette perspective d'apprentissage, une importance particulière doit être donnée à l'expression en langue naturelle, même si cette importance peut apparaître anachronique d'un point de vue scientifique, ou technique. En effet, on ne calcule pas en langue naturelle et, avec la langue naturelle, on semble se fermer des domaines importants des mathématiques à commencer par l'analyse. Mais commence-t-on l'analyse au collège ?

Si le recours à la langue naturelle est essentiel, ce n'est pas en raison de la spontanéité de l'expression linguistique en modalité phonético-acoustique, c'est parce qu'il oblige à une **explicitation d'opérations d'organisation et de hiérarchisation de propositions** qui, autrement, restent masquées dans l'homogénéité des écritures purement symboliques permettant un «calcul». On ne saurait, pour autant, se masquer la difficulté d'un contrôle de la validité d'un raisonnement en langue naturelle : existe-t-

il des marques permettant de reconnaître un texte de démonstration indépendamment des marques externes du dispositif de mise en page (insertion de titres, de rubriques ou d'autres marques permettant au lecteur de se repérer avant lecture) ? Ce sont ces deux points que nous allons maintenant rapidement aborder.

a. Les spécificités cognitives d'un raisonnement effectué dans le registre de la langue naturelle

Pour comprendre les raisons de l'importance d'écrire dans sa langue pour entrer dans une démarche intellectuelle de démonstration, il suffit de regarder la différence radicale de fonctionnement cognitif entre un raisonnement conduit dans le registre d'une langue naturelle et un raisonnement conduit dans un registre d'écriture symbolique.

- dans le registre d'une langue naturelle, le raisonnement implique *la prise en compte explicite du statut des propositions et de leur valeur épistémique*. C'est seulement à partir de cette prise en compte qu'**un raisonnement peut fonctionner comme raisonnement pour un sujet**. Et, dans une langue naturelle, le statut de propositions comme leur valeur épistémique font partie du «sens» des propositions (voir annexe 1).

- au contraire, en dehors du registre d'une langue naturelle, par exemple dans un registre d'écriture littérale ou d'écriture algébrique, une prise en compte constante des statuts des propositions et de leur valeur épistémique n'est plus nécessaire à chaque pas du raisonnement. Ce qui importe, *ce sont seulement les règles d'emploi et de substitution assignées aux symboles* d'opérations ou aux symboles de variables et d'inconnues.

D'un point de vue technique, les mathématiciens préfèrent les raisonnements conduits à l'aide d'une langue formelle et d'écritures symboliques à ceux développés dans le registre de la langue naturelle. Et les mathématiques enseignées privilégient très rapidement ces registres d'écriture au détriment de raisonnements conduits dans la langue naturelle. Ce qui correspond à la logique du développement des mathématiques. Mais négliger, dans l'enseignement des mathématiques, les raisonnements conduits en langue naturelle, c'est-à-dire des raisonnements impliquant la prise en compte des statuts de propositions au seul profit de raisonnements ne demandant que l'application de règles liées à des symboles ou à des suites de symboles, c'est exclure de l'enseignement ce que les mathématiques peuvent apporter à une compréhension générale des différentes formes de discours, à savoir la découverte des différents mécanismes d'expansion discursive qui les sous-tendent ! Et, de ce fait, c'est exclure ce qui est l'un des apports fondamentaux des mathématiques à la formation intellectuelle initiale comme à l'intelligibilité de réelles démarches théoriques, par delà l'acquisition de techniques mathématiques particulières.

b. Les difficultés de l'appréhension et du contrôle de la validité d'un raisonnement en langue naturelle

Pour bien situer le problème, il faut se poser la question : à quoi reconnaît-on qu'un texte présente une démonstration (ou un raisonnement) par rapport à des textes qui présentent une explication, une description.... Uniquement par les titres, par la présence de connecteurs dits «logiques» ? Pour répondre nous allons simplement rappeler ici les points principaux que nous avons souvent exposés et développés (Egret 1989, Duval 1991b, 1992, 1993, 1995).

(1) Le raisonnement mobilisé par les démonstrations effectuées en langue naturelle repose sur une organisation déductive du discours.

(2) L'organisation déductive du discours se fait à travers l'articulation de deux niveaux d'organisation, chacun correspondant à un mécanisme particulier de dérivation.

(2.1) Il y a un premier niveau d'organisation déductive qui met en jeu *un mécanisme d'expansion discursive n'ayant rien de naturel dans la pratique ordinaire du langage*, y compris dans la pratique argumentative spontanée (ce mécanisme est explicité dans la règle du *modus ponens*, règle qui requiert que les énoncés-tiers aient une organisation interne implicative).

(2.2) Il y a un second niveau qui *enchaîne des pas de raisonnement et non pas des propositions*, l'enchaînement se faisant par le recyclage de la conclusion d'un pas antérieur comme prémisses d'un nouveau pas.

(3) Cette organisation déductive à deux niveaux de fonctionnement repose exclusivement sur la valeur épistémique et sur le statut (opérateur et théorique) des propositions. **Et le statut d'une proposition ne peut être appréhendé que dans le contexte de l'organisation discursive où elle trouve sa place.** Car tout statut est relatif à une organisation. On ne peut donc définir (resp. comprendre) un statut sans décrire (resp. découvrir) le fonctionnement correspondant à cette organisation.

(4) La langue naturelle offre différents moyens pour marquer, c'est-à-dire pour expliciter, le statut des propositions dans un discours... Les connecteurs «logiques» ne sont donc pas indispensables. Et s'ils sont utilisés, ils ne jouent pas le même rôle que dans une argumentation de type rhétorique.

En conclusion un texte de démonstration ne peut être identifié comme texte de démonstration que par celui qui en comprend la démarche. Comment faire prendre conscience de ce que cette démarche d'expansion discursive peut avoir de spécifique par rapport à celles spontanément mise en œuvre dans l'expression orale ?

IV. Ecriture d'un texte et prise de conscience de l'organisation d'un discours et des exigences d'une démarche de raisonnement

Nous pouvons nous rappeler cette formule révélatrice souvent employée au terme d'une phase de recherche : «il n'y a plus qu'à rédiger». Elle indique bien que l'on pense que l'essentiel de la compréhension est nécessairement acquis au cours de la phase de recherche et que la phase de rédaction vient seulement expliciter et fixer ce qui a été compris. Certes, on est prêt à admettre que la tâche de rédaction ne peut avoir le même sens pour un élève qui n'est pas encore capable de se mettre dans l'une des quatre positions possibles par rapport à l'expression et pour un sujet expert qui le peut. Mais on sous-entend souvent que cela porte uniquement sur un «plus» de présentation qui dépend d'une «habileté» plus ou moins acquise pour «formuler» ! **On ne conçoit pas que cette phase de rédaction puisse avoir un effet rétroactif de découverte ou de compréhension nouvelle par rapport à ce que l'on croyait avoir compris lors de la phase de recherche.** Car lorsque la discussion a permis de repérer les théorèmes à utiliser pour démontrer et que les élèves pensent «avoir vu» ou compris les explications orales correspondant à la solution mathématique, comment imaginer qu'ils puissent ne pas avoir réellement perçu le fonctionnement des démarches qui font qu'une démonstration prouve ? Toutes les observations que nous avons pu faire, au niveau du collège, montrent que c'est pourtant presque toujours le cas. Et pour cause. Car c'est seulement au niveau de la modalité visuelle de l'expression que la complexité de l'organisation déductive du discours peut réellement être discriminée.

Pour comprendre ce point capital, il faut rapprocher l'analyse du fonctionnement cognitif du raisonnement déductif et celle de l'expression dans chacune des positions possibles d'un sujet. On peut alors voir que le fonctionnement propre à l'organisation

déductive d'un discours est si spécifique et si complexe (propositions (2) et (3) ci-dessus) qu'il faut qu'un élève puisse s'affranchir des différentes limitations liées à l'activité orale pour pouvoir en prendre conscience. Et cela est d'autant plus indispensable que les marques linguistiques d'un raisonnement sont variables : on emploie souvent les mêmes connecteurs dans un raisonnement mathématique que dans une argumentation rhétorique (proposition (4) ci-dessus), alors qu'ils n'y jouent pas le même rôle. On voit également qu'il faut passer d'une activité orale d'expression à une activité écrite pour réaliser **ce déplacement de fonction méta-discursive sans lequel il n'y aura pas ce changement nécessaire des opérations discursives pour produire un discours mathématique** (Duval 1995, p. 90-93). Car la production de ce type de discours n'est plus commandée par des besoins de communication mais par la nécessité d'une expansion discursive valide des énoncés dans le cadre d'une axiomatique locale.

Il apparaît donc essentiel que les élèves se retrouvent en position d'écriture ou de rédaction d'un texte de démonstration pour avoir une chance de prendre conscience de ce qu'est une démonstration. C'est seulement dans cette position qu'il peuvent réaliser que la démonstration est «dans l'âme» selon la belle expression d'Aristote. Et cela est d'autant plus essentiel que l'on a des raisons d'estimer que la plupart des élèves de collègues ne sont pas encore parvenu au stade d'une pratique écrite de l'écrit !

La réponse qui se dégage de ce rapprochement semble aller contre une certaine évidence introspective pour un adulte enseignant les mathématiques. Pour celui qui est parvenu au stade d'une pratique écrite de l'écrit, il ne semble guère y avoir de différence entre l'expression orale et l'expression écrite, au moins dans le cas des démonstrations qui ne sont ni longues ni complexes... Mais il ne faut pas oublier le caractère acquis de cette évidence introspective. Elle résulte du fait, non remarqué, que **l'accès à la pratique écrite de l'écrit modifie peu à peu le rapport du sujet à son activité d'expression orale, du moins dans les domaines où le sujet a pu développer une pratique écrite des textes**. Est-ce la cas des élèves en formation initiale ?

Indépendamment de cela, on ne saurait oublier que le développement des mathématiques est lié à une utilisation des systèmes sémiotiques selon la modalité visuelle et non selon la modalité phonético-acoustique. **En d'autres termes, les mathématiques et, en particulier, le raisonnement en mathématique, relèvent de l'écriture et non pas de la parole**. L'opposition souvent faite entre mathématiques et langage naturel n'est peut-être qu'une formulation maladroite de l'opposition entre le fonctionnement cognitif de l'expression en modalité visuelle et celui de l'expression en modalité phonético-acoustique. Enfermer les élèves dans la seule pratique orale, c'est leur fermer la voie d'un développement de l'activité mathématique.

V. L'apprentissage de l'écriture de textes

Nous retrouvons maintenant les deux grands problèmes concrets de l'enseignement. Le premier problème est un problème d'apprentissage. Il dépasse largement le cadre de l'enseignement des mathématiques : comment faire apprendre à écrire des textes ? Problème que l'on renvoie généralement au professeur de français et aux rédactions «littéraires» dans lesquelles la première difficulté de beaucoup d'élèves est de savoir «**quoi dire**» ou «**quoi raconter**». Or, paradoxalement, l'enseignement des mathématiques peut contribuer, efficacement et de manière originale, à cet apprentissage de l'écriture des textes par l'écriture de textes de démonstration. Le deuxième problème est davantage un problème d'évaluation : qu'est-ce qui doit nécessairement être formulé pour être en présence d'un texte acceptable de démonstration et qu'est-il important de voir s'exprimer pour être sûr qu'un élève a compris ? Ces deux questions se recouvrent sans être identiques.

a. Le problème d'apprentissage

Pour pouvoir bien poser le problème de l'apprentissage de l'écriture des textes, il faut partir d'un phénomène important, relativement facile à observer, mais qui a trop peu retenu l'attention jusqu'ici. Pour observer ce phénomène, il faut prendre en compte les données dont un sujet peut disposer au départ d'une activité d'écriture. Et il ne faut pas considérer comme données ce que le sujet pourrait retrouver par un effort de remémoration ! Écrire et se remémorer ne sont pas des activités de même nature. Ce phénomène peut être décrit à travers deux types d'observations :

- on n'obtient pas du tout les mêmes textes selon que les élèves ont, ou n'ont pas, une représentation sémiotique déjà disponible de ce qu'ils doivent décrire ou expliquer ;
- dans le cas où ils disposent d'une telle représentation, la production d'un texte change selon la congruence ou la non congruence de la représentation sémiotique disponible par rapport à l'organisation du contenu cognitif à décrire ou à expliquer.

Cela veut dire que l'activité d'expression et la tâche d'écriture changent complètement selon les conditions de départ. Et ce changement se traduit par la production de textes totalement différents dans le degré d'explicitation et d'organisation.

On aura remarqué que nous venons de réintroduire la notion de texte alors que, jusqu'à présent, nous nous en tenions à l'activité d'expression. En quel sens pouvons nous maintenant parler de texte, et quelle relation précise peut-il y avoir entre expression et texte ?

Nous avons vu le caractère nécessairement double de l'expression : elle est à la fois l'activité intentionnelle d'un sujet à travers un système sémiotique, mais elle aussi une manifestation qui prend une forme et un contenu indépendants du sujet et liés au système mobilisé (*supra* II). Le texte ne peut donc être d'une certaine manière que cette manifestation en tant que devenue complètement indépendante du sujet. Mais s'en tenir à cette assimilation immédiate serait trompeur. Car ce serait confondre une pratique orale de l'écrit avec une pratique écrite de l'écrit. Écrire, d'une certaine manière, ce n'est pas transcrire mais réécrire comme cela est souvent répété. En d'autres termes, l'écriture implique des variations et des réorganisations rédactionnelles. Le texte est d'une certaine façon le dernier état décidé par le sujet dans ce **processus de transformation rédactionnelle qui fonctionne d'une certaine manière par récursivité, récursivité qui oblige à réagir au discours produit en tant qu'expression et non en tant que communication** (Duval 1995, p. 332-333). C'est en ce sens que nous avons parlé plus haut d'«auto-interaction». L'activité d'expression écrite est donc intrinsèquement liée à ce processus de transformation rédactionnelle, et la régulation de cette activité se fait par ajustement entre l'organisation rédactionnelle d'un état d'écriture et l'organisation liée aux objets de connaissance, dont le sujet peut déjà avoir ou ne pas avoir une représentation sémiotique, celle-ci s'avérant à son tour congruente ou non-congruente ! C'est dans cette perspective que nous avons tenté de définir le texte comme **l'interaction entre deux niveaux d'organisation** (Duval 1991a). Tout ce fonctionnement complexe de la production d'un texte par un sujet peut être représenté dans le schéma de la figure 5 ci-dessous.

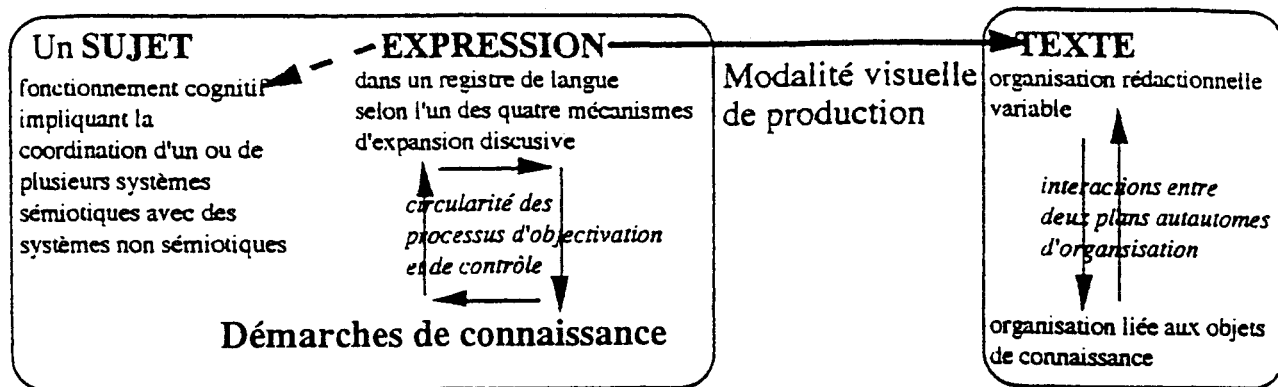


Figure 5 Généalogie cognitive d'un texte

C'est ce lien vital entre l'activité propre d'expression d'un sujet et l'état rédactionnel d'une version reflétant comme l'image d'une démarche accomplie (explication, raisonnement...) qui doit être pris en compte si l'on veut faire apprendre aux élèves à rédiger des textes non littéraires. Et c'est pour prendre en compte ce lien que le recours à des graphes propositionnels a été utilisé. Mais la façon de recourir à des graphes et le rôle qu'ils jouaient par rapport à l'écriture de textes de démonstration n'ont pas toujours été bien perçus. Aussi faut-il rappeler les trois conditions nécessaires de leur utilisation.

- Le graphe est le *lieu d'une exploration et d'une découverte par l'élève* des deux niveaux de fonctionnement propres à une organisation déductive et de la manière dont ils s'articulent. Aussi est-il important que ce soit l'élève lui-même qui construise le graphe propositionnel et que ce soit lui qui découvre que la construction du graphe se fait et se contrôle uniquement en prenant en compte le statut opératoire des propositions. Cela est important, car la découverte du fonctionnement d'un pas de déduction ne peut se faire que dans le contexte d'un enchaînement de pas et non pas isolément (*supra* proposition (2)). Il s'agit là d'un véritable travail sur l'organisation déductive du discours. Et c'est dans ce travail que l'élève peut découvrir que le raisonnement valide met en jeu *un mécanisme d'expansion discursive qui n'est pas celui mis en œuvre dans le discours oral spontané ou même dans les argumentations rhétoriques* (Duval 1995, p.129).

- Cette découverte ayant été faite, la rédaction d'un texte peut alors être demandée sous la forme d'une *description de ce que l'élève a construit sous forme de graphe*. C'est à ce niveau que vont spontanément s'expliciter les valeurs épistémiques, lesquelles vont se trouver naturellement associées aux statuts opératoires. Cette seconde condition est également importante car le «sens», et donc la possibilité d'une conviction, ne se découvre que dans l'expression et celle-ci ne peut être qu'un acte propre des sujets et non pas la répétition de formulations, fussent-elles exactes ou fussent-elles celles à laquelle il faudra arriver par économie ou par commodité.

- Les élèves doivent pouvoir se trouver dans une *situation où le processus de transformation rédactionnelle ne soit pas bloqué*. Leurs «textes» vont alors progressivement évoluer de formes d'expression jubilatoires, lors de leurs premières prises de conscience du fonctionnement du raisonnement, à des formes plus économiques et plus canoniques. Mais attention ! le processus de transformation rédactionnelle ne se déroule pas à l'échelle temporelle d'une heure, d'une séance de classe ou d'un devoir, il se déroule à l'échelle temporelle de plusieurs semaines. **Cela veut dire que les premières versions ne doivent pas être considérées comme des textes ni par l'enseignant ni par les élèves eux-mêmes.** Et c'est peut-être ce dernier point qui est le plus délicat.

C'est cette décomposition de l'activité d'expression en deux grandes phases, celle d'élaboration exploratoire et organisatrice de représentations non-discursives et celle de description de ces représentations, qui permet de diminuer la charge cognitive due à la diversité des aspects à prendre en compte pour comprendre et

formuler le déroulement d'une démarche de démonstration. On voit alors pourquoi c'est à partir de l'écriture d'un texte, et non pas à partir d'un texte, qu'un élève peut véritablement comprendre. Et on voit également pourquoi **écrire est aux antipodes de cette activité qui consiste à sélectionner des morceaux préécrits, autrement dit à remettre dans l'ordre les propositions d'une démonstration que l'on aurait préalablement mélangées comme les cartes d'un jeu, ou encore à trouver des propositions manquantes parmi des propositions données !**

b. Le problème d'évaluation : ne pas mettre sur le même plan les lacunes et les dysfonctionnements explicites

Force est de constater que *de facto* le problème d'évaluation occulte souvent le problème d'apprentissage. Car très vite la question «qu'est-ce qui doit nécessairement être formulé pour être en présence d'un texte acceptable de démonstration ?» vient au premier plan. Certes, il ne s'agit pas de sous-estimer l'importance de cette question. Mais une telle question est indépendante du problème de l'apprentissage. Et si on la pose dans un contexte d'apprentissage, elle doit être associée à cette autre question : «qu'est-il important de voir s'exprimer pour être sûr qu'un élève a compris ?». Les réponses que l'on peut avancer pour cette deuxième question vont en grande partie dépendre de la manière dont on comprend les processus d'apprentissage.

Si l'on privilégie la première de ces deux questions, on aura tendance à chercher le degré d'explicitation minimal pour les pas et, à l'intérieur de chaque pas, pour les propositions¹. Mais tant que l'explicitation maximale n'a pas été réalisée au moins une fois, on ne peut pas être sûr soit que la démonstration est vraiment une démonstration soit que l'élève ait compris. C'est tout le problème des «**lacunes**» qu'on ne remarque pas tout de suite ou que l'on ne peut pas remarquer tout de suite. L'histoire des mathématiques peut illustrer cela de multiples manières.

Si l'on s'en tient au niveau de l'enseignement au collège, *il est difficile de trancher entre une explicitation minimale et une explicitation maximale*. Ainsi, le souci nécessaire qu'il n'y ait pas de «lacunes», parfois non immédiatement décelables, conduit-il à la question de savoir s'il faut exiger l'explicitation de pas «anodins». Un travail effectué à l'IREM de Clermont-Ferrand (Noirfalise 1997) illustre bien cette difficulté didactique qui apparaît lors de l'évaluation, en montrant les choix partagés tant du point de vue des enseignants que de celui des élèves. La ligne de partage ici ne sépare pas les experts et les novices. En fait, ce choix dépend de la base des connaissances mathématiques des sujets.

Si l'on privilégie maintenant la deuxième de ces deux questions, on voit alors la nécessité de prendre en compte les conditions d'apprentissage relatives à *l'écart évolutif entre l'expression et le texte* ainsi que le premier seuil à franchir pour comprendre comment une démonstration prouve.

Parmi les conditions d'apprentissage, nous avons indiqué le fait que les élèves doivent pouvoir se trouver dans une situation où le processus de transformation rédactionnelle ne soit pas bloqué. Très concrètement, cela veut dire que le «premier jet», la première rédaction, n'a pas à prendre le statut de texte, et ne doit donc pas être corrigé par l'enseignant ou être placé sous son contrôle : ils doit être vu comme l'amorce pour une réécriture. Cette réécriture ne peut pas être immédiate - car le sujet encore dans une pratique orale de l'écrit reste encore sous la prégnance de son vouloir-dire et ne peut se décentrer pour voir ce qu'il a dit - mais elle doit se faire après une durée qui aura permis au sujet d'oublier ce qu'il voulait dire.

¹ Un texte de démonstration laisse beaucoup de degré de liberté par rapport à une explicitation complète (Duval et Egret 1993, p.127-128). Et cette variabilité rédactionnelle peut être observée à l'intérieur d'un même texte de démonstration dans n'importe quel manuel.

Lorsque les élèves sont parvenus à un stade d'élaboration où ils considèrent que leur rédaction peut prendre le statut de texte, alors seulement il peut y avoir une intervention de l'enseignant. L'analyse du texte doit d'abord porter sur le fait qu'ils ont pris conscience ou non de la manière dont fonctionne un raisonnement valide. Très concrètement, cela veut dire que dans l'évaluation, **il ne faut pas mettre sur le même plan des lacunes manifestes et des dysfonctionnements explicites** (confusion des hypothèses avec des conclusions., par exemple, mauvaise utilisation d'un théorème pertinent pour la démonstration...). Ces dysfonctionnements explicites sont l'indice qu'un sujet n'a pas encore différencié les différentes formes de raisonnement et leurs fonctionnements explicites. Ce sont donc ces dysfonctionnements explicites qui doivent d'abord être pris en compte, à ce moment de l'apprentissage, et non pas les lacunes. Et c'est en ce sens que nous avons conçu une grille d'observation permettant de suivre l'entrée des élèves dans la prise de conscience de ces différences de fonctionnement (Duval 1995, p. 317-321). Naturellement il ne s'agit pas de négliger l'importance des lacunes. Mais un élève qui n'a pas encore pris conscience de la manière spécifique dont fonctionne un raisonnement déductif valide ne peut pas percevoir pourquoi une lacune est une lacune et donc il ne peut pas percevoir que les morceaux de raisonnements séparés par cette lacune ne peuvent pas constituer une démonstration.

Tout cela prend du temps et tout cela peut prendre d'autant plus de temps qu'il faut parallèlement entrer dans une pratique écrite de l'écrit. Cette entrée, décisive pour la prise de conscience des démarches intellectuelles devrait être un objectif majeur de l'enseignement et ne plus être implicitement considéré comme ce que les élèves devraient déjà savoir du seul fait qu'ils «savent lire et écrire».

Références bibliographiques

- Barthes R. 1985. Texte. *Encyclopedia Universalis*. Paris
- Chartier A.M. et Hébrard J. 1989. *Discours sur la lecture (1880-1980)*. Paris : Centre Pompidou.
- Histoire de la lecture dans le monde occidental* sous la direction de. G. Cavallo et R. Chartier. Paris ; Seuil 1997.
- Duval R. 1991a, Interactions des niveaux de représentation dans la compréhension des textes, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 4, p.165-198.
- Duval R. 1991b, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration, *Educational Studies in Mathematics.*, 22, 3, p.233-261.
- Duval R. 1992, Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x* n°31, 37-61.
- Duval R. 1995, *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang : Berne
- Duval R. et Egret M.A. 1993, Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères*, 12, p. 114-140.
- Egret M.A. 1989. Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 2, p. 4165.
- Éscarpit R., 1973. *L'écrit et la communication*. Paris : P.U.F.
- Goody J., 1994. *Entre l'oralité et l'écriture* (trad.). Paris : P.U.F.
- Jakobson R., 1970 (1960-1961) *Essais de linguistique générale* (tra.). Paris : Le Seuil.
- Labarre A., 1994. *Histoire du livre*. Paris : P.U.F.
- Merleau-Ponty M., 1960. *Signes*. Paris : Gallimard.
- Noirfalise R., 1997. Une étude sur le maniement d'énoncés dans une démonstration. *Petit x* n° 46, p. 5-17.
- Vygotski L.S., 1985 (1934). *Pensée et langage*. Paris : Editions sociales.
- Ratio Studiorum. Plan raisonné et institution des Études dans la compagnie de Jésus*. Ed. Demousquier et Dominique Julia. 1997 Paris : Belin (Coll. Histoire de l'Éducation)

ANNEXE

