

HANÈNE ABROUGUI-HATTAB

Difficultés d'élèves dans un problème de démonstration en géométrie

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 191-207

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998__S4_191_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIFFICULTES D'ELEVES DANS UN PROBLEME DE DEMONSTRATION EN GEOMETRIE

Hanène Hattab Abrougui

Introduction

Dans l'enseignement de la géométrie, les élèves apprennent, durant leur scolarité primaire, à faire des constructions et des mesures et à effectuer des calculs sur ces constructions. Ensuite et à partir de la 6ème¹, ils commencent à apprendre à élaborer une activité plus abstraite, dans laquelle ils doivent être capables d'interpréter le dessin en termes géométriques, en se basant sur des connaissances de type géométrique. C'est surtout en 4ème que ce type d'activité est développé et devient essentiel : l'élève commence l'apprentissage de la démonstration en géométrie. Ainsi, la notion de démonstration est introduite, dans l'enseignement, à travers la géométrie. Mais le passage à un tel type d'activité pose un problème aussi bien à l'élève qu'à l'enseignant. En effet, le fait de demander à l'élève une justification des résultats, conformément à la théorie de la géométrie euclidienne, ne lui paraît pas être une nécessité mais s'impose à lui comme une exigence du contrat didactique.

Le problème que pose l'apprentissage de la démonstration a suscité notre intérêt. Nous nous sommes alors proposés d'examiner les types de difficultés que rencontrent les élèves dans l'élaboration d'une démonstration et ceci auprès d'élèves tunisiens du niveau de 4ème (équivalent 3ème française). Nous envisageons de faire cette étude en recherchant les types d'explications que donnent les élèves pour le passage d'une hypothèse à une conclusion, dans un pas de la démonstration. Ce type d'étude est possible à l'aide d'un QCM proposé aux élèves, comportant un problème et sa démonstration, rédigée correctement, mais à laquelle il manque, dans chaque arc transitif de substitution², la règle d'inférence³ (Duval et Egret, 1989 ; Duval, 1992-1993). Les choix dans l'élaboration du QCM seront explicités dans le paragraphe suivant. Nous estimons que ce questionnaire, vu les types de réponses que nous avons proposés, nous apportera des éléments d'interprétation sur certaines démarches et procédures que les élèves utilisent dans la rédaction d'une démonstration en géométrie. En particulier, il permettra de repérer certaines justifications erronées données par les élèves au passage d'une hypothèse à la conclusion et engendrant des erreurs dans la résolution des problèmes.

Dans cet article, nous allons présenter, dans ses détails, la façon avec laquelle nous avons procédé pour élaborer le QCM en expliquant, à chaque fois, les raisons des choix adoptés.

Dans la deuxième partie, nous allons décrire comment s'est déroulé l'atelier proposé au colloque et nous présenterons les résultats issus de l'activité des participants à l'atelier.

¹ Pour simplifier, les niveaux sont indiqués, sauf mention expresse, en référence à l'enseignement français.

² L'unité fonctionnelle de toute organisation déductive,

³ ou l'énoncé tiers : pris dans un corpus déterminé de définitions et de théorèmes déjà construit théoriquement.

Elaboration du QCM

Dans cette partie, nous expliciterons les raisons de nos choix méthodologiques dans l'élaboration du QCM.

Nous expliquerons d'abord pourquoi nous avons choisi un questionnaire à choix multiples, ensuite nous exposerons les choix relatifs à sa construction.

Choix du type de questionnaire

Nous avons préféré un questionnaire à choix multiples où l'élève doit compléter une démonstration écrite plutôt qu'un questionnaire où l'élève donne son avis sur la démonstration et ses difficultés car nous pensons qu'une telle approche permet de mieux cerner certaines difficultés de l'élève dans la rédaction d'une démonstration en géométrie et ceci à travers l'étude de démarches et procédures effectives de l'élève, alors que l'avis de ce dernier sur la démonstration ne fournit pas précisément ce que nous recherchons. Nous estimons, en effet, qu'il y a un risque de décalage entre le "faire" et les déclarations sur le "faire".

Par ailleurs, nous avons préféré un questionnaire à choix multiples où l'élève doit compléter une démonstration, à un problème où l'élève doit trouver la solution et la rédiger car nous estimons que dans cette deuxième approche, les éléments que nous voulons étudier ne sont pas cernés avec la même précision que dans la première approche. En effet, nous tenions dans le questionnaire à connaître l'interprétation de l'élève, pour chaque pas de la démonstration, de la raison, qui, à ses yeux, autorise l'inférence.

De plus, il est possible que, dans la deuxième approche, l'élève trouve une difficulté à résoudre le problème proposé et ne fournisse aucune démonstration, ce qui ne nous avancera pas dans l'étude que nous visons.

Dans ce QCM, il s'agit de proposer une démonstration inachevée aux élèves et de leur demander de la compléter. En effet, dans cette démonstration, nous avons enlevé la règle d'inférence dans chaque arc transitif de substitution et nous avons demandé à l'élève de trouver cette règle de substitution parmi cinq réponses proposées :

"Enoncé vu en classe" (à citer)

"Visible sur le dessin"

"Ne nécessite pas d'explication"

"Autre explication" (à donner)

"Je ne sais pas"

Nous avons demandé aux élèves de ne cocher qu'une seule case par passage.

Ces cinq catégories ont été élaborées selon la procédure basée sur la fréquence des réponses d'élèves recueillies dans un test et dans une séance de classe.

Choix dans l'élaboration du problème

Le problème proposé dans ce questionnaire est le suivant :

"Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et I le milieu de $[BC]$. On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC et par D le point diamétralement opposé à A . Démontrer que $BHCD$ est un parallélogramme. En déduire que les points H, I, D sont alignés".

Le problème a été extrait d'un livre tunisien d'exercices corrigés : "1000 exercices et problèmes" (Germazi E., Elleuch N., Belghith A., 1992) du niveau de 3ème année (équivalent 3ème française), conforme au programme officiel en vigueur. Nous n'avons

gardé que la première question de ce problème car la démonstration que nous avons rédigée, correspondante à cette partie, comporte 9 arcs transitifs de substitution, ce qui nous paraît suffisant pour l'étude que nous menons. Nous signalons que l'exercice, tel qu'il a été proposé, porte sur les deux premiers chapitres de géométrie de la classe de 4ème (équivalent 3ème française). "Configurations de base I" et "Configurations de base II" où des notions vues au cours de l'année précédente (exemple : angles inscrits interceptant le même arc, angle au centre...) sont introduites. Nous avons choisi les deux premiers chapitres car ils comportent des énoncés importants de la géométrie euclidienne qui servent de point de départ et de base pour tous les chapitres du manuel. De plus, beaucoup de ces énoncés ont été vus au cours des années précédentes et surtout en 3ème année (équivalent 4ème française), ce qui laisse prévoir une certaine maîtrise de ces résultats de la part des élèves. Le fait que l'élève maîtrise les notions qu'il va utiliser dans une démonstration est un point important dans notre recherche. En effet, un élève qui n'est pas suffisamment familiarisé avec ces notions risque de ne pas pouvoir compléter la démonstration fournie, car la compétence à faire des démonstrations nécessite un certain niveau d'acquisition des connaissances en jeu.

VARIABLES DANS LA RESOLUTION DU PROBLEME

Dans la résolution du problème, nous avons pris en compte les variables suivantes :

- Position de l'orthocentre H : que l'orthocentre H soit à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC , le problème se résout exactement de la même façon. Cependant, dans le cas où H est à l'extérieur du triangle, l'élève verrait plus difficilement que (AB) est perpendiculaire à (CH) et que (AC) est perpendiculaire à (BH) s'il ne prolonge pas les côtés (AB) et (AC) .

- Cas où A et B sont diamétralement opposés (ou A et C sont diamétralement opposés) : dans ce cas, $B = D$ et $C = H$ (ou $C = D$ et $B = H$). Le quadrilatère $BHCD$ se réduit à un segment (parallélogramme aplati). La démonstration faite dans le cas d'un parallélogramme non aplati reste valable.

- Cas où B et C sont diamétralement opposés : dans ce cas, $H = A$ et $I = O$. Le quadrilatère $BHCD$ est un rectangle. La démonstration faite dans le cas où $BHCD$ est un parallélogramme et non un rectangle reste évidemment valable.

Choix dans la réalisation du dessin

Le dessin du problème proposé aux élèves a été réalisé par l'outil Cabri-Géomètre et fourni aux élèves. Nous avons décidé de proposer le dessin à l'élève, d'une part pour lui faire gagner du temps sur le tracé matériel et d'autre part, parce que l'étude de la réponse "Visible sur le dessin" sur une population d'élèves est plus pertinente quand ces derniers raisonnent sur le même dessin.

En outre, nous voulons éviter que l'élève obtienne l'un des cas particuliers précédemment évoqués et n'arrive pas à reconnaître les noms que nous avons donnés aux points géométriques, dans la démonstration qui lui est fournie (bien qu'elle soit applicable à ces cas particuliers).

Par ailleurs, nous estimons que le dessin fourni est pris comme donnée ; l'élève y prend des informations pour démontrer ce qu'il voit. En effet, un dessin fourni par l'enseignant est difficilement remis en cause par l'élève. Par conséquent, l'appréhension perceptive du dessin risque d'être plus importante dans ce cas que dans le cas d'un dessin fait par l'élève. Cela nous paraît un élément intéressant pour l'étude de l'influence du dessin dans une démonstration.

Nous avons proposé un dessin où H est à l'intérieur du triangle ABC car nous estimons que ce cas de figure est le plus familier aux élèves (c'est le cas représenté dans les manuels et généralement choisi par l'enseignant) et, par conséquent, l'élève a de fortes chances de pouvoir donner une explication aux passages concernant l'orthocentre. Par ailleurs, lorsque H est à l'intérieur du triangle, l'élève voit plus facilement la perpendicularité de la hauteur et du côté (même si elle n'est pas entièrement tracée) que lorsque H est à l'extérieur. Ce choix renforce le conflit entre les deux réponses "Visible sur le dessin" et "Enoncé vu en classe". Dans ce cas, si l'élève répond "Enoncé vu en classe", ceci est un indice de sa prise de distance par rapport au dessin.

D'autre part, dans le dessin proposé, la hauteur (BH) coupe le segment $[AC]$ alors que la hauteur (CH) ne coupe pas le segment $[AB]$. Nous avons choisi de différencier les tracés des hauteurs afin d'étudier l'effet du dessin sur les démarches des élèves. En effet, le traitement différent des deux hauteurs donne un poids à la reconnaissance sur le dessin de la propriété de perpendicularité. Plus visible lorsque la hauteur est complètement tracée, elle peut solliciter davantage une réponse du type "Visible sur le dessin", alors que si elle n'est pas tracée, l'élève donnerait moins facilement une réponse de ce type. Des réponses différentes aux passages P2 et P5 signifieront que cette variable visuelle joue un rôle dans la procédure de l'élève dans une démonstration.

Choix dans la rédaction de la démonstration

Comme nous l'avons déjà expliqué, il s'agit dans ce QCM de proposer une démonstration inachevée aux élèves et de leur demander de la compléter, en choisissant parmi les réponses proposées. Nous avons rédigé cette démonstration en faisant certains choix que nous nous proposons de justifier.

La démonstration comporte 9 passages. Dans ces derniers, certaines règles de substitution sont des propriétés (ou des définitions) vues au cours de la 3^{ème} (P1 et P4 : "Les segments joignant un point du cercle aux deux extrémités d'un diamètre forment un angle droit"). D'autres ont été abordées au cours des années précédentes (P2 et P5 : "Définition de l'orthocentre" ; P7 : "Un quadrilatère convexe ayant les côtés deux à deux parallèles est un parallélogramme" ; P3 et P6 : "Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles" ; P8 : "Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent au même milieu" ; P9 : "Définition du milieu").

Dans la rédaction inachevée proposée aux élèves, les passages d'une proposition à une autre sont formulés par l'intermédiaire du terme "donc". Nous avons choisi ce terme car il est très familier aux élèves et c'est celui par lequel ces derniers expriment généralement leurs déductions. Nous avons évité les formulations "signifie", "implique" et "équivalent à" car nous estimons que les élèves ne maîtrisent pas, à ce niveau, le sens de ces termes, ce qui peut poser un problème pour compléter la démonstration.

Nous signalons que le connecteur argumentatif et organisationnel "donc" (Duval 1992-1993) peut être utilisé dans un discours argumentatif qui n'est pas une démonstration. Par suite, il est possible qu'il induise chez les élèves le choix de "Ne nécessite pas d'explication" ou "Autre explication" qui ne sont pas des justifications mathématiques rigoureuses mais tiennent plutôt de l'argumentation. Cependant, du fait que ce terme est également utilisé en classe de mathématique, l'élève le reconnaît, relativement à une règle implicite du contrat didactique, comme terme approprié au discours mathématique et particulièrement à la démonstration. C'est pour cela que nous conservons ce connecteur dans la démonstration que nous proposons.

Choix dans les réponses

Les réponses proposées aux élèves dans le questionnaire sont au nombre de 5 pour chacun des 9 passages de la démonstration : "Enoncé vu en classe", "Visible sur le

dessin", "Ne nécessite pas d'explication", "Autre explication" et "Je ne sais pas". Ces catégories ont été élaborées selon la procédure basée sur la fréquence des réponses d'élèves recueillies dans un test et dans une séance de classe.

- "Enoncé vu en classe" (que l'élève devra citer) : cette formulation regroupe tous les types de résultats vus en classe (propriété, définition, théorème, axiome...). Nous avons préféré cette formulation générale à la place d'une formulation spécifiée de chaque type de résultat à la suite de l'apparition d'un problème lors de l'essai de ce questionnaire sur des élèves. Dans cette première forme du questionnaire, nous avons proposé deux réponses différentes : "Propriété" et "Définition". Les élèves n'ont pas réussi à faire la distinction entre ces deux appellations et ils ont souvent retrouvé la propriété recherchée mais l'ont placée dans la case "Définition". Cette difficulté est due en partie à la présentation des résultats dans les manuels tunisiens et particulièrement ceux des 3ème et 4ème années (respectivement 4ème et 3ème françaises). Dans ces derniers, les résultats sont souvent introduits par les termes "Retenons", "Plus généralement", "Nous admettons que" ... sans spécifier la nature des résultats. Par conséquent, l'élève trouve le résultat mais ne connaît pas sa nature.

- "Visible sur le dessin" : par cette réponse, nous visons l'étude de l'usage que fait l'élève du dessin dans une démonstration. Plusieurs travaux en didactique ("Du dessin au concept de figure", Verkerk H., 1990 ; "L'influence du dessin sur la rédaction d'une démonstration", Souvignet C., 1993-1994 ; "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", Laborde C. et Capponi B., 1994) reconnaissent en effet l'incidence du dessin sur la validation des résultats en géométrie par les élèves.

- "Ne nécessite pas d'explication" : certaines justifications peuvent sembler inutiles à l'élève, soit parce qu'il voit le résultat sur le dessin, soit parce que la propriété correspondante va de soi pour l'élève (théorème en acte : par exemple, l'image d'un segment par une transformation est un segment) ou encore parce que la propriété lui est tellement connue qu'il ne voit plus la nécessité de l'expliquer. Nous estimons que ce dernier cas peut se produire car certains enseignants demandent à leurs élèves de ne pas écrire les théorèmes qui sont connus depuis longtemps par souci de leur faire gagner du temps.

Nous avons opté pour la formulation "Ne nécessite pas d'explication" à la place de la formulation "Évident" car nous supposons que cette dernière peut évoquer chez l'élève le sens de "facile" plus que le sens de "trivial". En effet, dans la classe, l'enseignant utilise souvent la formulation "Mais c'est évident !" lorsqu'il estime qu'un résultat (ou qu'une explication) est facile et connu(e) par la majorité des élèves. D'ailleurs, dans un essai de ce questionnaire sur des élèves, où nous avons proposé la réponse "Évident", plusieurs d'entre eux choisissent cette réponse et donnent paradoxalement une explication.

- "Autre explication" (que l'élève devra citer) : nous avons choisi cette réponse car nous supposons que les choix proposés à l'élève peuvent ne pas le satisfaire. Il peut alors fournir une autre explication à la déduction proposée.

- "Je ne sais pas" : il est possible que l'élève ne parvienne pas à trouver une explication au passage d'une proposition à une autre. C'est pour cela que nous avons proposé cette réponse.

Description de l'atelier

L'atelier que nous proposons a pour objectif de faire participer un certain nombre d'enseignants et de chercheurs à l'explication et l'interprétation de quelques réponses d'élèves au QCM. Nous l'avons organisé en deux parties.

Dans une première partie, le problème de démonstration proposé dans le QCM est posé afin d'être résolu et les solutions relatives aux différents cas particuliers sont discutées. Cette étape vise la familiarisation des participants à l'atelier à ce problème. Ensuite, nos choix concernant la rédaction de la démonstration, la réalisation du dessin et la structuration des différentes réponses au QCM sont explicités. La compréhension de nos choix dans l'élaboration du questionnaire nous semble un élément indispensable pour mener à bien l'interprétation des réponses d'élèves.

Dans une deuxième partie, nous demandons aux participants d'essayer de prévoir la fréquence d'apparition de chaque type de réponse ("Énoncé vu en classe", "Visible sur le dessin", "Ne nécessite pas d'explication", "Autre explication", "Je ne sais pas"), compte tenu des connaissances des élèves et du contrat habituel en classe de mathématique de 3ème. S'ils le trouvent nécessaire, ils peuvent spécifier relativement à quels passages un type de réponse apparaîtrait, éventuellement, plus qu'un autre.

Pour que les participants à l'atelier puissent répondre à cette question, il nous a semblé nécessaire de préciser, pour chacune des propriétés (ou définitions) correspondant à un passage donné, le niveau scolaire dans lequel elle est enseignée, selon le cursus scolaire tunisien.

Ensuite, nous leur proposons trois copies comportant les réponses d'élèves au QCM qu'ils doivent interpréter (voir annexes). Celles-ci ont été choisies dans trois classes différentes et présentent des réponses très variables. De plus, leur choix a été fait de façon qu'elles permettent de focaliser la discussion sur certains points que nous avons dégagés lors de l'interprétation de l'ensemble des réponses et qui nous ont paru intéressants à reprendre dans cet atelier.

- Pourquoi un élève associe deux réponses à un même passage, bien que nous lui ayons demandé de ne cocher qu'une seule case par passage ?
- Comment expliquer qu'un élève donne deux réponses différentes à deux passages correspondants à la même règle de substitution ?
- Comment interpréter les explications qui constituent des arcs transitifs de substitutions à structure binaire ?
- Discuter de la formulation mathématique de certaines réponses : "Énoncé vu en classe" ou "Autre explication".

La discussion des participants à l'atelier concerne aussi les deux questions suivantes, que nous posons lors de la deuxième partie du déroulement de l'atelier :

1ère question

Essayer de prévoir la fréquence d'apparition de chaque type de réponse ("Énoncé vu en classe", "Visible sur le dessin", "Ne nécessite pas d'explication", "Autre explication", "Je ne sais pas"), compte tenu des connaissances des élèves et du contrat habituel en classe de mathématique de 4ème (3ème française).

Spécifier, si nécessaire, relativement à quels passages un type de réponse apparaîtrait, éventuellement, plus qu'un autre et justifier.

2ème question

Dans les trois copies d'élèves que nous proposons :

- a) Donner une interprétation
 - au fait que l'élève donne plus d'une réponse à un même passage,
 - au fait que l'élève donne des réponses différentes à deux passages correspondant à la même règle de substitution,
 - au fait que certaines réponses constituent des arcs transitifs de substitution à structure binaire.
- b) Discuter de la formulation mathématique des élèves dans les énoncés qu'ils ont écrits.

Les résultats de la discussion autour de ces deux questions sont donnés dans le paragraphe suivant.

Résultats de l'intervention des participants

Nous commençons par donner les résultats de la discussion des participants à l'atelier autour de la première question. Ensuite, leurs réponses à la deuxième question seront explicitées.

Discussion autour de la première question

Avant de donner les résultats issus des réponses des participants à la première question, signalons que certains participants ont manifesté une difficulté pour répondre à cette question. En effet, ces derniers ont considéré que la réponse dépendrait de plusieurs variables telles que le niveau de connaissance des élèves (faible, fort...) ou le type d'exigences de l'enseignant et le fait de ne pas cerner ces variables constitue un obstacle pour répondre adéquatement à cette question.

Après avoir précisé que la question posée concerne le contrat habituel qui s'instaure dans une classe de mathématique de 4ème tunisienne (équivalent 3ème française) autour de la démonstration, les participants ont donné des réponses générales relatives à l'ensemble des 9 passages qui peuvent se résumer dans les points suivants :

- Le choix "Visible sur le dessin" peut se faire par certains élèves qui restent attachés au cadre spatio-graphique et déduisent certaines propriétés à partir du dessin. Mais dans la plupart des cas, les passages d'une hypothèse à une conclusion seront expliqués par la réponse : "Énoncé vu en classe".

- Pour les propriétés et théorèmes établis, dans les classes de 6ème et 5ème, l'élève coche la case "Ne nécessite pas d'explication" ou "Visible sur le dessin". En effet, ces énoncés lui sont soit très connus, si bien qu'il ne voit pas la nécessité de les expliciter, ce qui constituerait une règle plus ou moins explicite du contrat, soit oubliés et il cherchera alors à les retrouver à partir de l'observation du dessin.

- Pour un même passage, le choix "Énoncé vu en classe" peut se faire avec "Visible sur le dessin". Dans ce cas, le dessin représente un moyen pour vérifier la justification théorique fournie par l'élève, ce qui est mathématiquement acceptable.

- Le choix : "Je ne sais pas" sera très dépendant du passage et du niveau des élèves, ce qui ne permet pas, a priori, de se prononcer sur la fréquence de son apparition.

Relativement à chacun des passages, la discussion avec les participants a abouti aux conclusions suivantes :

- La propriété justifiant les passages P1 et P4 : "Les segments joignant un point du cercle aux deux extrémités d'un diamètre forment un angle droit" sera mobilisée par de nombreux élèves. Ces derniers cocheront la case "Énoncé vu en classe" et donneront l'énoncé correct de la propriété. Cependant, peu d'élèves ne retrouveront pas cette dernière car elle ne leur paraîtrait pas évidente et intuitive, à la différence de certaines autres propriétés que l'élève peut deviner seul, tels que les axiomes et les premières propriétés qui en découlent.

- Pour les passages P3 et P6, correspondant à la propriété de parallélisme des perpendiculaires à une même droite et le passage P9, relatif à la définition du milieu, la majorité des élèves répondront par : "Ne nécessite pas d'explication" car il s'agit de notions vues depuis plus de deux ans et qu'ils connaissent suffisamment bien. Ils estimeront alors qu'elle n'a pas besoin d'être explicitée.

- Peu de participants ont considéré que la propriété des perpendiculaires communes à une même troisième relative à P3 et P6 sera explicitée bien qu'elle soit enseignée

depuis deux ans. Cela peut être soit le résultat d'une habitude adoptée par les enseignants qui consiste à expliciter cette propriété dans les démonstrations, soit dû à la nature même de cette propriété qui serait facilement retenue par les élèves et leur permettrait d'expliquer plusieurs résultats en géométrie.

- Bien que les propriétés du parallélogramme, correspondant aux passages P7 et P8, soient enseignées depuis un an seulement, certains participants ont prévu que les élèves choisiraient la réponse "Ne nécessite pas d'explication". Cependant, la majorité des participants se sont opposés à cette idée et ont considéré que ces propriétés seraient plutôt candidates à favoriser la réponse "Énoncé vu en classe". De plus, elles seront correctement énoncées par la majorité des élèves et ceci parce que le parallélogramme est un objet d'enseignement qui donne lieu à de nombreux exercices et problèmes, et par conséquent les propriétés du parallélogramme en question sont supposées suffisamment maîtrisées par les élèves.

- Les passages P2, P5, P3, P6 et P9, correspondant à des propriétés et des définitions enseignées depuis plus de deux ans, seront souvent candidates à favoriser les réponses "Visibles sur le dessin" car les élèves les ayant oubliées chercheront à trouver une explication dans l'observation du dessin.

- Bien que les passages P2 et P5 nécessitent la même règle de substitution (définition de la hauteur), il y aura plus d'élèves qui auront recours à la réponse "Visible sur le dessin" dans le cas de P5 que dans le cas de P2, et ceci parce que nous avons intentionnellement choisi de prolonger la hauteur (BH) et de ne pas prolonger la hauteur (CH) dans le dessin fourni aux élèves.

- Certains participants ont considéré que les définitions du milieu et de l'orthocentre, correspondant respectivement aux passages P9 et P2, P5 seront candidates à favoriser la réponse "Je ne sais pas" car elles seraient oubliées par les élèves, vu qu'elles sont enseignées depuis plus de deux ans et rarement explicitées par les enseignants. Si les passages P2 et P5 peuvent être expliqués quelquefois par la réponse "Énoncé vu en classe", le passage P9 ne sera jamais candidat à favoriser cette réponse.

- Le passage P9 sera le plus souvent justifié par "Visible sur le dessin" ou "Ne nécessite pas d'explication" car les élèves oublient dans la définition du milieu que les points sont d'abord alignés et ne retiennent que l'équidistance. Ils conçoivent l'alignement soit implicitement (c'est alors qu'ils répondent : "Ne nécessite pas d'explication"), soit par rapport à ce qu'ils voient (c'est alors qu'ils choisissent la réponse : "Visible sur le dessin").

Discussion autour de la deuxième question

La discussion des participants à l'atelier autour de cette deuxième question ne s'est pas limitée au contenu des copies proposées, mais a comporté des hypothèses supplémentaires concernant les réponses d'élèves. Les points essentiels de cette discussion peuvent se résumer dans ce qui suit.

APPARITION DE PLUS D'UNE REPONSE A UN MEME PASSAGE

Un élève qui coche deux cases pour un même passage, bien qu'on lui ait précisé de n'en cocher qu'une seule, le fait probablement parce qu'il a pensé que cela permettra de mieux clarifier l'explication qu'il donne à un passage donné. Ainsi, un élève peut donner la réponse "Visible sur le dessin" en l'associant à la réponse "Énoncé vu en classe" car il considérerait que le dessin constitue un support visuel qui illustre et confirme les conjectures émises. Par exemple, pour le passage P7 correspondant à la propriété : "Un quadrilatère ayant les côtés opposés parallèles est un parallélogramme", l'élève pourrait associer ces deux réponses parce que la forme fermée parallélogramme est fortement perçue, ce qui expliquerait la justification du pas de déduction en termes de dessin, en plus de l'énoncé correspondant. Cela montrerait l'influence de l'appréhension perceptive sur les démarches de validation des élèves.

L'élève peut cocher aussi les réponses "Visible sur le dessin" et "Ne nécessite pas d'explication" pour le même passage. Il considérerait alors qu'il n'est pas nécessaire de rajouter une explication supplémentaire, puisque le dessin constitue un support visuel suffisant pour fournir l'explication du passage. Dans ce cas, le dessin constitue la seule source d'informations par laquelle l'élève valide le passage de l'hypothèse à la conclusion.

Par ailleurs, l'un des élèves a coché les deux réponses : "Énoncé vu en classe" et "Ne nécessite pas d'explication". Cela a été expliqué par le fait que l'élève reconnaît que ce qui justifie le passage de l'hypothèse à la conclusion est un énoncé de cours mais il considérerait que ce dernier est tellement trivial qu'il n'est pas nécessaire de l'explicitier.

APPARITION DE REPONSES DIFFERENTES A DEUX PASSAGES CORRESPONDANT A LA MEME REGLE DE SUBSTITUTION

L'un des élèves qui a répondu correctement au passage P1, répond au passage P4 qui correspond à la même propriété que P1 de façon différente. En effet, pour P4 il se limite à écrire l'hypothèse et la conclusion du passage, en précédant sa réponse par la phrase : "Le même que P1". De plus, il donne la règle de substitution adéquate au passage P5, pourtant au passage P2 correspondant à la même définition, il ne donne que l'hypothèse et la conclusion du passage. Cela peut s'expliquer par le fait que l'élève ne distingue pas entre une règle de substitution et un ATS (arc transitif de substitution) à structure binaire. Pour lui, écrire l'un ou l'autre correspond à la même explication. Cela est probablement dû à une habitude dans la rédaction des démonstrations qui consiste à écrire les pas sous forme binaire, en n'explicitant pas le théorème qui constitue l'élément de transition dans le passage de l'hypothèse à la conclusion.

Par ailleurs, un élève qui donne une réponse à un passage donné, peut ne pas donner cette même réponse au passage suivant qui correspond à la même règle de substitution car il n'éprouve pas le besoin de citer une deuxième fois l'énoncé qu'il a déjà formulé. Il choisirait alors la réponse "Ne nécessite pas d'explication", en mentionnant probablement que l'énoncé a été déjà cité. De même, si un élève donne la réponse "Je ne sais pas" à un passage donné, il est possible qu'il donne une réponse différente au passage suivant qui correspond à la même règle de substitution. Cela pourrait traduire une incertitude de l'élève dans l'énoncé relatif à ce passage qui pourrait s'expliquer par le fait que celui-ci n'est pas suffisamment ancré dans leur esprit.

D'autre part, pour les passages P2 et P5, il est possible que la réponse ne soit pas la même, bien que ces deux passages correspondent à la même règle de substitution. En effet, dans le dessin fourni aux élèves et pour le passage P5, la hauteur (BH) a été intentionnellement prolongée pour qu'elle coupe (AC), alors que cela n'est pas le cas pour la hauteur (CH) et le côté (AB) du passage P2. De ce fait, un élève qui a choisi une réponse donnée au passage P2 donnerait la réponse "Visible sur le dessin" au passage P5.

REPONSES CONSTITUANT DES ARCS TRANSITIFS DE SUBSTITUTION A STRUCTURE BINAIRE

Au lieu de donner le théorème ou la définition responsables d'un passage donné, l'élève peut réécrire l'hypothèse et la conclusion du passage, en pensant qu'il a donné la règle de substitution. Ce type de rédaction est tout à fait acceptable pour les enseignants, dans le cas usuel d'une démonstration fournie par l'élève, car il montre que ce dernier a su trouver la solution du problème, en établissant les liens adéquats entre les différents objets géométriques. Cependant, dans le cas de ce QCM, cette réponse montre que l'élève ne sait pas que ce qui régit le passage d'une hypothèse à une conclusion est un

énoncé vu en cours, c'est-à-dire qu'il ignore que la démonstration est constituée de pas à structure ternaire et non binaire. Ces remarques laissent supposer que l'enseignant ne serait pas très explicite par rapport aux règles de fonctionnement d'une démonstration relatives à la règle de substitution.

Par ailleurs, un élève, probablement par souci d'être le plus explicite possible, peut donner la règle de substitution correctement mais il y imbrique l'hypothèse et la conclusion du passage. Le fait que l'élève reprenne ces deux éléments de l'ATS, en plus de l'énoncé de la règle de substitution, au lieu de se restreindre à écrire cette dernière, est un autre indice qui peut traduire que l'élève ne connaît pas, de façon explicite, le schéma de l'organisation ternaire d'un pas de déduction. En effet, un élève qui sait, explicitement, qu'une démonstration s'organise en une suite d'ATS n'éprouverait pas le besoin d'écrire les hypothèses et la conclusion correspondant à cet ATS pour expliquer le passage de l'hypothèse à la conclusion.

LA FORMULATION MATHEMATIQUE

Certains énoncés comportent des incorrections de formulation en langue française, ce qui reflète la difficulté des élèves, parfois, à s'exprimer dans une langue qui n'est pas leur langue maternelle.

Par ailleurs, les énoncés sont souvent donnés en langue française sans l'utilisation de symboles ou de désignations d'objets géométriques par des lettres. Nous avons précisé que ce type d'écriture correspond au type de formulation figurant dans le manuel officiel tunisien de 4ème (équivalent 3ème française). En effet, les auteurs des manuels n'emploient pas fréquemment les symboles dans les énoncés de théorèmes que l'élève doit retenir, probablement parce qu'ils considèrent que l'enseignement, à ce niveau scolaire, n'est pas spécialisé, comme cela est précisé dans la préface du manuel. Cependant, si dans les énoncés des théorèmes du manuel, l'usage d'une écriture symbolique n'est pas très présent, la lecture des réponses d'élèves montre un certain formalisme qui apparaît surtout dans l'usage des symboles. Par exemple, il est apparu des notations telles que " $*$ ", " $\circ$ ", " $//$ " et " $\#$ ". L'usage des symboles a contribué à l'apparition des incorrections de formulation où l'élève mélange écriture symbolique et langage français

Conclusion

La discussion des participants à l'atelier autour des questions posées a fourni des hypothèses concernant les types de réponses possibles et des éléments d'interprétation aux réponses d'élèves proposées, ce qui a permis de cerner certaines démarches qui peuvent apparaître dans la rédaction d'une démonstration.

Pour la majorité des participants à l'atelier, les élèves choisiraient, à ce niveau de l'apprentissage, le plus souvent la réponse : "Énoncé vu en classe". De plus, les énoncés donnés par les élèves seraient, dans la plupart des cas, justes. Peu de réponses du type "Visible sur le dessin" apparaîtraient. Ainsi, aux yeux des participants, les élèves sauraient se détacher des données visuelles pour justifier un résultat en géométrie faisant ainsi preuve d'un niveau d'abstraction assez élevé.

Par ailleurs, les participants expliquent le fait que les élèves cochent deux cases pour un même passage, bien qu'il leur ait été précisé de n'en cocher qu'une seule, par le fait que, probablement, les élèves pensent que cela permettra de mieux clarifier l'explication qu'ils donnent à un passage donné. Ainsi, le choix "Visible sur le dessin", associé à la réponse "Énoncé vu en classe", montre que le dessin constitue un support visuel qui illustre et confirme les conjectures émises. Cependant, lorsque "Visible sur le dessin" est

associé à la réponse "Ne nécessite pas d'explication", cela montre que le dessin constitue la seule source d'informations par laquelle l'élève valide le passage de l'hypothèse à la conclusion.

D'autre part, l'analyse des réponses des élèves constituant des arcs transitifs de substitution à structure binaire a permis de conclure que certains élèves ne sauraient pas que ce qui régit le passage d'une hypothèse à une conclusion est un énoncé vu en cours, c'est-à-dire qu'ils ignorent que la démonstration est constituée de pas à structure ternaire et non binaire. En effet, l'élève est habitué à un type de rédaction de démonstration dans lequel il explicite rarement les règles de substitution, ce qui est tout à fait acceptable par les enseignants car il montre que ce dernier a su trouver la solution du problème, en établissant les liens adéquats entre les différents objets géométriques. Ces remarques laissent supposer que l'enseignant même ne serait pas très explicite par rapport aux règles de fonctionnement d'une démonstration relatives à la règle de substitution.

Quant à la formulation mathématique, la discussion a conclu sur le fait que certaines difficultés d'élèves dans la rédaction d'une démonstration peuvent provenir du fait qu'ils n'arrivent pas à s'exprimer dans une langue qui n'est pas la langue maternelle.

De plus, il a été constaté que les énoncés des théorèmes sont souvent donnés en langue française sans l'utilisation de symboles ou de désignations d'objets géométriques par des lettres, ce qui correspond au type de formulation figurant dans le manuel officiel tunisien de 4^{ème} (équivalent 3^{ème} française). Les incorrections de formulation apparues sont des mélanges entre écriture symbolique et langage français relatant l'incapacité de l'élève à imbriquer correctement l'usage des symboles dans des phrases en français.

Références Bibliographiques

DUVAL R. et EGRET M.A. (1989)

L'organisation déductive du discours, interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration.

Annales de didactique et de sciences cognitives, pages 25 à 40, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1992 - 1993)

Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?

Petit X, n° 31, pages 37 à 61.

GUERMAZI E. , ELLEUCH N. et BELGHITH A. (1992)

1000 exercices et problèmes.

JORGE LOBO DE MESQUITA A.M. (1989)

L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie.

Thèse en didactique des mathématiques.

LABORDE C. et CAPPONI B. (1994)

Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique.

RDM, vol. 14, n° 12.

SOUVIGNET C. (1993 - 1994)

L'influence du dessin sur la rédaction d'une démonstration.

Petit X, n° 34, page 31.

VERKERK H. (1990)

Du dessin au concept de figure.

Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques.

Annexe

Voici trois réponses d'élèves au QCM, que nous avons choisies et qui ont servi de support pour la discussion autour de la deuxième question. Ces réponses ont été recomposées pour faciliter la lecture.

Réponses du premier élève

Dans cette démonstration, expliquer les passages P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 et P9 d'une proposition à une autre, en précisant pour chaque cas si c'est :

- un énoncé vu en classe (le formuler en une phrase),
- visible sur le dessin,
- un passage qui ne nécessite pas d'explication,
- une autre explication (la donner).

Passage 1

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
			x	
Lequel ?			Laquelle ?	

[AD] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et B un point qui se déplace sur l'arc AD donc $(AB) \perp (BD)$

Passage 2

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
			x	
Lequel ?			Laquelle ?	

ABC : un triangle son orthocentre est le point H. On projete (HC) on trouve que $(AB) \perp (CH)$

Passage 3

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
	x	x		
Lequel ?	et		Laquelle ?	

Passage 4

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
			x	
Lequel ?			Laquelle ?	

[AD] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et C est un point qui se déplace sur l'arc $\widehat{AD}$ donc $(AC) \perp (CD)$

Passage 5

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
	x			
Lequel ?			Laquelle ?	

Passage 6

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
	x et	x		
Lequel ?			Laquelle ?	

Passage 7

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
		x		
Lequel ?			Laquelle ?	

Passage 8

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
		x		
Lequel ?			Laquelle ?	

Passage 9

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
	x			
Lequel ?			Laquelle ?	

Réponses du deuxième élève

Dans cette démonstration, expliquer les passages P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 et P9 d'une proposition à une autre, en précisant pour chaque cas si c'est :

- un énoncé vu en classe (le formuler en une phrase),
- visible sur le dessin,
- un passage qui ne nécessite pas d'explication,
- une autre explication (la donner).

Passage 1

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Si on joint les extrémités d'un diamètre à un point du cercle, on obtient un secteur droit en ce point.

Passage 2

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

H est l'orthocentre du triangle ABC (H est le point d'intersection des hauteurs) sig. que $(CH) \perp (AB)$.

Passage 3

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Deux droites perpendiculaires à une autre droite sont parallèles entre elles.

Passage 4

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Le même que P1

*[AD] diamètre de $\mathcal{C}$
et $C \in \mathcal{C}$*

*}
}*

Donc ADC rectangle en C

D'où $(AC) \perp (CD)$

Passage 5

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
☒	☒	☐	☐	☐
Lequel ?			Laquelle ?	

L'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs. Sig. que $(BH) \perp (AC)$ puisque $H \in [BH]$.

Passage 6

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
☒	☐	☐	☐	☐
Lequel ?			Laquelle ?	

Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

Passage 7

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
☒	☐	☐	☐	☐
Lequel ?			Laquelle ?	

Un quadrilatère dont les côtés sont 2 à 2 parallèles est un parallélogramme.

Passage 8

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
☒	☐	☐	☐	☐
Lequel ?			Laquelle ?	

Dans un parallélogramme les diagonales se coupent en même milieu.

Passage 9

C'est un énoncé vu en classe	C'est visible sur le dessin	Ne nécessite pas d'explication	Autre explication	Je ne sais pas
☒	☐	☒	☐	☐
Lequel ?			Laquelle ?	

3 points sont alignés s'ils appartiennent à une même droite. Dans ce cas H, I et D appartiennent à une même diagonale, tel que $I = H \cdot D$.

Réponses du troisième élève

Dans cette démonstration, expliquer les passages P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 et P9 d'une proposition à une autre, en précisant pour chaque cas si c'est :

- un énoncé vu en classe (le formuler en une phrase),
- visible sur le dessin,
- un passage qui ne nécessite pas d'explication,
- une autre explication (la donner).

Passage 1

C'est un énoncé vu en classe

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

Ne nécessite pas d'explication

Autre explication

Laquelle ?

Je ne sais pas

Parce que on peut dire que si ADB est un triangle isocèle alors (AB) n'est pas $\perp (BD)$

Passage 2

C'est un énoncé vu en classe

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

Ne nécessite pas d'explication

Autre explication

Laquelle ?

Je ne sais pas

On a BCH un triangle rectangle en H alors $[BH] \perp [HC]$

Passage 3

C'est un énoncé vu en classe

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

Ne nécessite pas d'explication

Autre explication

Laquelle ?

Je ne sais pas

Toutes les droites qui sont perpendiculaires à la droite Δ (Δ comme exemple) sont //

Passage 4

C'est un énoncé vu en classe

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

Ne nécessite pas d'explication

Autre explication

Laquelle ?

Je ne sais pas

Si le diamètre de sommet principale est joignée à un point qui $\in \mathcal{C}$ et qui n'est pas confondu avec $(A \text{ et } D)(ex)$ alors $[CD] \perp (AC)$

Passage 5

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Passage 6

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Tous droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

Passage 7

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Dans un # les côtés opposés sont parallèles

Passage 8

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Dans un # Le milieu aie le point commun d'intersection des diagonales est égale le milieu des segements

Passage 9

C'est un énoncé vu en classe

☒

Lequel ?

C'est visible sur le dessin

☐

Ne nécessite pas d'explication

☐

Autre explication

☐

Laquelle ?

Je ne sais pas

☐

Tous les points qui sont les milieu des autres sont alignés