PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHÈLE ARTIGUE

JEAN BAPTISTE LAGRANGE

Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de première S

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998-1999, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 3-29
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998-1999___3_3_0>

INSTRUMENTATION ET ECOLOGIE DIDACTIQUE DE CALCULATRICES COMPLEXES :

Eléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S[1]

Michèle Artigue, IUFM de Reims et Equipe DIDIREM, Université Paris 7

Jean Baptiste Lagrange, IUFM de Rennes et IMR, Université de Rennes 1

Résumé : *Dans ce texte, nous étudions les questions d'instrumentation et d'écologie didactique de calculatrices complexes, en nous appuyant sur une recherche menée dans deux classes de première S, dans le cadre d'un projet national soutenu par le Ministère de l'Education Nationale. Nous présentons d'abord la problématique de la recherche en la resituant par rapport aux travaux sur l'intégration des technologies informatiques à l'enseignement des mathématiques et en précisant un cadre pour l'analyse des questions d'instrumentation. Nous présentons ensuite la recherche menée, dans sa globalité, avant de nous centrer sur une de ses dimensions : le développement d'une ingénierie didactique intégrant la TI-92 pour l'introduction de l'analyse en classe de première S.*

Nous présentons dans ce texte une recherche menée avec B. Defouad, M. Dupérier et G. Juge sur l'intégration de la TI-92 à l'enseignement des mathématiques en première S[2][Artigue & al. 97]. Cette présentation est organisée en quatre parties. Dans la première, nous précisons la problématique de la recherche, en mettant l'accent sur l'évolution des approches de l'intégration des technologies informatiques à l'enseignement dans laquelle elle s'inscrit. Les questions d'instrumentation et d'écologie y étant centrales, nous essayons dans la seconde partie d'esquisser un cadre pour leur étude, dans le cas précis qui nous intéresse ici : celui de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques avec des calculatrices complexes telles que la TI-92. Dans la troisième partie, nous décrivons brièvement le projet de recherche avant de nous centrer sur une de ses dimensions : la construction d'une ingénierie didactique pour l'enseignement des débuts de l'analyse en première scientifique. Nous insistons tout particulièrement sur les choix globaux qui ont conduit cette construction, sur l'articulation des différentes phases, sur les divers rôles que la TI-92 a été amenée à jouer. La quatrième partie décrit plus précisément les étapes de cette ingénierie. Soulignons que la recherche comporte une autre dimension essentielle : l'étude des processus d'instrumentation de la TI-92 à travers le suivi biographique d'élèves sélectionnés en fonction de leur sexe, de leur profil mathématique et technologique. Nous renvoyons le lecteur, pour cette dimension, au texte de B. Defouad dans ces mêmes actes. D'autre part, une présentation détaillée de certaines situations clefs de l'ingénierie est fournie dans les textes de M. Dupérier et G. Juge.

---

[1] Ce texte est repris des actes du colloque « calculatrices géométriques et symboliques » organisé par l'IREM de Montpellier, La Grande Motte, mai 1998 avec l'aimable autorisation des organisateurs.

[2] Ce rapport peut être obtenu à l'IREM Paris 7, Case 7018, Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

Notre recherche ne constitue pas un travail isolé. Elle s'inscrit dans le cadre d'un projet national, à l'initiative de la DISTNB au Ministère de l'Education Nationale et a été l'occasion de concertations régulières avec les autres équipes engagées dans ce projet, à Grenoble, Lyon et Montpellier. Elle ne constitue pas non plus un point isolé dans les multiples travaux menés aujourd'hui, en France comme à l'étranger, sur les calculatrices et les technologies informatiques plus généralement. L'approche de l'intégration qui la sous-tend porte de ce fait la marque de l'évolution globale des approches dans ce domaine.

C'est sur cette évolution que nous voudrions mettre l'accent dans la première partie de ce texte, en en rappelant quelques caractéristiques essentielles, du moins à nos yeux. Elles tiennent à la fois à l'évolution des théories de l'apprentissage, à l'évolution du champ didactique et à l'évolution technologique elle-même.

L'intégration des technologies informatiques : une évolution des approches

Dans les approches que nous qualifierons ici d'initiales, un trait fondamental nous semble être l'influence dominante, du point de vue des théories de l'apprentissage, du constructivisme piagétien [Artigue 96]. Ceci conduit à mettre au centre des processus d'apprentissage l'adaptation, au sens biologique du terme, une adaptation dans laquelle l'action joue un rôle crucial. Le constructivisme est en particulier à la base de la notion de micromonde : les réifications des objets et relations mathématiques sur lesquelles les micromondes sont bâtis permettent en effet en quelque sorte de manipuler et transformer des objets mathématiques abstraits par essence, ces manipulations et transformations étant, selon la théorie, via des processus d'intériorisation, à la source de la connaissance mathématique.

Un second trait du constructivisme piagétien, qui a eu une influence certaine sur la façon dont a pu être pensée l'intégration des technologies informatiques, est la vision hiérarchisée de la construction des connaissances qu'il propose. Cette vision évoluera lorsque la théorie des stades sera sérieusement contestée, mais elle se maintiendra néanmoins sous des formes atténuées. Elle nous semble par exemple à l'oeuvre dans des modèles de l'apprentissage comme celui construit par E. Dubinsky [Dubinsky 91], qui est à la base du langage ISETL développé pour l'enseignement universitaire. Ce modèle est en effet basé sur la distinction entre la dimension processus et la dimension objet des concepts mathématiques et sur l'hypothèse, expérimentalement attestée, d'une évolution au cours du processus d'apprentissage du processus vers l'objet. C'est le processus qui est généralement le premier accessible (il suffit ici de penser au concept de fonction) par intériorisation de l'action mais la capacité de concevoir les processus comme des objets que l'on peut manipuler en tant que tels ou intégrer dans des processus plus complexes, requiert un saut cognitif qui n'a rien d'évident et que E. Dubinsky exprime en termes d'encapsulation. L'utilisation des technologies informatiques se coule bien dans ce type de modèle lorsque l'on donne une place prépondérante à la programmation. Les processus se trouvent alors matérialisés par des procédures informatiques et la compilation de ces procédures en macro ou en programmes nommés favorise leur transformation en entités à part entière, en objets.

Sur le plan de l'enseignement enfin, les premières approches nous semblent avoir été marquées par une vision idyllique des potentialités offertes par les technologies informatiques pour l'enseignement, qu'il s'agisse d'y voir des outils miracles de remédiation ou des environnements susceptibles d'induire le renouvellement souhaité des pratiques enseignantes vers des approches plus riches, plus expérimentales et conceptuelles à la fois. A l'épreuve de la réalité, la situation s'est révélée, on le sait, plus complexe.

Les travaux récents portent la marque indéniable d'une évolution des approches. Sur le plan des théories de l'apprentissage tout d'abord, comme le montre bien la synthèse récente réalisée par A. Sierpinska et S. Lerman [Sierpinska & Lerman 96], un accent croissant est mis sur la dimension culturelle et sociale des apprentissages, les chercheurs s'appuyant souvent sur des travaux comme ceux du psychologue russe L.S. Vygotsky ou sur des approches didactiques de nature anthropologique comme celle développée en France par Y. Chevallard [Chevallard 92]. Ceci conduit à apporter une attention croissante :

- à la relativité des savoirs et connaissances,
- au rôle joué dans la constructions des rapports personnels des élèves aux mathématiques par les rapports institutionnels dans lesquels s'inscrivent leurs apprentissages,
- au rôle que jouent les instruments matériels et symboliques de l'activité mathématique dans l'apprentissage,
- aux médiations nécessaires à tout processus d'apprentissage, qu'il s'agisse des médiations des pairs ou de l'enseignant.

Cette évolution n'est bien sûr pas sans conséquence sur les représentations des rôles possibles des technologies informatiques. Elles tendent à être aussi perçues comme des partenaires de l'apprenant dans une sorte d'intelligence collective partagée, ou comme des médiateurs, tuteurs qui vont permettre à l'élève d'accéder à des connaissances qui ne l'étaient pas de façon autonome. Nous renvoyons le lecteur sur ce point précis à la présentation réalisée par R. Noss et C. Hoyles [Noss & Hoyles 97].

Une seconde caractéristique de l'évolution dans les approches cognitives nous semble être l'importance croissante accordée, au delà des hiérarchies entre niveaux ou formes de connaissance, au rôle essentiel joué par l'articulation de cadres [Douady 86], de registres de représentations [Duval 95], de points de vue différents [Robert & Tenaud 89], [Alves Dias 98] dans les processus de conceptualisation.

Il est alors particulièrement intéressant de constater que l'évolution technologique, de son côté, favorise la prise en compte de ces nouvelles dimensions :

- avec une programmation qui est aujourd'hui beaucoup moins un passage obligé, en particulier dans l'enseignement secondaire, des calculatrices comme la TI-92 mais même déjà les calculatrices graphiques permettant d'obtenir directement via des commandes spécifiques ce qui auparavant nécessitait programmation (résolution approchée d'équations, calcul approché d'intégrales, calcul de valeurs de termes d'une suite...),
- par les possibilités de connexion, d'articulation diverses offertes par les machines et logiciels actuels qui rencontrent l'intérêt croissant pour le développement des flexibilités cognitives.

Sur le plan de l'enseignement enfin, le constat des difficultés d'intégration des technologies nouvelles, que l'on ne saurait réduire à des difficultés d'ordre matériel ou à la seule inertie du corps enseignant, a conduit à accorder une attention croissante à des questions qui sont en quelque sorte de nature écologique : comment faire vivre les technologies informatiques dans l'institution scolaire ? Quelles sont dans ce domaine les pratiques viables et celles qui, en dépit de leur intérêt, ne peuvent dépasser le cercle des innovateurs ? Quels scénarios didactiques construire et comment assurer leur transmission efficace ? Nous avons aussi compris, semble-t-il, que la légitimité scientifique et sociale de ces technologies, aussi grande soit-elle, ne suffit pas à assurer leur légitimité didactique. Cette dernière est encore largement à construire et nous ne pouvons nous permettre, en étudiant les question d'intégration, de sous-estimer les problèmes que cela pose.

C'est dans ce schéma global d'évolution que s'inscrit notre recherche et le fait que les questions d'écologie et d'instrumentation y soient centrales n'est donc en rien le fait du hasard. Notre ambition est de contribuer à la compréhension des processus d'apprentissage possibles dans un environnement tel que celui offert par la TI-92, en étant attentifs aux problèmes cognitifs et institutionnels de l'intégration. Il est aussi d'élaborer des produits d'enseignement qui, tout en trouvant les moyens d'exploiter au maximum les potentialités offertes a priori par un tel instrument à l'enseignement et à l'apprentissage, ne soient pas trop éloignés de ce qu'est aujourd'hui la culture de l'enseignement, pour avoir quelque chance de pouvoir vivre et évoluer hors de la seule communauté des chercheurs et innovateurs dans ce domaine.

Nous en venons ainsi à la seconde partie de ce texte dans laquelle nous allons essayer de poser quelques jalons pour l'analyse de l'apprentissage instrumenté dans l'institution scolaire.

Quelques repères pour l'analyse de l'apprentissage instrumenté dans l'institution scolaire

Nous nous appuierons dans cette partie sur deux sources principales :

- les travaux en ergonomie cognitive [Rabardel 96], les chercheurs dans ce domaine étant depuis plus longtemps que nous confrontés aux problèmes d'apprentissage dans des environnements technologiques complexes, ceux de l'homme au travail,
- l'approche anthropologique du champ didactique déjà citée plus haut [Chevallard 91 92].

Ces ressources théoriques devraient, nous semble-t-il, permettre d'aborder mieux armés les question clefs suivantes :

- Quelles spécificités présentent les processus d'apprentissage en mathématiques mettant en jeu des objets technologiques complexes ?
- Comment prendre en compte la spécificité de l'environnement institutionnel concerné ici, à savoir l'école ?

Nous allons, dans ce qui suit, essayer de préciser brièvement ce à quoi nous sommes particulièrement sensible dans chacune de ces approches.

Les apports des travaux en ergonomie cognitive

Les travaux en ergonomie cognitive attirent notre attention sur un certain nombre de points. Nous en citerons ici quatre qui nous semblent, dans une première approche, incontournables.

1. Un objet technique n'est pas d'emblée un instrument, même si l'on tend à le considérer comme tel. C'est d'abord un objet, un artefact, selon la terminologie utilisée par Rabardel dans l'ouvrage déjà cité, pour rester le plus neutre possible. C'est dans l'évolution de nos rapports à l'objet que se construit l'instrument, au cours d'un processus de genèse instrumentale, en général complexe.

2. Cette genèse instrumentale est à la fois dirigée vers l'objet et le sujet, dans un double processus d'*instrumentalisation* et d'*instrumentation*. L'intrumentalisation, dirigée vers l'objet, conduit à le personnaliser, à le transformer éventuellement, à lui conférer des

fonctionnalités dont certaines pouvaient être a priori non prévues par le concepteur. Dans le cas d'une calculatrice comme la TI-92, la personnalisation sera par exemple visible dans la structuration et le contenu de la mémoire. L'instrumentation, dirigée vers le sujet, conduit à élaborer de façon autonome ou à s'approprier socialement des schèmes d'action instrumentée (schèmes, par exemple, associés à la recherche de limites qui ont été étudiés par L. Trouche dans sa thèse [Trouche 96] ou, plus globalement, à l'étude des fonctions, comme les a étudiés B. Defouad, dans le cadre de notre recherche).

3. Les schèmes sont pluri-fonctionnels. Mis en jeu dans des situations précises, ils aident à les comprendre (c'est là leur fonction *épistémique*), ils aident à agir, à transformer, à résoudre (c'est là leur fonction *pragmatique*), ils aident enfin à organiser et contrôler l'action (c'est là leur fonction *heuristique*).

4. L'activité instrumentée influe à la fois sur les modes d'accès aux connaissances et sur les connaissances élaborées elles-mêmes :

- d'une part, via les contraintes introduites par l'artefact, et il semble utile à ce niveau de distinguer entre les contraintes liées à la structure de l'artefact lui-même (les *contraintes internes*), celles liées aux actions et transformations qu'il permet (les *contraintes de commande*), celles enfin liées à la façon dont il tend à organiser l'activité (les *contraintes d'organisation*),
- d'autre part, via les potentialités nouvelles offertes à l'action du sujet par l'artefact.

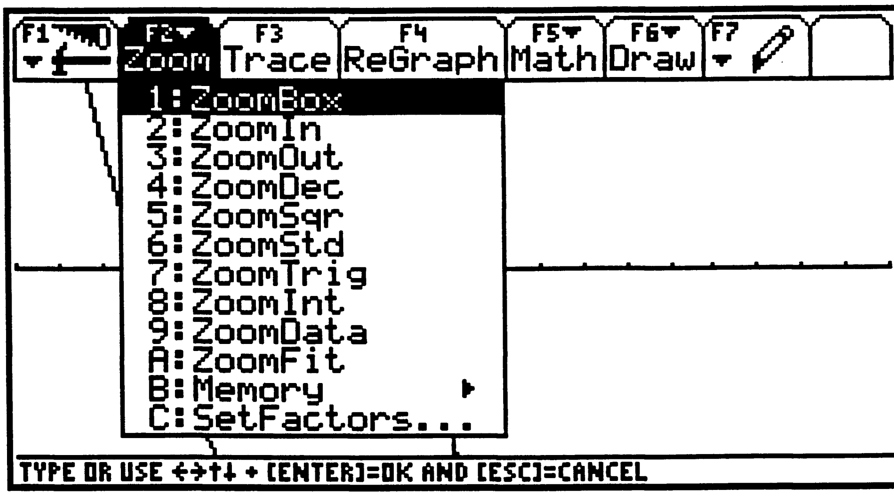
Il s'ensuit un rapport nécessairement dialectique entre instrumentation et apprentissage des mathématiques.

Un exemple : les schèmes de cadrage

Illustrons ceci par un exemple : celui du cadrage des fenêtres graphiques. Quelles sont les contraintes et les potentialités de la TI-92 dans ce domaine ? Que sait-on des processus d'instrumentation associés à ce type de tâche ? Existe-t-il des schèmes de cadrage ? Qu'est-ce qui les caractérise ? Quelles connaissances mathématiques les sous-tendent ?

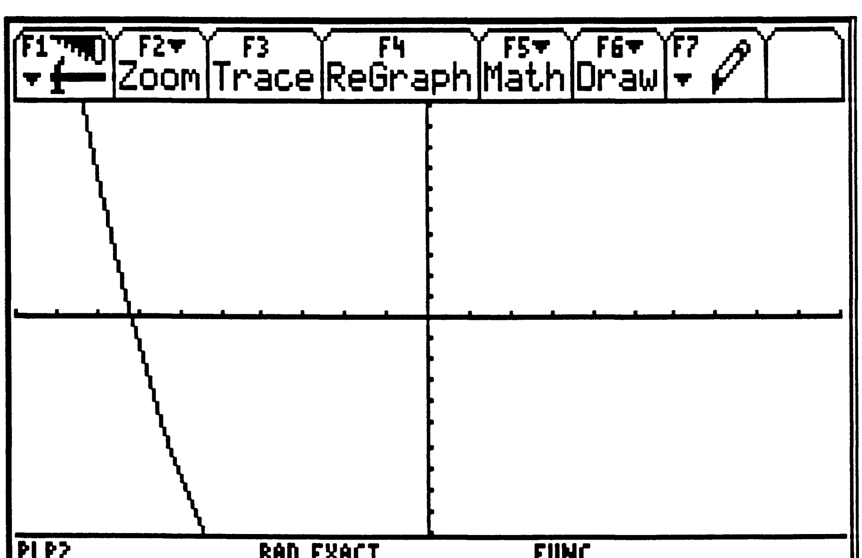
Les questions que nous posons ici, soulignons-le, ne se posent pas dans l'environnement papier/crayon. L'association fonction - représentation graphique y est en effet d'un fonctionnement beaucoup moins complexe, chaque objet fonctionnel disposant en quelque sorte d'une représentation générique qui en résume les traits mathématiques en fonction de codes pré-établis et n'est accessible qu'une fois l'objet fonctionnel étudié. Les technologies informatiques nous confrontent en revanche, de façon incontournable, au fait qu'à un même objet fonctionnel peuvent être associés des formes graphiques très différentes, d'emblée disponibles. Ces formes graphiques différentes sont liées bien sûr aux choix de cadrage mais aussi aux contraintes internes de la machine qui, fonctionnant avec un nombre donné de pixels, discrétise nécessairement l'objet fonctionnel.

Par ailleurs des calculatrices comme la TI-92 offrent de multiples potentialités au niveau du cadrage,comme le montrent les menus ZOOM des applications WINDOW et GRAPH, reproduits ci-après :



La plupart de ces potentialités sont d'ailleurs déjà disponibles sur les calculatrices graphiques actuelles.

La recherche menée a clairement montré que les élèves des classes expérimentales, bien que disposant pour la quasi-totalité d'entre eux de calculatrices graphiques depuis plus de six mois, n'avaient pas, à l'entrée en première S, élaboré de schèmes de cadrage efficaces. Les situations rencontrées l'année précédente ne le nécessitaient sans doute pas. Ceci est manifeste par exemple dans le premier entretien mené en 1995-96 où les élèves étaient confrontés à la fonction f suivante donnée par son expression algébrique : $f(x)=x(x+7)+ 9/x$. On leur demandait, dans un premier temps, de faire tracer par la machine une représentation graphique de cette fonction, en s'arrêtant lorsque celle-ci leur semblerait satisfaisante puis, dans un second temps, d'étudier cette fonction avec l'aide de la TI-92 et de vérifier a posteriori si les données issues de cette étude étaient cohérentes ou non avec le tracé déjà obtenu, sinon d'essayer d'interpréter les incohérences et de les surmonter. La fonction était bien sûr choisie pour nécessiter un travail de cadrage, le tracé dans la fenêtre standard de la machine étant le suivant :



Les élèves interrogés, après avoir défini la fonction dans l'application HOME ou l'avoir entrée dans l'application Y=, l'ont tous fait tracer dans la fenêtre standard. Ils n'étaient visiblement pas satisfaits du résultat obtenu mais, la plupart, après quelques essais de changement de fenêtre, sans stratégie précise, abandonnèrent, n'obtenant guère mieux. La TI-92 offre pourtant, vis à vis de ce problème, des possibilités multiples et peu coûteuses, dans les applications WINDOW et GRAPH, ou dans l'articulation de ces applications avec l'application TABLE qui permet d'obtenir aisément des valeurs numériques. La plupart étaient déjà disponibles sur leurs calculatrices graphiques antérieures, sans qu'il soit besoin de faire intervenir l'application HOME de calcul symbolique. Citons quelques unes de ces potentialités qui vont apparaître, au fil du temps, sans qu'il y ait forcément chez les élèves une stabilisation exprimable en termes de schèmes - la diversité des possibles faisant sans aucun doute ici obstacle à la stabilisation :

- agrandir brutalement la fenêtre puis cadrer en utilisant la commande ZoomBox sur une partie qui semble bien rendre compte des caractéristiques de variation de la fonction,
- explorer les valeurs numériques prises par la fonction dans l'application TABLE, en faisant varier à l'aide de TblSet l'initialisation et le pas, puis choisir une fenêtre adaptée aux variations numériques constatées,
- choisir un intervalle suffisamment grand sur Ox et utiliser la commande ZoomFit qui ajuste automatiquement l'intervalle sur Oy aux valeurs numériques prises par la fonction, pour les valeurs de x correspondant aux pixels de l'intervalle sur Ox.

Ces techniques ne garantissent pas de façon certaine, vu les contraintes internes de la TI-92, un tracé « conforme » aux variations réelles de la fonction, mais sont de fait efficaces, dès lors que les exemples choisis ne sont pas soigneusement construits pour les mettre en défaut. Elles peuvent paraître assez frustres et, pourtant, elles témoignent déjà de connaissances, en premier lieu de la prise de conscience du fait que la représentation graphique machine d'une fonction est dépendante et même « fortement » dépendante des fenêtres de tracé choisies. C'est là une connaissance en apparence banale mais qui, différents travaux de recherche le prouvent [Trouche 94], ne se construit pas dans l'environnement institutionnel usuel. Pour d'autres élèves, il y aura au delà de ce premier niveau de connaissance, celle des raisons de cette dépendance d'une façon permettant anticipations et contrôles. Mais il faut souligner que cet état ne s'atteint pas par la seule fréquentation des calculatrices graphiques dans des situations standard. Il nécessite une attention didactique particulière, des médiations de l'enseignant, comme le montrent les travaux de l'IREM de Montpellier cités ci-dessus. Nous voudrions aussi souligner le caractère contextualisé des connaissances ainsi construites, bien mis en évidence par la recherche. Ainsi avons-nous pu constater qu'à la fin de la première année d'expérimentation, les élèves de nos classes expérimentales s'étaient familiarisés avec certains effets graphiques de la discrétisation des tracés, par exemple ceux liés à la présence d'asymptotes verticales. Mais, confrontés lors du dernier entretien où ils avaient à étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\cos(2x)+1}$ à des phénomènes graphiques nouveaux (rupture apparente de périodicité, minima non atteints dans des situations de points anguleux), beaucoup se trouvaient fortement perturbés, ayant du mal à dépasser l'évidence graphique, incapables de reconnaître sans aide, dans ces phénomènes, un nouvel effet de la discrétisation des tracés.

Après cet exemple, revenant de façon globale aux questions d'instrumentation, nous voudrions pointer certaines limites que nous voyons sur le plan didactique aux outils d'analyse issus de l'ergonomie cognitive que nous avons présentés plus haut. Ces limites tiennent à la spécificité des apprentissages ici visés et au statut des instruments considérés. En effet, dans le monde du travail, les objets engagés dans l'activité, pour lesquels se posent des problèmes d'instrumentation, sont d'emblée des objets légitimes. Ce qui est en jeu, c'est la construction d'une activité instrumentée efficace par rapport à un certain nombre de situations professionnelles. Ainsi en est-il de la secrétaire qui apprend à se servir d'un traitement de texte ou du pilote d'avion qui apprend à utiliser de nouveaux instruments d'aide à la navigation. La transposition aux calculatrices et à l'institution scolaire (notamment celle de l'enseignant général, concernée par notre recherche) n'est en rien immédiate.

L'enseignement des mathématiques, en effet, est porteur de valeurs qui ne sont pas réductibles à la seule efficacité d'une activité mathématique instrumentée. Nous retrouvons ici les problèmes de légitimité didactique évoqués au début de l'exposé. Pour analyser les tensions qui en résultent, une approche anthropologique du didactique telle celle développée par Chevallard, déjà citée, nous semble utile.

Les apports d'une approche anthropologique du didactique

Cette approche attire en effet notre attention sur un certain nombre de points et nous fournit des moyens d'étude. Comme en ce qui concerne l'ergonomie cognitive, nous nous limiterons ici à quelques points qui nous semblent incontournables.

1. L'étude de l'apprentissage mathématique ne peut se faire sur un plan purement cognitif, en faisant abstraction des institutions dans lesquelles il s'inscrit. Les rapports personnels développés par les élèves, vis à vis des objets mathématiques ou des instruments de l'activité mathématique, sont conditionnés par les rapports institutionnels qui définissent les normes et valeurs de la connaissance.

2. Les objets mathématiques ne peuvent être considérés comme des absolus. Ce sont des émergents des ensembles de pratiques qui les mettent en jeu. L'analyse de ces pratiques, dans une culture ou une institution données, est donc essentielle et [Chevallard 98] propose de l'organiser en termes de tâches, de techniques (le terme étant ici à considérer dans une acception très large) développées pour résoudre les dites tâches, de technologies (à entendre, en revenant à l'étymologie, comme des discours d'explication et de justification des techniques), et enfin de théories (ayant dans cette classification le statut de technologies de la technologie).

3. Dans une institution donnée, certaines tâches demeurent problématiques, mais l'efficacité de l'activité, la progression des savoirs nécessitent la routinisation d'un certain nombre d'entre elles. Ces tâches routinières jouent d'ailleurs un rôle central dans l'évaluation des connaissances. Pour leur résolution, des techniques officielles sont introduites, institutionnalisées. Chevallard souligne que la routinisation s'accompagne d'un affaiblissement des technologies associées à ces techniques, pour des raisons de familiarité et d'efficacité aisément compréhensibles. De ce fait, les connaissances sous-jacentes tendent à se naturaliser, à devenir invisibles, à être considérées comme allant de soi.

Comment l'entrée d'un objet comme la TI-92 peut-elle s'effectuer dans de tels systèmes complexes ? Quelles transformations dans les pratiques cette calculatrice va-t-elle induire ? Comment seront affectées les techniques ? Qu'est-ce-qui sera routinisé, officialisé de l'action instrumentée et en fonction de quels critères ? Quels seront les contrats didactiques qui prendront cette activité instrumentée en charge et comment se négociera leur évolution au fil de l'avancée des connaissances ? Quelles technologies seront construites pour expliquer, justifier les techniques instrumentées ? Comment seront gérés les rapports entre techniques instrumentées et techniques officielles papier/crayon dont l'apprentissage sera considéré comme incontournable ? Il nous semble difficile de construire une intégration efficace, hors contexte expérimental, si l'on ne prend pas en charge de façon cohérente ces interrogations, si l'on ne conçoit pas de plus la genèse instrumentale individuelle dans ses rapports dialectiques avec la genèse instrumentale collective pilotée par l'enseignant au sein de la classe.

Nous voudrions brièvement illustrer ce qui précède par un exemple, analysé de façon détaillée dans le texte de B. Defouad, dans ces mêmes actes.

Un exemple : la variation des fonctions

Une tâche mathématique usuelle en première S est celle de l'étude des variations de fonctions. Amorcée en seconde sans calcul différentiel, en s'appuyant sur les fonctions de référence, elle se poursuit en première et la notion de fonction dérivée permet d'en faire une tâche routinière, pour des fonctions d'une complexité raisonnable. Dans l'enseignement papier/crayon, elle vit dans des contextes soigneusement calibrés pour que l'étude du signe de la dérivée ne pose pas de problème. Elle s'appuie de plus sur un ostensif spécifique : le tableau de variation. Comment peut s'organiser le rapport à cette tâche avec une TI-92, en jouant de façon efficace et cohérente sur les deux dimensions en interaction que sont la genèse instrumentale et la genèse mathématique ?

L'analyse du suivi des élèves montre bien l'interaction des deux genèses. Ainsi avons-nous été amenés à distinguer trois grandes catégories de techniques instrumentées :

- des techniques que nous avons qualifiées de techniques « pré-analyse ». Elles sont basées sur l'utilisation des applications GRAPH et TABLE, et sont en continuité directe avec les pratiques antérieures à l'enseignement de l'analyse. L'application de calcul formel HOME est peu sollicitée, en dehors du simple calcul des dérivées, et ne s'articule pas avec les autres applications.

- des techniques que nous avons qualifiées « d'intermédiaires », intégrant la notion de dérivée mais essentiellement au niveau graphique, après un calcul généralement effectué ou vérifié dans l'application HOME. Les théorèmes reliant signe de la dérivée et sens de variation sont ici mobilisés mais sur la base de l'évidence graphique du tracé de la dérivée, les résultats étant éventuellement contrôlés via l'obtention de valeurs dans TABLE, et pour certains dans HOME.

- des techniques « analyse », intégrant la notion de dérivée sur le plan symbolique et graphique, de façon articulée, qui montrent une reconstruction des rôles respectifs des différentes applications : d'applications dédiées à la résolution, les applications GRAPH et TABLE prennent ici le statut d'application dédiées à l'anticipation et au contrôle, l'application HOME couplée généralement avec le travail papier/crayon, devenant l'application principale dans l'étude des variations.

Soulignons que, contrairement à ce que l'on pourrait penser, le passage d'un type de techniques à un autre ne va pas de soi et, la première année d'expérimentation, un certain nombre d'élèves suivis individuellement avaient toujours, en fin d'année, recours majoritairement à des techniques intermédiaires, dès que la situation étudiée sortait du cadre des situations standard à ce niveau d'enseignement (c'était par exemple le cas lors du dernier entretien, avec la fonction définie par $f(x)=\sqrt{1+\cos(2x)}$). Soulignons aussi la très grande diversité rencontrée dans l'utilisation de la TI-92, sur l'ensemble des élèves, à l'intérieur de chacune de ces grandes catégories, et le fait, déjà mis en évidence par Trouche dans sa thèse, que ce ne sont pas nécessairement les élèves les plus favorables à l'utilisation de la TI-92 qui progressent le plus vite.

La diversité observée est sans aucun doute liée au grand nombre de possibilités offertes par la TI-92 pour gérer ce type de tâche. Mais elle a aussi à notre avis une composante institutionnelle. La diversité des techniques développées, visiblement bien supérieure à celle rencontrée en environnement papier / crayon, mais surtout la résistance de cette diversité à l'avancée de l'enseignement, tiennent aussi, nous semble-t-il, au statut particulier des techniques instrumentées, y compris dans les classes expérimentales suivies. Elles ont en effet visiblement du mal à prendre le statut de techniques officielles, elles restent plus facilement des techniques artisanales relevant du travail privé de l'élève. Elles entrent plus difficilement en jeu dans les processus d'institutionnalisation. Elles font plus difficilement l'objet d'un entraînement spécifique et, de ce fait, se stabilisent moins facilement. On pourra remarquer que ceci n'aide pas à la mise en place des technologies susceptibles de permettre leur justification et leur contrôle. Parmi d'autres ajustements sur lesquels nous reviendrons à la fin de ce texte, nous avons donné un caractère beaucoup plus officiel à l'instrumentation à la suite de la première année d'expérimentation et nous avons constaté des changements notables.

Dans la suite de ce texte, la présentation et l'analyse d'une ingénierie en Première S va montrer comment les principaux points que nous venons de mentionner interviennent dans les choix didactiques qui sous-tendent l'ingénierie.

L'enseignement de l'analyse en Première S avec calculatrices complexes

La recherche que nous présentons se situe dans le prolongement de celle que nous avons menée de 1993 à 1995 avec l'équipe DIDIREM sur l'intégration du logiciel DERIVE à l'enseignement des mathématiques [Artigue & al 95] ; c'est pourquoi ce sont les dimensions déjà présentes dans le logiciel DERIVE, c'est à dire les dimensions de calcul symbolique et de représentation graphique qui ont plus spécialement été prises en compte.

Comme nous l'avons dit dans les deux premières parties de ce texte, nous n'attendons pas de l'intégration d'instruments de calcul formel des remèdes automatiques à des difficultés de l'enseignement ou des élèves. Avec la TI-92, l'enseignement des mathématiques change, mais ce changement n'a pas mécaniquement un effet bénéfique sur l'apprentissage. Pour que la calculatrice serve à l'apprentissage il est nécessaire de construire les conditions pour que ses potentialités puissent être exploitées et que les contraintes et phénomènes qu'elle induit soient pris en compte. Cette nécessité nous a conduit à l'élaboration d'un projet global d'enseignement de l'analyse en première S avec calculatrice.

Nous avons travaillé deux ans de suite avec Michèle Dupérier et Guy Juge dans leurs classes, et Badr Defouad a travaillé avec nous aux observations et au suivi des élèves. Cette recherche a été financée par le MEN, DISTEN B2, et chaque élève des deux classes était équipé d'une calculatrice TI-92 pour l'année, qu'il pouvait considérer comme la sienne. La complexité des processus en jeu, que nous avons soulignée dans les parties précédentes de ce texte, nous a conduit à recueillir et à croiser l'analyse des données diversifiées obtenues à partir de trois sources :

- l'observation régulière de séances portant sur l'enseignement de l'analyse dans deux classes de première S deux années de suite,
- le suivi des élèves par le biais de trois questionnaires par an,

- le suivi par entretien d'un nombre plus limité d'élèves choisis pour présenter des profils diversifiés tant dans leur rapport aux mathématiques que dans leur rapport aux technologies informatiques[1].

L'année 1995-96, a été une année de pré-expérimentation. Au contact de la réalité des classes, nous avons cherché de quelle façon les potentialités de la TI-92 pouvaient s'observer et comment nous pouvions aborder les questions de viabilité soulignées dans la deuxième partie. Pendant l'année 1996-97, nous avons mis en place et testé systématiquement les différentes étapes du projet global d'enseignement de l'analyse en première S.

Le projet ainsi élaboré et testé, constitue une ingénierie et non une proposition d'enseignement figée. Nous souhaitons offrir à chaque enseignant intéressé les moyens de l'adapter aux réalités de sa classe et à son propre style, tout en en conservant l'esprit[2]. C'est pourquoi, dans la présentation qui suit, nous essayons de mettre en évidence les choix didactiques qui sous-tendent le projet, ainsi que les variables décisives dans la mise en place des situations.

Précisons dès maintenant que deux dimensions interviennent dans ces choix. La première est notre connaissance des phénomènes liés à l'intégration de la TI-92 et, plus largement, des technologies informatiques dans l'enseignement. La seconde dimension est constituée de certains acquis de la recherche en didactique de l'analyse. Ces deux dimensions interviennent souvent de façon imbriquée, mais, pour la clarté de la présentation, nous expliciterons d'abord au paragraphe suivant les principes qui ont guidé l'intégration, avant de détailler, dans les trois derniers paragraphes de cette partie, l'analyse didactique des contenus à enseigner et les décisions qui en découlent. Les choix sont présentés dans cette partie de façon globale. Dans la quatrième partie, nous montrons comment ils s'actualisent dans quelques situations-clé ainsi que dans l'organisation de la progression.

Un projet robuste instrumentant la TI-92 dans toutes ses fonctionnalités

La recherche sur DERIVE nous avait fait apercevoir les limites structurelles de tentatives d'intégration « discontinue » de ce logiciel[3]. Ces tentatives tendaient à privilégier des situations « riches », tant d'un point de vue mathématique que dans l'utilisation du logiciel : le professeur souhaite exploiter pleinement la séance pour faire rencontrer aux élèves des aspects nouveaux des notions via une utilisation intensive du logiciel. La contrepartie est que ces séances restent marginales par rapport au quotidien de l'enseignement : les situations sont trop différentes du travail habituel et les techniques[4] liées à l'utilisation du logiciel n'ont guère l'occasion d'être réinvesties. L'élaboration d'un projet global d'enseignement de l'analyse avec la TI-92 nous place dans une perspective nouvelle : la calculatrice est un objet

---

1 Nous voudrions remercier tous ceux qui nous ont aidés à la réalisation de cette étude et notamment les élèves qui ont accepté, avec tant de gentillesse, notre intrusion dans leur travail privé lors des observations, ainsi que dans les entretiens.

2 Nous faisons l'hypothèse que cette adaptation est possible, au moins pour une classe de Première S. Pour d'autres sections, il faudrait sans doute réfléchir à nouveau aux conditions de viabilité d'une intégration, ainsi qu'aux choix didactiques à opérer en fonction des rapports aux champs de l'analyse que l'on souhaiterait voir les élèves développer.

3 Dans la quasi-totalité des classes observées, l'utilisation du logiciel se faisait en salle informatique, avec des fréquences variables, mais dépassant rarement une séance par mois.

4 Au sens de [Chevallard 92], voir partie II.

quotidien et la possibilité existe que les schèmes et techniques associés se construisent et s'éprouvent dans la pratique ordinaire des mathématiques, en interaction avec le travail en papier/crayon. De plus, la calculatrice rétro-projetable actionnée par l'enseignant ou par un « sherpa » [Trouche, ces actes] permet un travail collectif, qui existe plus difficilement dans l'utilisation de logiciels [Lagrange 97].

Pour que ces possibilités s'actualisent, nous avons cherché à exploiter au maximum la TI-92 tout en faisant le lien avec le papier/crayon : la calculatrice est présente dans presque toutes les séances, mais il n'y a pas de séance où elle est utilisée exclusivement. S'agissant de l'enseignement de l'analyse, l'élément nouveau et central de cette calculatrice est le module Home pour ses possibilités de calcul symbolique et approché, mais les modules graphiques et numériques existent comme dans les calculatrices non symboliques, et ils sont impliqués dans la genèse instrumentale. Par exemple, nous avons souligné dans la partie II la complexité des schèmes de cadrage et leur importance pour une pratique raisonnée du module graphique. L'instrumentation de ce module a pu être abordée en Seconde avec une calculatrice graphique, mais elle est loin d'être achevée en classe de Première. De même, les élèves ont commencé à travailler l'algèbre dès le collège, mais ils rencontrent encore beaucoup de difficultés et l'instrumentation du module HOME suppose le développement de schèmes dans ce domaine. Notre projet prend en compte ces différents domaines d'instrumentation dans leur genèse. Un travail sur l'algèbre prépare les élèves à l'analyse en même temps qu'il leur permet de prendre conscience des possibilités numériques, graphiques et algébriques de leur calculatrice. Des techniques instrumentées sont ainsi développées. Elles sont officialisées puis mises en oeuvre pour aborder les notions d'analyse. Ensuite, les fonctionnalités de la TI-92 propres à l'analyse sont introduites après que ces notions aient commencé à prendre sens. Elles permettent de construire des propriétés nouvelles de ces notions et de les utiliser dans des problèmes.

Sur un plan plus général, notre projet vise à définir des pratiques viables au delà du cercle des innovateurs et nous savons (partie I) que cela ne va pas de soi. Nous avons essayé pour cela de bien mesurer deux types de complexité dans les situations : la complexité technologique et la complexité cognitive. Beaucoup d'enseignants et d'élèves souhaitent en priorité développer la connaissance de la machine qui leur est nécessaire pour une utilisation efficace dans le travail mathématique. Nous avons donc défini les tâches en pensant à eux plutôt qu'aux « experts » attirés par les fonctionnalités les plus sophistiquées. Il nous a fallu aussi prendre garde à une certaine illusion de réduction de la complexité cognitive induite par les potentialités de la TI-92. Considérons par exemple l'introduction d'une notion nouvelle en analyse. Dans la pratique habituelle, le temps consacré aux calculs limite nécessairement le nombre de points de vue présentés pour donner sens à cette notion. L'enseignant est de plus attentif à ce que la complexité technique des activités proposées n'en occulte pas le sens. En revanche, lorsque les élèves disposent d'un outil comme la TI-92 ou DERIVE sur ordinateur, l'enseignant peut être tenté de multiplier les approches dans un temps très court et d'ignorer la complexité technique des calculs puisque ceux-ci seraient pris en charge par la machine. Nous avons constaté [Lagrange & Juge 98] une certaine inefficacité de ces situations. L'élève est souvent perdu dans la multiplicité des points de vue simultanément abordés. Dans la mesure où il parvient à saisir les détails des activités proposées, il peut utiliser les fonctionnalités de la machine pour les « suivre » pas à pas. Il développe ainsi un travail effectif, mais plutôt orienté vers l'exécution, et dont le sens global lui échappe.

Les situations que nous présentons ont mutatis mutandis la même complexité cognitive que les situations habituelles. La TI-92 sert aux calculs, mais du temps est consacré à une réflexion sur ces calculs. Les phénomènes de divergence entre le traitement par la machine et le traitement ou les représentations habituels sont utilisés pour motiver un travail mathématique en lien avec les apprentissages visés. Ainsi, la genèse instrumentale peut se développer conjointement avec les apprentissages.

Analyse didactique des contenus à enseigner

Pour situer l'analyse didactique des contenus à enseigner, nous nous aidons du Tableau 1 adapté de [Tall 96]. Il présente les rapports possibles aux objets de l'analyse en distinguant différents niveaux[5]. Le rapport «enactive» aux phénomènes fonctionnels (dépendance, limites...) ou différentiels (accroissements, extremums...) se situe au niveau des connaissances quotidiennes ou construites antérieurement. Dans ce rapport, l'élève fait fonctionner des connaissances «en acte», comme s'il savait de l'analyse, mais en utilisant seulement les modes d'expression et de raisonnement qui lui sont familiers. L'étude du langage des limites, explicitement au programme de première S, donne par exemple une première signification à cette notion en travaillant sur les formulations à partir d'exemples divers explorés numériquement et graphiquement : les élèves précisent leur idée de la limite, passant d'une formulation du type «f(x) se rapproche de zéro quand x se rapproche de zéro» à «f(x) est aussi près qu'on le veut de zéro pourvu que x soit suffisamment proche de zéro». L'élève travaille alors la notion de limite, mais sans l'exprimer à ce stade dans un registre calculable, ce qui est bien représentatif d'un rapport « enactive ». De même, la vitesse instantanée existe dans les représentations familières des élèves et l'élève peut, dans ces représentations, considérer des phénomènes différentiels, comme par exemple le lien entre la progression d'un mobile et sa vitesse. La tangente fait partie des objets géométriques différentiels déjà rencontrés par les élèves, principalement dans le cas particulier du cercle. Les élèves ont donc une certaine connaissance de cet objet qu'il est nécessaire et intéressant de dépasser, comme nous le verrons dans la suite.

Rapport	«Enactive »	«Manipulative »	«Formel»
Niveau	Real Word Calculus	Theoretical calculus	Analysis
Limite	Langage des limites	Approche numérique et graphique des limites. Calcul symbolique de limite	Définitions formelles, Démonstration de théorèmes
Dérivée	Cinématique « quotidienne » Objets géométriques différentiels « déjà rencontrés »	Approche graphique et symbolique du nombre dérivé. Calcul symbolique de fonctions dérivées	

Tableau 1 Les rapports aux objets de l'analyse

Le rapport « manipulative » de la partie centrale est celui que l'analyse du lycée cherche à mettre en place. A ce niveau l'accent est mis davantage sur le fonctionnement des objets que sur leur définition et leur statut théorique. En revanche, dans le rapport « formel », les objets et les notions sont assujetties à des définitions sur la base desquelles se construisent les preuves. Le plus souvent, l'élève découvre vraiment l'analyse formelle seulement en entrant à l'université, ce qui crée pour lui une rupture importante avec l'analyse du secondaire.

[5] Nous avons préféré conserver les termes anglais qui n'ont pas de correspondant immédiat en français.

Sans vouloir, dès la classe de première, préparer l'élève à cette rupture, il nous semble qu'il doit être possible de concevoir à ce niveau des éléments de la technologie[6] qui fonde l'application des limites et dérivées[7].

Dans ce rapport « manipulative », la recherche en didactique de l'analyse a montré le poids exercé sur les conceptions des élèves par les référents disponibles, notamment les fonctions auxquelles les techniques d'analyse sont appliquées et qui tendent à exister comme prototypes. Un système de référents trop pauvre peut ainsi se constituer en obstacle. Il nous semble par conséquent souhaitable de ne pas limiter l'application à une classe trop restreinte de fonctions, et donc d'envisager des fonctions trigonométriques, ou avec paramètres susceptibles d'étendre le champ des référents disponibles.

Comme on le voit dans ce tableau, les concepts d'analyse vivent de façon variée dans les différents rapports et niveaux, et nous pensons qu'un élève ne peut vraiment les comprendre que si il les aborde effectivement dans ces différents modes en interaction. De plus, dans chaque mode, différents registres de représentations[8] (numérique, graphique, symbolique) interviennent et nous avons souligné (partie I) l'importance d'un travail intra et inter registres.

C'est pourquoi nous avons fait le choix d'écarter deux stratégies. La première est souvent rencontrée, indépendamment de la présence ou non d'un instrument de calcul symbolique. C'est une progression qui sépare une introduction des concepts en tant qu'objet et une utilisation de ces concepts comme outil[9] pour la résolution de problèmes. Dans l'introduction, le rapport « enactive » fonctionne, par exemple dans le cas des dérivées, dans des situations cinématiques ou géométriques. A partir de ces situations le nombre dérivé est introduit comme limite du taux de variation. Ensuite, la dérivation apparaît comme un outil pour l'étude de variations et cette introduction est oubliée. L'activité principale de l'élève devient le calcul symbolique de la fonction dérivée, la détermination et l'interprétation de son signe en termes de variations. Les représentations numériques ou graphiques peuvent certes être présentes, mais elles restent subordonnées aux manipulations symboliques. Dans cette séparation entre l'introduction comme objet et une utilisation comme outil pour l'étude de variations, les élèves retiennent finalement surtout l'aspect symbolique de la dérivation (les règles de dérivation du produit, de la somme...) davantage que les significations qu'ils ont pu construire dans l'introduction. Un instrument comme la TI-92 peut renforcer cette domination du symbolique si les élèves associent trop systématiquement une notion d'analyse à la fonctionnalité correspondante de la machine : nous avons vu, par exemple, lors de la première année d'expérimentation des élèves utiliser leur machine pour calculer des limites ou des dérivées qu'ils auraient pu obtenir par un raisonnement très simple.

La seconde stratégie que nous écartons peut, elle, exister sous l'influence directe de l'existence d'instrument de calcul symbolique. Elle se rencontre explicitement dans des publications sur DERIVE comme proposition d'enseignement pour des filières techniques

---

6 Au sens de [Chevallard 92], voir partie II.

7 A titre d'exemple, il peut sembler difficile d'aborder la démonstration d'une propriété comme la dérivation d'un produit de fonction. En revanche, il paraît intéressant d'établir la consistance entre cette propriété et d'autres propriétés que les élèves ont pu établir directement comme la dérivation de la fonction $x \to x^2$, ou la dérivation du produit d'une fonction par une constante.

8 Dans le tableau initial, David Tall distingue ces registres seulement dans le « theoretical calculus ».

9 Outil et objet sont à prendre au sens de [Douady 86].

(par exemple, [Watkins 92]). C'est une introduction purement symbolique des concepts. Par exemple, la dérivation, dans cette introduction, est simplement ce que produit l'application de la touche dérivation de la calculatrice. A partir de cette introduction, les élèves observent des propriétés relatives aux variations, en comparant les représentations graphiques de la fonction et de la dérivée ainsi obtenue, ou des règles formelles comme celles concernant la dérivation de x^n, faisant ainsi le lien avec certains aspects des autres représentations. Il y a alors, pour nous, un danger que la signification symbolique manipulatoire de la dérivation masque les autres significations, puisque c'est la première construite et qu'elle suffit pour résoudre la quasi totalité des problèmes courants à ce niveau. Elle pourrait ainsi se constituer en obstacle.

Choix didactiques pour un apprentissage de l'analyse avec instrument

	Fonctionnement	Rapport aux objets « Enactive »	« Manipulative »	« Formel »
Introduction	Objet	Langage des limites, tangente	Travail numérico-graphique (TI-92=calc. graphique) Travail symbolique (TI-92=calc. symbolique)	
Propriétés algébriques			Recherche de propriétés formelles. (TI-92 « boîte-noire symbolique » avec contrôle « sémantique »)	
Etude de fonctions	Outil	Optimisation	Etude numérico-graphico-symbolique de cas numériques	
			Optimisation avec généralisation	
Cinématique	Objet	Graphe déplacement/temps		
Réinvestissement	Outil	Recherche de fonctions sous contraintes		

Tableau 2 Nos choix

Nos choix et les étapes de l'ingénierie s'expriment dans le Tableau 2 ci-dessus. A chaque étape, nous faisons travailler les élèves dans les différents rapports et registres, avec l'aide de la TI-92. Les élèves abordent les notions dans un rapport « enactive » que les phénomènes graphico-numériques explorés avec la TI-92 permettent de questionner. Le passage au registre algébrique symbolique, où la TI-92 intervient aussi, contribue à élucider les phénomènes et un nouveau rapport peut alors se développer. Par exemple, dans l'introduction des limites, pour passer de «f(x) se rapproche de zéro quand x se rapproche de zéro» à «f(x) est aussi près qu'on le veut de zéro pourvu que x soit suffisamment proche de zéro», l'étude numérico graphique d'exemples et de contre-exemples montre l'insuffisance de la première formulation. Le calcul algébrique est également utile, dans le registre symbolique, par exemple pour résoudre des inéquations telles que $|f(x)| < 10^{-n}$ pour des valeurs croissantes de n, afin donner du sens à «aussi près qu'on le veut de zéro». De même, les élèves conçoivent la notion de tangente à partir des significations construites antérieurement pour le cercle, mais la visualisation graphique sur la TI-92 montre la difficulté à cerner cette notion aussi bien au niveau « enactive » que par des manipulations graphiques. L'expression dans le registre symbolique permet de clarifier la notion de tangente et de lui donner une signification plus générale.

Nous faisons le choix de ne pas utiliser la cinématique dans l'introduction de la dérivation. La première raison de ce choix est notre volonté, exprimée plus haut de proposer aux élèves des situations dont la complexité cognitive soit supportable. En effet comme le souligne [Schneider 89], la notion de vitesse instantanée n'est pas aussi accessible aux élèves qu'on pourrait le croire, et donc une introduction du nombre dérivé par la cinématique ferait intervenir deux notions difficiles et nouvelles. Nous souhaitons par ailleurs éviter que dans de la progression, le rapport « manipulative » s'impose en empêchant l'élève de coordonner les différents rapports. Il est souhaitable par exemple que l'élève voie la croissance des fonctions sous l'angle mathématique des graphes de fonction et de la positivité de la dérivée, mais aussi qu'il fasse le lien avec la conception familière des phénomènes d'accroissement. C'est pourquoi il nous semble intéressant que des objets avec lesquels l'élève entretient un rapport « enactive » puissent être abordés assez tard dans l'année, à un moment où les divers rapports peuvent exister et être coordonnés. Nous introduisons donc la dérivation seulement à partir de la notion de tangente, mais ce choix implique que cette notion soit retravaillée comme nous allons le montrer plus loin.

Les propriétés algébriques des limites et des dérivées constituent pour les élèves une nouvelle étape dans leur construction de nouveaux rapports aux objets de l'analyse. Elles permettent à la fois le calcul pratique de limites et de fonctions dérivées (rapport « manipulative ») et une première rencontre avec des théorèmes en analyse (rapport « formel », voir note 7). Dans cette étape, les élèves vont faire fonctionner la calculatrice en « boîte noire symbolique ». Plus haut dans ce texte, nous avons écarté ce fonctionnement dans l'introduction des notions, comme trop réducteur. Il nous semble que ce fonctionnement est en revanche producteur quand les élèves ont commencé à construire certaines significations des notions. En effet, les phénomènes observés sur la TI-92 sont d'autant plus intéressants qu'ils peuvent être mis en rapport avec ces significations[10].

Pour [Douady 86], la dialectique outil-objet est un des fonctionnements des concepts qui permettent de restituer un sens aux outils que les élèves mettent en oeuvre. Cette dialectique reconstitue dans les apprentissages scolaires l'« imbrication étroite du développement (historique) suivant les deux pôles (outil et objet) » dont parle [Artigue 94]. Pour que cette dialectique puisse exister, nous avons voulu que les concepts fonctionnent en privilégiant alternativement un des deux pôles. Ce choix apparaît dans la seconde colonne du Tableau 2 : la dérivation, par exemple, est étudiée pour elle-même dans son introduction et la mise en place de propriétés algébriques. Après cette étude, il est temps de constituer cette notion en outil, faute de quoi elle ne pourrait longtemps exister dans des situations problématiques à ce niveau. Comme dans beaucoup d'autres approches, les problèmes d'optimisation donnent du sens à l'étude de variations, et le pôle outil de la dérivation y est privilégié. Dans le cas des fonctions numériques, les élèves ont eu antérieurement une

---

[10] Considérons par exemple, la propriété suivante

Pour une fonction *f* définie et non nulle au voisinage de *a*, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}=0$

Cette propriété peut être vue d'un point de vue purement symbolique ($\frac{1}{\infty}=0$). Elle prend un autre sens si on la relie à l'observation « enactive » selon laquelle l'inverse d'une fonction « aussi grande que l'on veut » peut être rendue « aussi petite que l'on veut ». Un autre exemple est le lien entre la dérivation de la fonction qui à *x* associe *f(x+a)* et l'observation graphique que la pente de la tangente est conservée par la translation qui transforme le graphe de cette fonction en celui de *f(x)*.

approche graphico-numérique, et dans certains cas algébrique, des problèmes de variation. La dérivation va leur permettre de trouver directement des solutions exactes et de systématiser une procédure de résolution. En proposant ensuite des problèmes d'optimisation où certaines données sont paramétriques, nous souhaitons que l'efficacité de cette procédure apparaisse dans une situation où l'approche graphico-numérique n'est pas possible et instituer ainsi la dérivation comme un outil pertinent d'étude de variations. Ces problèmes constituent de plus un premier pas vers la généralisation, l'optimum paramétrique obtenu ayant un sens différent des optimums numériques habituels.

Ensuite, à un moment où le caractère outil de la dérivation pourrait faire oublier les aspects conceptuels de la dérivation, le travail en cinématique constitue un retour au pôle objet[11]. De plus, le rapport « enactive » aux objets cinématiques est, comme nous l'avons souligné ci-dessus, particulièrement présent et intéressant à confronter aux rapports nouvellement construits. Ce retour au pôle objet remet aussi l'accent sur le nombre dérivé à un moment où cette notion a tendance à être oubliée, les propriétés algébriques et l'étude de variations mettant l'accent sur la fonction dérivée. Ce travail permet donc aux élèves à la fois de reconsidérer la notion familière de vitesse instantanée en la reliant au concept de dérivée et de donner à ce concept une signification supplémentaire. A la fin de la progression, les réinvestissements sont des temps de synthèse, où le pôle outil est à nouveau privilégié, faisant interagir les différents registres et rapports.

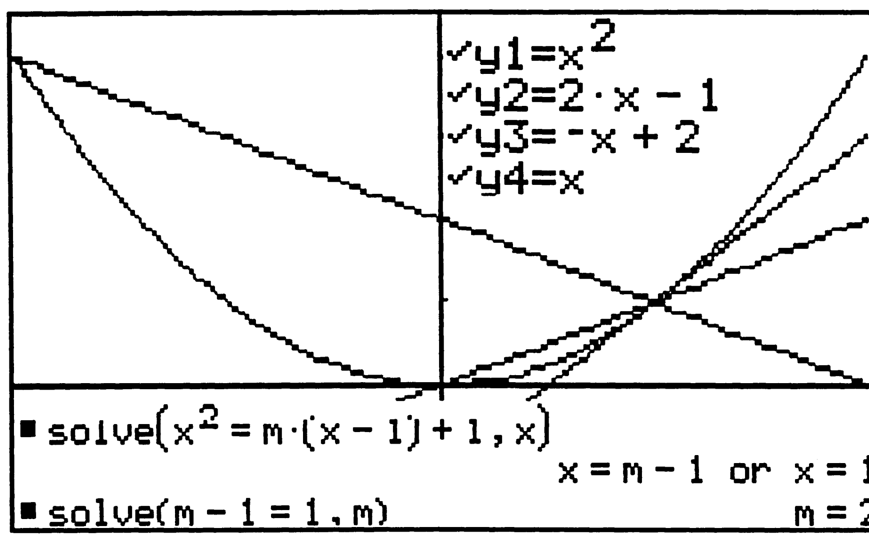
Les «reconstructions»

Un autre point sur lequel il faut insister dans les premiers apprentissages en analyse est la nécessité d'une reconstruction dans certains domaines que les élèves ont travaillé antérieurement. Cela concerne tout d'abord l'algèbre que les élèves ont commencé à travailler au collège, mais dans lequel ils rencontrent encore beaucoup de difficultés. Il faut donc encore développer leurs compétences dans ce domaine, et, nous allons le voir, des activités sur TI-92 peuvent aider à développer des schèmes algébriques (en particulier instrumentaux) indispensables à la pratique de l'analyse. Une autre particularité de l'analyse est que le travail algébrique change aussi de nature. [Legrand 93] a montré comment l'entrée dans l'analyse suppose une reconstruction complète des rapports à l'algébrique et en particulier à l'égalité. Dans la résolution d'équation, qui est le domaine principal d'application de l'algèbre jusque là, les élèves avaient à traiter des conditions équivalentes. En analyse, en revanche, les élèves abordent des raisonnements basés sur la perte contrôlée d'information dans le traitement d'inégalités et donc les conditions suffisantes priment. La TI-92 peut soutenir ce difficile passage, en particulier si des schèmes d'interaction entre le graphisme et le calcul symbolique ont été développés. Par exemple, le travail sur la notion de limite nulle en un point pour une fonction f donnée, suppose la recherche de conditions suffisantes pour que $|f(x)| < 10^{-n}$ pour des valeurs croissantes de n. Une résolution algébrique ou approchée, à l'aide de la TI-92 est

[11] [Artigue 94] précise que le caractère objet peut s'apprécier sous l'angle du statut (institutionnel) et sous l'angle du fonctionnement. Nous considérons ici ce dernier angle que M. Artigue décrit de la façon suivante : « on peut considérer qu'il y a objet lorsque l'outil est travaillé en tant que tel (...) il y a (aussi) fonctionnement de type objet lorsque l'outil est systématiquement intégré à des pratiques constituées par ailleurs, pratiques qu'il permet de généraliser ». Les différentes occurrences du fonctionnement « objet » des concepts d'analyse dans le tableau correspondent bien à cette définition : travail sur le concept dans les propriétés algébriques, intégration à des pratiques constituées pour la cinématique.

dans la continuité de l'algèbre des équations. Elle donne souvent un ensemble solution peu manipulable. Une visualisation graphique permet de restreindre à un intervalle solution[14].

La notion de tangente est importante dans notre ingénierie, puisque la situation choisie pour l'introduction de la dérivation s'appuie sur cette notion. Précisons en quoi une reconstruction est nécessaire et comment nous la prévoyons. Dans la géométrie que les élèves connaissent, la tangente est une droite qui coupe la courbe en un seul point. Les élèves le savent à partir de leur connaissance de la tangente au cercle, mais ils ont pu conforter cette conception de façon plus algébrique avec la tangente à la parabole. Si ils ont cherché, comme dans le premier écran ci-dessous, l'intersection de la courbe représentative de la fonction qui à x associe x^2, et d'une droite de coefficient directeur paramétrique m passant par un point de cette parabole, ils ont trouvé en général deux points, qui se confondent pour une valeur unique du coefficient directeur. Parallélement, les élèves ont pu aussi se construire une représentation de la tangente comme «la droite qui touche tout en restant du même côté».

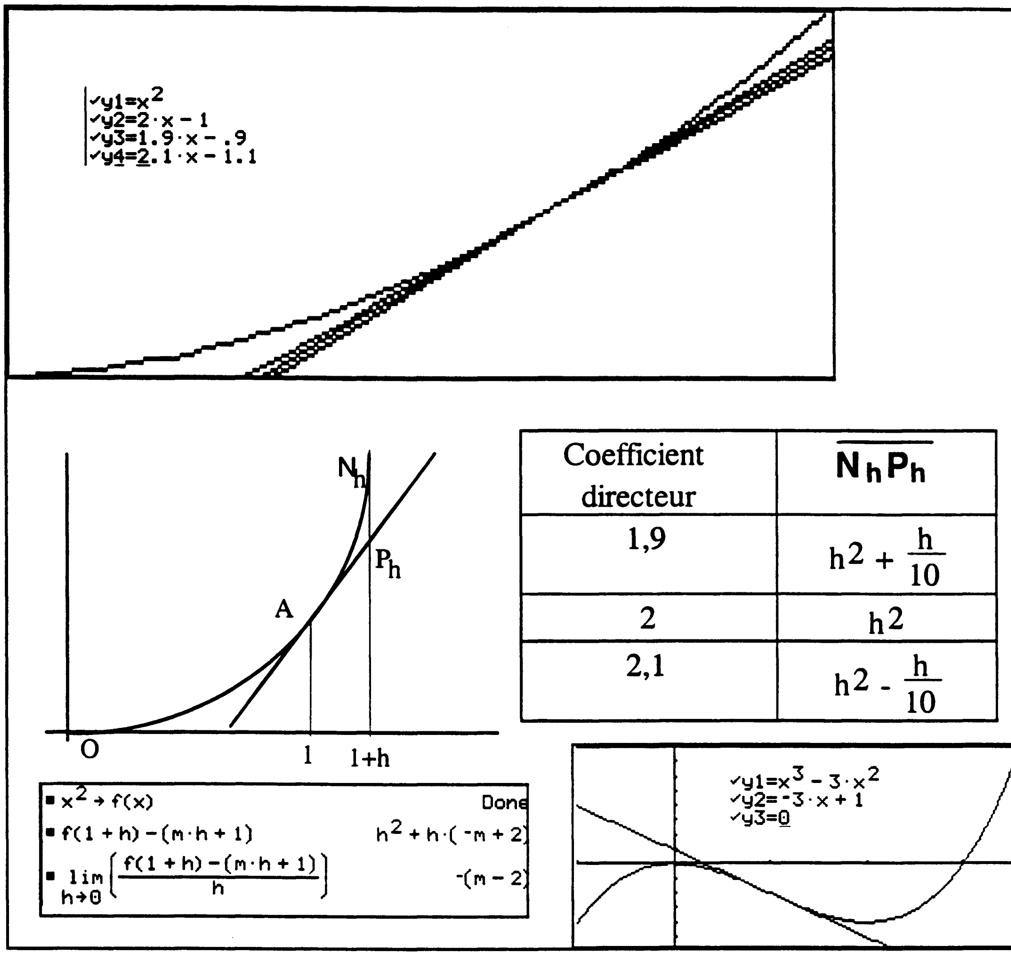


Comme [Castela 95] le souligne, cette conception n'est pas suffisante pour comprendre les rapports entre tangente et dérivée. En analyse, la tangente, qui était un objet global dans ses rapports à la courbe, doit devenir un objet local. Il faut donc abandonner l'idée que la propriété de « couper en un seul point tout en restant du même côté de la courbe » caractérise la tangente, et intégrer la direction commune comme propriété caractéristique. C'est pourquoi nous choisissons, dans l'introduction de la dérivation, de mettre l'accent sur la tangente comme la droite «qui s'adapte le mieux», ce qui est aisé à visualiser avec les modules géométrique et graphique de la TI-92. Nous utilisons aussi la TI-92 pour questionner cette proximité entre droite et courbe. En effet, les seuls critères perceptifs ne permettent pas de discriminer la tangente parmi des droites de coefficients directeurs proches. Ceci montre le besoin d'une expression algébrique de ce critère qui conduit à la notion de dérivée comme limite.

---

[14] Par exemple l'ensemble des réels x non nuls tels que $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 10^{-1}$ est la réunion de plusieurs intervalles disjoints. Graphiquement, il est clair que l'appartenance à l'intervalle $\left[-10^{-1};10^{-1}\right]$ est suffisante, ce que confirme le raisonnement algébrique.

Les écrans de la figure 1 correspondent aux étapes de cette introduction. Le premier écran montre le phénomène perceptif. Plus bas, la figure montre comment est mesurée la distance entre la droite et la courbe. Les expressions de cette distance pour trois valeurs du coefficient directeur sont donnés dans le tableau adjacent. Dans ce tableau, la droite de coefficient directeur 2 se singularise en étant la seule pour laquelle cette distance est négligeable devant la variable h. L'écran Home en bas à gauche montre comment cette singularité peut s'exprimer en terme de limite. L'écran graphique en bas à droite illustre pour terminer un cas où il y a plusieurs points d'intersection entre la tangente et la courbe, et où la tangente traverse la courbe qui permet de reprendre l'étude précédente avec plus de généralité.



Coefficient directeur	$\overline{N_h P_h}$
1,9	$h^2 + \frac{h}{10}$
2	h^2
2,1	$h^2 - \frac{h}{10}$

Figure 1 : les étapes de l'introduction du nombre dérivé

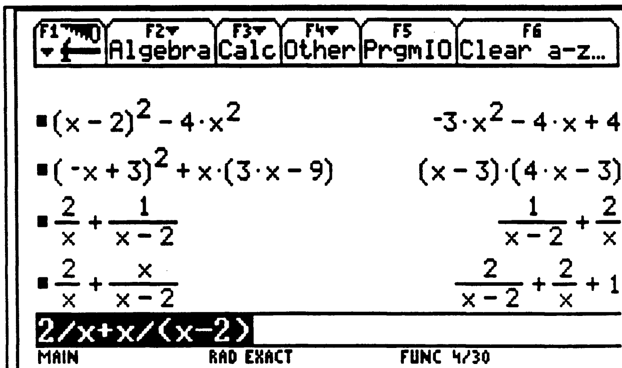
Les étapes de l'ingénierie

Dans cette partie, nous allons illustrer les choix liés à l'intégration de la TI-92 et à l'analyse didactique des contenus à enseigner en montrant comment ils s'actualisent dans quelques situations-clé de l'ingénierie. Nous présentons tout d'abord le travail algébrique et fonctionnel, puis l'introduction des concepts d'analyse (limites et dérivation) et certaines de leurs applications.

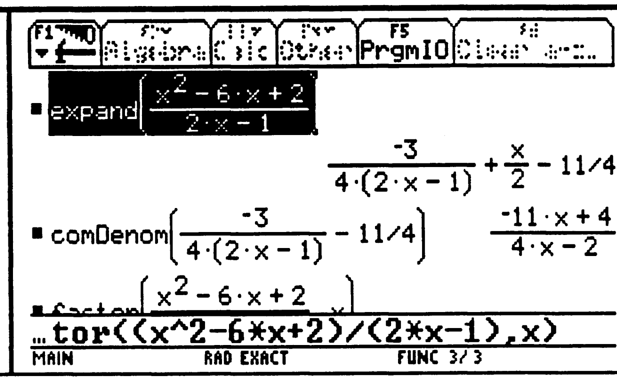
Le travail algébrique préparatoire à l'analyse

Il prend en compte ce que nous avons dit plus haut sur les compétences des élèves et leur nécessaire consolidation et évolution. Nous nous sommes inspirés des séances développées à Montpellier [Delgoulet & Guin 97]. En même temps qu'une consolidation de l'algèbre de seconde, ce travail est aussi une initiation aux fonctionnalités algébriques de la

TI-92 visant à développer des schèmes algébriques instrumentaux. Dans ces schèmes, l'équivalence des expressions algébriques est un invariant essentiel. La reconnaissance et l'utilisation de cet invariant se pose en des termes renouvelés avec la TI-92. En effet cette calculatrice évalue automatiquement les expressions entrées et cette « simplification » produit des formes qui ne correspondent pas nécessairement aux standards scolaires. L'élève doit donc savoir reconnaître la même expression sous des formes très diverses, développer des formes de contrôle efficaces, savoir adapter la forme aux nécessités du calcul. Les deux écrans suivants illustrent quelques tâches proposées aux élèves dans une séance centrée sur ces questions d'équivalence.



Ecran A



Ecran B

Les élèves avaient d'abord à entrer les expressions qui apparaissent dans la partie gauche de l'écran A puis à observer les évaluations données par la simplification automatique, de façon à identifier la transformation algébrique opérée dans chaque cas (développement, factorisation, changement de l'ordre des facteurs, décomposition en « éléments simples »). Ensuite, une expression G était donnée, ainsi que trois autres expressions H, I, J. Les élèves devaient déterminer laquelle (ou lesquelles) des expressions H, I, J était équivalente à G, et trouver si possible une ou plusieurs commandes TI-92 permettant de passer d'une expression à l'autre. Par exemple, G était $\frac{x^2-6x+2}{2x-1}$, H, I, J étaient respectivement $\frac{-11x+4}{2x-1}+\frac{x}{2}$, $\frac{3}{4(2x-1)}-\frac{x}{2}+\frac{11}{4}$, $\frac{\left(x+\sqrt{7}-3\right)\left(x-\sqrt{7}-3\right)}{2x-1}$. En développant G, les élèves pouvaient montrer que H était son opposé, mais il n'était pas si simple de passer avec la machine de G à I, qui étaient équivalents. Dans l'écran B, une sous-expression du développement de G à été, pour cela, réduite au même dénominateur. Il était simple, en revanche, de passer de G à J via la commande Factor.

Le travail algébrique préparatoire à l'analyse a aussi une dimension fonctionnelle qui passe par l'étude de situations issues de la modélisation de phénomènes physiques, comme le problème de la bille [Dupérier, ces actes]. En étudiant les manifestations graphiques et numériques des propriétés des fonctions, les élèves s'initient aux modules GRAPH et TABLE de la TI-92, développant ainsi les schèmes d'utilisation décrits dans la première partie de cet article.

Après ce travail algébrique, les approches des limites et de la dérivation sont imbriquées, et plusieurs progressions sont possibles. Le professeur peut vouloir donner une bonne connaissance des limites aux élèves avant de commence la dérivation, ou se contenter d'une première approche, quitte à retravailler les limites après la dérivation[15]. Dans ce texte, les limites et la dérivation sont présentés séparément pour la clarté de l'exposé, chaque enseignant pourra choisir comment articuler les différentes séances sur les deux thèmes.

Les limites

Approche de la limite en zéro et extension

Nous avons décrit plus haut le travail de type « enactive » par lequel nous commençons l'étude des limites. Les limites sont d'abord étudiées en zéro, puis étendues aux autres points. Nous proposons ensuite un problème aux élèves pour donner une dimension algébrique aux limites, pour montrer en quelque sorte qu'elles sont calculables. Nous leur demandons d'étudier les limites des deux solutions de l'équation du second degré paramétrique $ax^2 - 2x + 1 = 0$ lorsque a tend vers zéro, puis la limite du produit au même point. Cette étude se fait d'abord numériquement, puis symboliquement en papier/crayon et, en fin de séance, le professeur peut introduire la fonctionnalité *limit* de la TI-92 (écrans ci-dessous) : cette introduction se fait alors que la notion de limite commence à être installée chez les élèves, ce qui limite les risques soulignés plus haut qu'une conception seulement manipulatoire des limites s'impose.

▪ $\text{zeros}(a \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1, x)$ $\left\{ \dfrac{-(\sqrt{-(a-1)} - 1)}{a} \quad \dfrac{\sqrt{-(a-1)} + 1}{a} \right\}$	▪ $\lim\limits_{a \to 0^+} \left(\dfrac{-(\sqrt{-(a-1)} - 1)}{a} \right)$ $\quad 1/2$ ▪ $\lim\limits_{a \to 0^+} \left(\dfrac{\sqrt{-(a-1)} + 1}{a} \right)$ $\quad \infty$

Réinvestissement dans un cadre algébrique

Ensuite, dans le travail sur l'algèbre des limites, les élèves vont utiliser la calculatrice en «boîte noire symbolique», découvrir des règles et propriétés, en les justifiant aussi par des considérations graphiques ou numériques. Ils vont rencontrer à cette occasion la question des cas d'indétermination. La «boîte noire symbolique» est constituée d'un module de la TI-92, le «data matrix editor» qui possède certaines fonctionnalités d'un tableur symbolique. Elle permet aux élèves d'obtenir beaucoup d'exemples et d'expérimenter. Il a fallu cependant limiter au maximum la complexité de la situation, c'est pourquoi une certaine préparation du «data matrix editor» a été nécessaire [Juge, ces actes]. De plus, nous avons choisi d'expérimenter seulement des limites en zéro, et de guider progressivement les élèves dans l'expérimentation, d'abord en leur proposant des exemples, puis en leur demandant d'en fournir, particulièrement pour mettre en évidence les comportements possibles dans les cas d'indétermination (écran ci-dessous).

[15] Cependant, dans l'ingénierie, l'approche de la dérivation suppose que les élèves aient une idée de la rapidité de convergence suffisante pour distinguer, au voisinage de zéro, un polynôme dont le monôme de degré inférieur est de degré supérieur ou égal à 2, d'un polynôme dont ce degré est 1.

f	g	lim f	lim g	limf+g
c1	c2	c3	c4	c5
(cos(...	sin(x...	-1/2	1	1/2
sin(x...	-1/x^2	1	-∞	-∞
1/x^2	1/x^4	∞	∞	∞
(x-1)...	x^4*(...	-∞	0	-∞
1/x^2	(x^2-...	∞	-∞	1
2/x^2	(x^2-...	∞	-∞	∞
1/x^2	-1/x^4	∞	-∞	-∞

Les dérivées

L'introduction du nombre dérivé

Dans cette introduction, les élèves travaillent à la reconstruction de la notion de tangente que nous avons décrite plus haut. Le professeur propose aux élèves trois situations successivement. Dans la première situation, les élèves recherchent « la droite qui s'adapte le mieux » à une parabole en un point donné. Ils peuvent faire le lien avec la notion de tangente telle qu'ils l'ont rencontrée dans les classes antérieures. Ils étudient ensuite une situation où la tangente recoupe la courbe et une situation de point d'inflexion. L'apport du traitement symbolique par la TI-92 est intéressant à considérer. Les écrans ci-dessous montrent différents calculs faisant intervenir la distance entre la courbe et la droite considérée, telle que nous l'avons définie plus haut. En classe, le premier calcul est construit collectivement en papier/crayon pour exprimer l'idée de «droite qui s'ajuste le mieux». Les limites sont alors déterminées à la main. Ensuite, de façon autonome, les élèves «adaptent» ce calcul aux nouvelles situations en s'aidant de la TI-92 sur lequel le premier calcul a été transcrit collectivement[16]. Nous pensons que, dans cette adaptation, ils prennent conscience des différents éléments intervenant dans le calcul, et du rôle qu'ils jouent dans le concept de nombre dérivé, davantage que s'ils avaient à refaire le calcul à la main Il y a dans cette activité une médiation du symbolisme plus profonde que la manipulation habituelle des expressions[17].

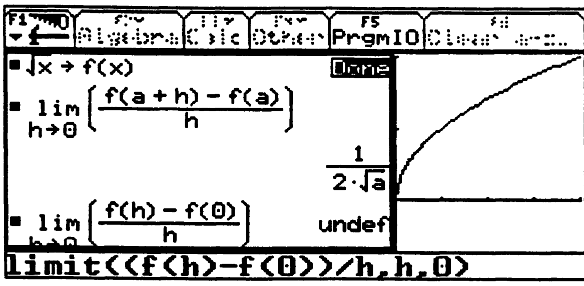
▪ Define $f(x)=x^2-2$	Done
▪ $f(1+h)-(f(1)+1.9\cdot h)$	$h^2+\frac{h}{10}$
▪ $\text{expand}\left(\frac{f(1+h)-(f(1)+1.9\cdot h)}{h}\right)$	$h+1/10$
▪ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-(f(1)+1.9\cdot h)}{h}\right)$	$1/10$
▪ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-(f(1)+m\cdot h)}{h}\right)$	$-(m-2$
▪ $m=2$	$m=2$

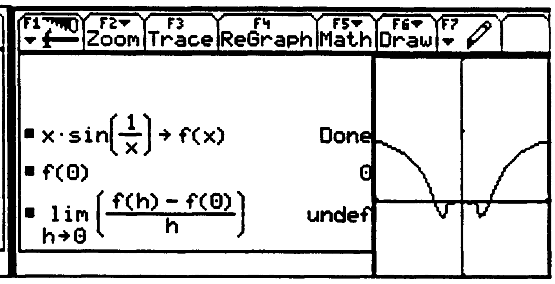
▪ Define $f(x)=\frac{x^3-6\cdot x}{4}$	Done
▪ $f(2+h)-(f(2)+1.5\cdot h)$	$\frac{h^3}{4}+\frac{3\cdot h^2}{2}$
▪ $\frac{f(2+h)-(f(2)+1.5\cdot h)}{h}$	$\frac{h\cdot(h+6)}{4}$
▪ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{h\cdot(h+6)}{4}\right)$	0

La définition de la dérivabilité est abordée en fin de séance, puis, pendant deux séances, les élèves vont étudier la dérivabilité de fonction usuelles ou non, à partir de cette définition, en s'aidant des capacités symboliques de la TI-92 (écrans ci-dessous).

[16] Nous rapportons ici brièvement la dialectique entre l'effectuation des calculs en papier/crayon et le travail sur machine au cours de cette séance. En se reportant au rapport cité en note 2, page 103 et suivantes, le lecteur pourra considérer cette dialectique de façon plus approfondie.

[17] Nous avons travaillé cet aspect dans le groupe IREM de Rennes sur le calcul formel en Seconde, voir le texte du groupe dans ces actes.





<u>Les autres séances</u>

Dans la suite des séances sur les dérivées, un moment important est la dérivation formelle pour lequel nous avons construit un travail comparable à celui organisé pour le calcul symbolique des limites. Le sujet est plus complexe, et nous l'avons séparé en deux séances, l'une sur les opérations algébriques, qui s'apparente à la séance sur les limites et l'autre sur les cas de composition au programme, qui s'appuie sur les propriétés graphiques. Puis viennent les applications. Nous avons présenté ci-dessus les problèmes d'optimisation avec généralisation : nous introduisons cette généralisation avec progressivité dans un problème où il s'agit d'optimiser les dimensions d'une cuve. L'épaisseur, puis le volume intérieur de la cuve sont paramétriques. Ainsi, on trouve que les dimensions optimales dépendent du volume, mais pas de l'épaisseur. La TI-92 aide beaucoup à la dévolution d'un problème de ce type car les calculs avec paramètres seraient inaccessibles à la main. Le travail en cinématique, dont nous avons aussi parlé, consiste à interpréter en terme de vitesse moyenne d'abord, puis instantanée la représentation graphique de l'évolution d'un mobile en fonction du temps. Le lien avec la dérivation est fait quand la vitesse instantanée est reconnue comme égale à la pente de la tangente à la représentation graphique. En fin de progression, la dérivation est réinvestie dans des problèmes de recherche de fonctions sous contraintes. Par exemple, le problème du «raccord de tuyau» consiste à rechercher une certaine liaison matérielle entre deux tuyaux cylindriques concentriques. Dans l'énoncé proposé, le problème est ramené à la recherche de la courbe plane qui engendre le raccord par révolution, et donc à l'étude de fonctions continûment dérivables sur un intervalle et dont la dérivée s'annule aux bornes de cet intervalle. Les élèves sont ainsi amenés à comparer des fonctions du troisième degré, des fonctions du second degré par morceaux, des fonctions trigonométriques...

Conclusion

Inévitablement, une ingénierie telle que celle que nous venons de présenter pose la question de son évaluation. Comment apprécier sa robustesse, la pertinence des analyses qui la fondent, comment prévoir les difficultés de mise en oeuvre ? La méthodologie de notre recherche a été présentée au début de la partie III : l'évaluation a été menée en continu au cours des deux années d'expérimentation sous forme d'observation des séances et d'un suivi des élèves par entretiens et questionnaires. L'analyse théorique et la construction de l'ingénierie ont progressé en fonction de cette évaluation. La robustesse de l'ingénierie, la pertinence des analyses et les difficultés s'apprécient dans ce processus. A cet égard, la transition entre les deux années a été un moment clé, puisque nous avons pu mettre à profit les séances observées dans les deux classes et le suivi approfondi des élèves pour préciser le cadre théorique et arrêter l'architecture générale de l'ingénierie. Voici une synthèse des observations réalisées à la fin de la première année. Elle illustre bien les difficultés qui peuvent être rencontrées dans l'intégration de la TI-92, ainsi que les ajustements auxquels nous avons procédé.

Appelons A l'une des classes, et B l'autre. Dans la classe A trois élèves sur quatre étaient des garçons. Ils étaient un sur deux dans la classe B. Dans la classe A, davantage d'élèves que dans la classe B, utilisaient, préalablement à l'expérimentation, une calculatrice graphique ce qui, nous le pensons, les préparait mieux à l'usage de la TI-92. Dans les deux classes, les premiers usages de la TI-92 n'ont pas soulevé de difficultés particulières. Cependant, même au début, des différences notables ont été observées. Des élèves (plus nombreux dans la classe A) ont tenté une exploration des possibilités de la calculatrice alors que d'autres se sont limités aux commandes courantes présentées dans les séances. Plus tard dans l'année, les attitudes et les pratiques instrumentales se sont encore diversifiées. Par exemple, dans la tâche d'étude de variations étudiée en profondeur dans le texte de Badr Defouad, certains élèves, particulièrement dans la classe A avaient une plus grande variété de stratégies impliquant davantage de représentations différentes. Ils exploraient les variations dans le module Table, alors que d'autres se restreignaient à une exploration graphique, ils faisaient cette exploration sur la dérivée aussi bien que sur la fonction. De façon générale, la genèse instrumentale a été un processus long et complexe. Même les élèves d'un bon niveau en mathématiques n'ont assimilé que très progressivement les fonctionnalités algébriques du module Home. Ils les utilisaient sous la direction du professeur, mais les réinvestissaient peu dans les situations de recherche ou en travail autonome.

Comme nous l'attendions, les élèves ont intégré facilement les fonctionnalités de calcul symbolique de limites et de dérivées, et la tendance à restreindre les concepts à ces aspects manipulatoires s'est manifestée. Cependant, ces fonctionnalités en analyse ont été d'un usage limité à cause des contraintes institutionnelles et de l'insuffisance des schèmes d'utilisation des capacités algébriques de la TI-92 : les élèves savaient qu'en Terminale et aux contrôles communs aux classes des établissements, ils auraient à produire les traces d'une application des règles de calcul des limites et des dérivées, alors que la TI-92 donne un résultat simplifié qui n'est pas toujours conforme aux usages, et ils manquaient de schèmes efficaces pour se servir de la TI-92 pour obtenir par exemple la dérivation brute, puis des transformations vers la simplification usuelle.

A l'issue de l'expérimentation, la satisfaction des élèves était générale, mais moins marquée dans la classe B. Il semble que l'instrumentation, moins avancée pour certains élèves, particulièrement dans la classe B, a entraîné une certaine déception vis a vis de la TI-92. Dans cette classe où les filles sont plus nombreuses, une certaine anxiété vis à vis des mathématiques conduit à rechercher une sécurité en contrôle. Beaucoup d'espoirs ont été placés dans l'utilisation de la calculatrice pour des vérifications, ce qui n'a pas vraiment fonctionné, car cela aurait supposé une instrumentation plus poussée. La classe A, mieux préparée par un usage plus ancien des calculatrices graphiques, a développé une instrumentation plus ouverte.

Cette évaluation a conduit à de nombreux ajustements dont l'ingénierie présentée plus haut a bénéficié. Le travail algébrique préparatoire a été développé, de façon à renforcer les schèmes d'utilisation algébriques, graphiques et numériques, l'approche des concepts a été simplifiée, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de la dérivation, l'introduction des fonctionnalités de calcul des limites et de dérivation symbolique a été retardée. Sur un plan plus général, l'instrumentation a été beaucoup plus officiellement intégrée, avec des choix précis sur les commandes officiellement introduites et travaillées, un travail explicite sur les techniques instrumentées développées par les élèves. Le suivi des élèves réalisé dans une classe la deuxième année montre que, bien que des difficultés demeurent, ces ajustements ont porté leurs fruits.

Nous concluons en rappelant dans un tableau les principaux points mentionnés dans les différentes parties de ce texte. Nous avons tenté d'esquisser un cadre pour l'étude des questions d'instrumentation et d'écologie, de façon à construire une ingénierie didactique pour l'enseignement des débuts de l'analyse en Première scientifique. Ce travail fait apparaître de nombreux centres d'attention qu'il est nécessaire de prendre en charge et d'articuler de façon cohérente pour une bonne intégration de calculatrices complexes. Le Tableau 3 tente une synthèse en organisant ces centres d'attention en trois niveaux d'analyse. Ces différents points sont apparus dans l'analyse préparatoire et le développement de l'ingénierie que nous avons présentée ici, et ils ont contribué aux différents ajustements. Leur prise en compte nous paraît essentielle pour une intégration réussie.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Approche ergonomique et anthropologique</th><th colspan="2">Choix pour un apprentissage de l'analyse avec instrument</th></tr>
<tr><td>Analyse des situations d'utilisation de la calculatrice</td><td>Contraintes de l'objet technique</td><td>Ouverture du champ des possibles</td><td>Complexité technique des situations</td><td>Complexité cognitive des situations</td></tr>
<tr><td>La genèse instrumentale (individuelle, collective)</td><td>Fonctionnalités de l'action instrumentée :
heuristique, résolution, contrôle</td><td>Pratiques et techniques
Techniques papier/crayon
Techniques instrumentées</td><td colspan="2">Instrumentation du module HOME (calcul exact et approché, algébrique, fonctionnel)
Instrumentation des modules Graphiques (schèmes de cadrage) et Table.
Articulation travail TI-92/ papier crayon</td></tr>
<tr><td>Dialectique instrumentation TI-92 / apprentissage des maths</td><td colspan="2">Technologies associées aux techniques instrumentées
Contrat didactique,
statut institutionnel de la TI-92</td><td>Rapports de niveau différent aux objets de l'analyse
Reconstructions
Généralisation</td><td>Dialectique outil/ objet, articulation de registres et de cadres</td></tr>
<tr><td colspan="5">Tableau 3</td></tr>
</table>

Bibliographie

Alves Dias M. [98] Articulation de points de vue en algèbre linéaire : le cas de la représentation de sous-espaces vectoriels. In Comiti et alt. (eds.) *Actes de la neuvième école d'été de Didactique des Mathématiques*, ARDM.

Artigue M. [94]. Contribution au thème «Dialectique outil / objet et jeux de cadres ». In Noirfalise R. (ed.) *Actes de la septième école d'été de Didactique des Mathématiques*, IREM Clermond-Ferrand.

Artigue M. [96]. Computer environments and learning theories in mathematics education. In B.Barzel (ed.), *Teaching Mathematics with Derive and the TI-92*, 1-17. Münster : Zentrale Koordination Lehrerausbildung.

Artigue M., Defouad B., Dupérier M., Juge G., Lagrange J.B. [97]. *L'intégration de calculatrices complexes à l'enseignement des mathématiques au lycée.* Cahier DIDIREM spécial n°4. Paris : IREM Paris 7.

Castela C. [95]. Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures - un exemple concret, celui de la tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.15.1., 7-47.

Chevallard Y. [91]. Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Grenoble : IMAG.

Chevallard Y. [92]. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12.1, 73-112.

Chevallard Y. [98]. Familière et problématique, la figure du professeur. in R. Noirfalise, M.J. Perrin-Glorian (eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.17.3, 17-54.

Douady R. [86]. Jeux de cadres et dialectique outil / objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 5-31.

Delgoulet J., Guin D. [97]. *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de Seconde.* IREM de Montpellier.

Duval R. [95]. *Sémiosis et Pensée humaine.* Peter Lang, Paris.

Lagrange J.B., Juge G. [98]. Calcul formel : de l'ordinateur à la calculatrice. In *Actes de l'Université d'été « Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques »* IREM de Rennes, pp. 183-196.

Lagrange J.B. [97]. Using a Computer Algebra System in the Mathematics Classroom. In M. Borba and alt. (eds.), *Proceedings of the WG16, ICME 8.* UNESP- State University of Sao Paulo at Rio Claro, Brazil.

Legrand M. [93]. Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM, n°10,* 123-15.

Noss R., Hoyles C. [96]. *Windows on Mathematical Meanings,* Kluwer.

Rabardel P. [96]. *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : A.Colin.

Robert A., Tenaud I. [89]. Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C., *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9.1, 31-70.

Sierpinska A., Lerman S. [96]. Epistemologies of mathematics and mathematics education. In A.Bishop & al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 82è-876. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Schneider M. [89]. *Des objets mentaux « Aires » et « Volumes » au calcul des primitives,* Thèse de doctorat, Louvain la Neuve.

Tall D. [96]. Functions and calculus. In Bishop A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic, pp. 289-325.

Trouche L. [94). Calculatrices graphiques : la grande illusion. *Repères IREM* n°14, 39-55.

Trouche L. [96]. *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation* Thèse, Université de Montpellier 2.

Watkins A. [92]. Introducing Calculus with DERIVE. In J. Böhm (ed.) *Teaching Mathematics with DERIVE.* Chartwell Bratt, pp. 1-20.