

EMMANUEL LESIGNE

**Convergence d'une suite le long de sous-suites d'indices
à croissance exponentielle**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1996-1997, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1996-1997__2_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1996-1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE D'UNE SUITE LE LONG DE SOUS-SUITES D'INDICES À CROISSANCE EXPONENTIELLE

Emmanuel LESIGNE

Juin 1996

Abstract

Does the convergence of a sequence along index subsequences of the type $([\gamma^n])_{n \geq 0}$ insure the convergence of the whole sequence ?

Introduction

Si γ est un nombre réel, on désigne par $[\gamma]$ sa partie entière.

Plusieurs preuves de Lois Fortes des Grands Nombres (voir par exemple [1] et [2]-lemme 1.5) utilisent le résultat suivant.

Proposition 1 *Soit $(v(n))_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $u(n) := \frac{1}{n}(v(1) + v(2) + \dots + v(n))$ la suite de ses moyennes de Césaro. Si, pour tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(u([\gamma^n]))_{n \geq 1}$ converge, alors la suite $(u(n))_{n \geq 0}$ converge.*

Voici le résumé d'une démonstration de cette proposition: pour k entier, on pose $\gamma_k := 2^{\frac{1}{k}}$ et on remarque, par un argument immédiat de sous-suite, que la limite l de la suite $(u([\gamma_k^n]))_{n \geq 0}$ est indépendante de k ; pour montrer que la suite $(u(n))$ converge, on utilise un argument d'interpolation ($\gamma_k^m \leq n < \gamma_k^{m+1}$) pour encadrer $u(n) - l$ puis on fait tendre k vers l'infini.

Le fait que $(u(n))$ soit la suite des moyennes de Césaro d'une suite positive entraîne une certaine régularité. C'est important dans l'argument précédent mais est-ce nécessaire pour avoir le résultat de la Proposition 1 ? Nous allons voir que la réponse est négative. Mais nous verrons aussi que cette hypothèse est importante pour les applications au Calcul des Probabilités.

1 Deux résultats

Proposition 2 *Soit $(u(n))_{n \geq 0}$ une suite dans un espace métrique compact et a, b deux nombres réels tels que $1 \leq a < b$. Si, pour tout γ dans l'intervalle $]a, b[$, la sous-suite $(u([\gamma^n]))_{n \geq 0}$ converge, alors la suite $(u(n))_{n \geq 0}$ converge.*

Il est remarquable que, pour obtenir ce résultat il soit inutile de faire une hypothèse sur des nombres γ proches de 1. Il suffit de tester la convergence de la suite le long de sous-suites très lacunaires. D'un autre côté, le résultat suivant montre qu'il est nécessaire d'avoir une hypothèse sur un grand nombre de réels γ .

Proposition 3 Il existe une suite réelle non convergente $(u(n))_{n \geq 0}$ telle que, pour presque tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(u([\gamma^n]))_{n \geq 0}$ converge.

Plus précisément: soit E un ensemble de nombres entiers naturels tel que $\sum_{m \in E} \frac{\log m}{m} < +\infty$;
pour presque tout $\gamma > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_E([\gamma^n]) = 0$.

(Dans cet énoncé, le "presque tout" fait référence à la mesure de Lebesgue sur la droite réelle, et $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice de E .)

La condition est par exemple satisfaite par l'ensemble E des carrés de nombres entiers.

2 Les démonstrations

Soient a, b deux nombres réels tels que $1 \leq a < b$. Montrons que, si E et F sont deux sous-ensembles infinis de \mathbb{N} , il existe $\gamma \in]a, b[$ tels que les ensembles $\{n \in \mathbb{N} : [\gamma^n] \in E\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : [\gamma^n] \in F\}$ soient infinis. Ceci démontrera la Proposition 2, car si une suite non convergente u possède une valeur d'adhérence, alors il existe deux ensembles fermés disjoints C et D tels que les ensembles $E := \{n \in \mathbb{N} : u(n) \in C\}$ et $F := \{n \in \mathbb{N} : u(n) \in D\}$ soient infinis.

Lemme 1 Soient c et d deux nombres réels tels que $1 \leq c < d$. Pour tout nombre entier m assez grand, il existe un nombre entier positif n tel que $c < m^{\frac{1}{n}} < d$.

Démonstration du Lemme 1

Notons $n(m)$ la partie entière $\ln m / \ln d$. Le nombre $n(m)$ est le plus grand nombre n tel que $m^{\frac{1}{n}} \geq d$. Il suffit alors de remarquer que $\lim_{m \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{n(m)}} - m^{\frac{1}{n(m)+1}} = 0$.

Démonstration de la Proposition 2

Soient E et F deux sous-ensembles infinis de \mathbb{N} . Le Lemme 1 nous permet de construire par récurrence une suite croissante d'entiers (m_k) , une suite d'entiers (n_k) et une suite décroissante de segments $[c_k, d_k]$ tels que

$$m_k \in E, \text{ resp. } \in F, \text{ si } k \text{ est impair, resp. pair;}$$

$$a \leq c_k < d_k \leq b \quad \text{et} \quad [c_k, d_k] \subset [m_k^{\frac{1}{n_k}}, (m_k + 1)^{\frac{1}{n_k}} [\cap] c_{k-1}, d_{k-1} [.$$

(Indication: poser $c_0 = a$, $d_0 = b$, et construire successivement, pour $k \geq 1$, les nombres m_k , n_k et (c_k, d_k) .)

On a bien sûr $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$. L'intersection de tous les segments $[c_k, d_k]$ contient un nombre réel γ . Un tel nombre γ vérifie $[\gamma^{n_k}] = m_k$, et le résultat annoncé est démontré.

Démonstration de la Proposition 3

Soit E un ensemble infini d'entiers tel que $\sum_{m \in E} \frac{\log m}{m} < +\infty$. La suite $(\mathbb{1}_E)$ est une suite divergente de 0 et de 1. Soit Γ l'ensemble des nombres réels γ vérifiant: il existe une infinité d'entiers n tels que $[\gamma^n] \in E$. Nous voulons montrer que l'ensemble Γ est négligeable. Notons λ la mesure de Lebesgue sur la droite réelle.

Fixons $\alpha > 0$.

Lemme 2 *Quand m tend vers l'infini,*

$$\lambda\left(\bigcup_{n>\alpha \log m} [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[) = O\left(\frac{\log m}{m}\right).$$

Démonstration du Lemme 2

Soit C une constante telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, $e^x - 1 \leq Cx$. De l'inclusion

$$\bigcup_{n>\alpha \log m} [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[\subset \bigcup_{\alpha \log m < n \leq m} [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[\cup [1, m^{\frac{1}{m}}[$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{n>\alpha \log m} [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[) &\leq (m^{\frac{1}{m}} - 1) + \sum_{\alpha \log m < n \leq m} ((m+1)^{\frac{1}{n}} - m^{\frac{1}{n}}) \\ &\leq C \frac{\log m}{m} + \sum_{\alpha \log m < n \leq m} m^{\frac{1}{n}} \left(\exp\left(\frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) - 1 \right) \\ &\leq C \frac{\log m}{m} + \sum_{n \leq m} e^{\frac{1}{\alpha}} C \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) \\ &\leq C \frac{\log m}{m} + \frac{C}{m} e^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{n \leq m} \frac{1}{n} \\ &= O\left(\frac{\log m}{m}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Ce qui prouve le Lemme 2.

Revenons à la démonstration de la Proposition 3. Notons

$$\rho(m, N) := \lambda\left(\bigcup_{\substack{n>N \\ n>\alpha \log(m+1)}} [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[). \right.$$

Grâce au Lemme 2, on a $\sum_{m \in E} \sup_{N>0} \rho(m, N) < +\infty$ et, pour tout m fixé, $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho(m, N) = 0$. Donc, par convergence dominée, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m \in E} \rho(m, N) = 0$.

Ceci entraîne que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{m \in E} \bigcup_{\substack{n>N \\ n>\alpha \log(m+1)}} [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[) = 0$$

c'est à dire

$$\lambda\left(\left(\limsup_{N \rightarrow \infty} \bigcup_{m \in E} [m^{\frac{1}{N}}, (m+1)^{\frac{1}{N}}[) \cap [1, e^{\frac{1}{\alpha}}[) = 0.\right.$$

Ainsi, pour presque tout γ entre 1 et $e^{\frac{1}{\alpha}}$, pour tout entier N assez grand, pour tout $m \in E$ et tout entier $n \geq N$, $\gamma \notin [m^{\frac{1}{n}}, (m+1)^{\frac{1}{n}}[$.

Ceci prouve que, pour presque tout $\gamma > 1$, l'ensemble $E \cap \{\gamma^n : n \geq 0\}$ est fini, et la Proposition 3 est établie.

3 Le cas des suites de variables aléatoires

Dans l'étude de la convergence presque sûre de suites de variables aléatoires, (comme dans [1] et [2]), la figure est tout à fait différente. La Proposition 1 s'étend à ce cas, mais pas la Proposition 2. On a en effet les résultats suivants.

Proposition 4 *Soit $(U(n))_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles qui est la suite des moyennes de Césaro d'une suite de variables aléatoires positives. Si pour tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(U([\gamma^n]))_{n \geq 0}$ converge presque sûrement, alors la suite $(U(n))_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.*

Proposition 5 *Il existe une suite bornée $(U(n))_{n \geq 0}$ de variables aléatoires positives qui diverge presque sûrement et telle que, pour tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(U([\gamma^n]))_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers zéro.*

La Proposition 4 est une conséquence directe de la démonstration de la Proposition 1 que nous avons résumée. Dans cette démonstration on n'utilise en effet l'hypothèse que pour une famille dénombrable de nombres γ .

Pour démontrer la Proposition 5 il suffit d'exhiber une suite presque sûrement divergente $(U(n))_{n \geq 0}$ telle que, pour tout $\gamma > 0$, $\sum_{n \geq 0} E(U([\gamma^n])) < +\infty$. (Nous notons E l'espérance mathématique). Une telle construction est classique, par l'argument de la "bosse glissante". Voici un exemple: l'espace de probabilité est le cercle $\{\exp(i\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ muni de la probabilité uniforme; la variable aléatoire $U(n)$ est la fonction indicatrice de l'arc délimité par $\exp(2i\pi(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}))$ et $\exp(2i\pi(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}))$; on a $E(U(n)) = \frac{1}{n+1}$ et $\limsup U(n) = 1$ sûrement, mais, pour tout $\gamma > 1$, $\limsup U([\gamma^n]) = 0$ presque sûrement, d'après le lemme de Borel-Cantelli.

References

- [1] N. Etemadi. *An elementary proof of the Strong Law of Large Numbers*
Z. Warsch. verw. Gebiete 55, p.119-122, 1981.
- [2] J. Rosenblatt & M. Wierdl. *Pointwise Ergodic Theorems via Harmonic Analysis*
In: *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis*
London Math. Soc. Lecture Note Series 205, p.3-151, 1995.

Emmanuel Lesigne
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
Université François Rabelais
Parc de Grandmont.37200 Tours.

courrier électronique: lesigne@balzac.univ-tours.fr