PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

STÉPHANE LE BORGNE

Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A8_0>

Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore

Stéphane Le Borgne

Résumé

Par des méthodes algébriques élémentaires nous construisons un codage sofique pour tout automorphisme hyperbolique du tore. Ce codage présente certaines caractéristiques intéressantes : il est constructible, permet de décrire une partition markovienne et de construire des points génériques pour l'automorphisme.

Introduction

Pour montrer qu'un système dynamique est isomorphe à un système de Bernoulli, il est classique de considérer une partition simple de ce système et de montrer une propriété de faible indépendance. On en déduit l'existence d'une partition fournissant un codage du système par un système de Bernoulli [14][18]. Mais l'isomorphisme obtenu est de nature purement métrique. En 67, Adler et Weiss [1] ont introduit une nouvelle notion menant à un codage, non par un système de Bernoulli, mais par un sous-shift de type fini : les partitions markoviennes. Pour un automorphisme hyperbolique du tore de dimension deux, on trouve facilement une partition markovienne formée de parallèlogrammes [19], et on peut mener une étude précise du codage associé [10]. La régularité de l'application réalisant le codage permet d'obtenir d'importants résultats sur l'automorphisme (théorème centrale limite, définition de la pression [6][13]). Par la suite, Sinai et Bowen ont montré l'existence de partitions markoviennes pour une famille beaucoup plus large de systèmes dynamiques. En particulier, il existe des partitions markoviennes des automorphismes hyperboliques du tore en toute dimension. Cependant les décrire précisément est difficile. En effet Cawley [8] a montré que, sauf dans les situations se réduisant au cas de la dimension deux, il n'existe pas de partition markovienne géométriquement simple pour un automorphisme du tore. Dans [4] on trouvera une construction de partitions makoviennes utilisant les fractales.

Dans ce travail nous adoptons un point de vue différent. Rappelons que lorsque l'automorphisme n'a qu'une valeur propre β de module supérieur à 1 réelle positive (β est alors un nombre de Pisot), on sait obtenir un codage régulier par le β-shift bilatère, système sofique construit à partir des écritures des réels en base β [2][17]. Dans certains cas [12], le β-shift hérite de l'automorphisme certaines structures algébriques, ce qui permet de dire que le β-shift bilatère est un bon modèle

symbolique de l'automorphisme (de même que le β-shift unilatère est un bon modèle symbolique de la β-transformation) : on rejoint alors les préoccupations de [21][22].

Nous donnons ici un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore qui nous semble être une généralisation naturelle du codage par le β-shift obtenu dans le cas Pisot. La première partie est consacrée à l'exposé des notations et de rappels sur les systèmes sofiques. La deuxième partie présente la consruction du codage. Le point de départ est la définition, en utilisant l'ordre lexicographique, d'un analogue dans la feuille dilatante du β-développement des réels. Reprenant une démonstration de Thurston [20], nous montrons que, sous une hypothèse simple, l'adhérence (pour la topologie produit) de l'ensemble des développements obtenus est un système sofique. Après avoir calculé l'entropie de ce système sous certaines conditions naturelles, nous explicitons le codage. Dans la troisième partie nous montrons l'intérêt de ce codage. Il est constructible, permet la description simple de points génériques pour la mesure de Lebesgue et d'une partition markovienne. Nous montrons également que ce codage est une généralisation du codage déjà obtenu dans le cas Pisot. Enfin nous terminons par une remarque concernant les endomorphismes dilatants du tore : nous décrivons une construction très simple d'un codage sofique presque partout bijectif de ces systèmes.

I. Quelques rappels sur les systèmes sofiques

Dans cette partie nous introduisons certaines notions et notations utiles à la com préhension de la suite. Ce qui suit est essentiellement une reprise des études de Krieger [15] et Fischer [11].

Soit $S = \{1, \ldots, s\}$ un ensemble fini. Sur $S^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit considérons l'application (décalage)

$$S^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sigma} S^{\mathbb{Z}} : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

On appelle sous-shift un sous-ensemble Y de $S^{\mathbb{Z}}$ qui est fermé et σ-invariant. Par restriction il est muni de faqn naturelle du décalage σ. Un sous-shift est caractérisé par l'ensemble des mots "autorisés" à apparaître dans ses éléments. Pour tout sous-shift (Y, σ), on note $\mathcal{B}(Y, n)$ l'ensemble des mots de longueur n de Y et $\mathcal{B}(Y)$ l'ensemble des mots de Y. Etant donnés deux mots B et C, nous notons BC leur concaténation.
Soit Z un sous-shift. On note S_Z le plus petit sous-ensemble de S tel que $Z \subset S_Z^{\mathbb{Z}}$. Fixons un $\alpha \in]0, 1[$. Etant données deux suites $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(\epsilon'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, appelons $\delta(\epsilon, \epsilon')$ le plus grand des $|i|$ tels que $|j| \neq |i|$ entraîne $\epsilon_i = \epsilon'_j$ et posons

$$d(\epsilon, \epsilon') = \alpha^{\delta(\epsilon,\epsilon')}.$$

Pour tout sous-shift Y, cette quantité définit une distance sur Y, induisant sur Y la topologie produit, et donne un sens à la notion de fonction höldérienne de Y dans un espace métrique.
L'entropie topologique d'un sous-shift Z, sur lequel on fait opérer σ, est notée $h(Z,\sigma)$.

Définition.— *Soient (Y,σ) et (Z,σ) deux sous-shift (inclus dans $S_Y^{\mathbb{Z}}$ et $S_Z^{\mathbb{Z}}$ respectivement). On dit que (Z,σ) est facteur de (Y,σ) s'il existe une application f continue surjective de Y sur Z telle que $f\circ\sigma = \sigma\circ f$.*
On dit que (Y,σ) et (Z,σ) sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme f de Y sur Z tel que $f\circ\sigma = \sigma\circ f$.

Définition.— *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini de mots. Soit $Y \subset S^{\mathbb{Z}}$ un sous-shift. On dit que Y est de* **type fini** *si Y peut être défini par: "aucun élément de $\mathcal{E}$ n'apparaît dans une suite $y \in Y$" (nous écrivons dans ce cas en abrégé "Y est un STF"). L'ensemble $\mathcal{E}$ représente l'ensemble des mots "interdits" du sous-shift Y.*

Quand les mots de $\mathcal{E}$ sont de longueur 2, il existe une matrice A, carrée, indexée par $S\times S$, à coefficients 0 ou 1 telle que $Y = X_A$, où X_A est défini par

$$X_A = \{x \in S^{\mathbb{Z}} :\ \forall i \in \mathbb{Z},\ A(x_i, x_{i+1}) = 1\}.$$

On montre facilement que, quitte à prendre un alphabet plus grand, un sous-shift de type fini est de la forme X_A, i.e. est topologiquement conjugué à un X_A.

Théorème.— *(Curtis-Hedlund-Lyndon) Soient (Y,σ) et (Z,σ) deux sous-shift. Si (Z,σ) est facteur de (Y,σ) par une application continue f, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $g :\ \mathcal{B}(Y,n) \to S_Z$ tels que:*

$$\forall y \in Y,\ \forall i \in \mathbb{Z},\quad f(y)_i = g(y_{i+k},\dots,y_{i+k+n-1}).$$

Preuve.— Notons π_0 la projection sur la coordonnée d'indice 0 : pour un point y de Y, $\pi_0(y) = y_0$. L'application $\pi_0\circ f$ est continue et les sous-ensembles

$$\{(\pi_0\circ f)^{-1}(i)\ /\ i \in S_Z\}$$

forment une partition de Y. Chaque $(\pi_0\circ f)^{-1}(i)$ est ouvert et fermé, donc une réunion finie de cylindres. On en déduit immédiatement l'existence de $k, l \in \mathbb{N}$ tels que l'application suivante soit bien définie :

$$g\ :\ \mathcal{B}(Y, l+k+1) \longrightarrow S_Z :\ C \longmapsto g(C) = \pi_0\circ f(y),$$

où y est n'importe quelle suite telle que $(y_{-k},\dots,y_l) = C$. En d'autres termes $\pi_0\circ f(y) = g((y_{-k},\dots,y_l))$. Le théorème est maintenant une conséquence du fait que f commute avec le shift. □

Définition.— *On appelle système sofique un sous-shift facteur d'un sous-shift de type fini. Un tel STF est appelé recouvrement du système sofique.*

Soit $g : B(Y,n) \to S_Z$, nous notons g_∞ l'application g_∞ de Y dans Z définie par:

$$y \longmapsto g_\infty(y) = (g(y_i, \ldots, y_{i+n-1}))_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Exemple : $Y = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : 0\underbrace{11\ldots11}_{\text{impair}}0$ n'apparaît pas dans $y\}$.

Soient A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$X_A \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ le sous-shift associé. Soit alors $g : B(X_A,2) \longrightarrow \{0,1\}$ défini par $(0,0) \longmapsto 0$, $(1,0) \longmapsto 1$, $(0,1) \longmapsto 1$. On a $g_\infty(X_A) = Y$ et évidemment $g_\infty \circ \sigma = \sigma \circ g_\infty$.

Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon permet de voir qu'un système sofique (Y,σ) est facteur d'un STF (X,σ) par une application g_∞, où g est une application surjective de S_X sur S_Y.

Plusieurs questions se posent. Etant donné un sous-shift Y, comment savoir s'il est sofique ? S'il est sofique, comment construire un STF dont Y est facteur. Existe-t-il des STF particulièrement intéressants, associés à Y de manière plus ou moins naturelle?

Nous utilisons deux caractérisations des systèmes sofiques.

Système engendré par un graphe

Soit G un graphe orienté ayant un nombre fini de sommets dont les flèches sont étiquetées par un ensemble S (alphabet). Soit $Y = Y(G)$ l'ensemble des suites unilatères $(y_0y_1\ldots)$ telles qu'il existe un chemin dans G dont les arcs sont étiquetés $(y_0y_1\ldots)$. L'ensemble Y est un sous-shift unilatère appelé sous-shift engendré par G. On peut aussi définir le sous-shift bilatère engendré par G :

$$Z(G) = \{(y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \ / \ \forall n \ \ (y_n, \ldots) \in Y(G)\}.$$

Théorème.— *Un système est sofique si et seulement s'il est engendré par un graphe.*

Preuve.— Soit (Y,σ) un système sofique d'alphabet S. Il existe un sous-shift de type fini Y' d'alphabet S', défini par une matrice de 0 et de 1 et un homomorphisme surjectif de Y' dans Y de la forme f_∞, où f est une application de S' dans S.

Considérons alors le graphe G dont les sommets sont les points de S', et tel qu'une flèche numérotée $f(y'_2)$ aille de y'_1 à y'_2. Alors $Y = Y(G)$.
Réciproquement, supposons que Y soit engendré par un graphe G d'ensemble de sommets V, d'arcs numérotés par S. Posons :

$$S' = \{ (\alpha_i, y_i) \in V \times S \ / \text{ il existe un arc numéroté } y_i \text{ partant de } \alpha_i \},$$

et considérons la matrice A indexée par $S' \times S'$ suivante :

$$A_{(\alpha,y)(\beta,z)} = \begin{cases} 1 & \text{si une flèche numérotée } y \text{ joint } \alpha \text{ à } \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors l'application de Y', le STF défini par A, dans Y qui à une suite associe la suite des secondes coordonnées est un homomorphisme surjectif.
Remarque : si on suppose en plus que dans le graphe G il n'existe pas de flèche partant d'un même état portant le même numéro allant à deux états différents, alors Y' et Y ont la même entropie topologique. Pour le voir il suffit de remarquer que sous cette hypothèse pour chaque mot $(y_0 \dots y_k)$ de Y, pour chaque α_0 dans V, il y a au plus un mot de la forme $((\alpha_0, y_0)(\alpha_1, y_1) \dots (\alpha_k, y_k))$ dans $\mathcal{B}(Y')$. Autrement dit on a l'encadrement

$$\text{Card}\mathcal{B}(Y,k)\ \text{Card}V \geq \text{Card}\mathcal{B}(Y',k) \geq \text{Card}\mathcal{B}(Y,k),$$

qui entraîne l'égalité des entropies. □

Définition.— *Lorsque dans G, deux flèches partant d'un même sommet portent des étiquettes différentes, on dit que G est un graphe de Shannon.*

On le théorème suivant dû à Csizar et Komlos.

Théorème.— *Un sous-shift engendré par un graphe est engendré par un graphe de Shannon.*

On appelle graphe de Shannon minimal engendrant X un graphe de Shannon engendrant X qui a le nombre minimal de sommets. On dit qu'un graphe est transitif si pour tout couple de sommets, il existe un chemin dans le graphe les joignant. On peut lier cette transitivité à une notion de transitivité sur les systèmes sofiques.

Définition.— *On dit que (Y, σ) est* **transitif** *pour tout couple (B, C) de mots de Y, il en existe un troisième D tel que la concaténation BDC soit encore un mot de Y.*

Théorème.— *Un graphe de Shannon minimal engendrant un système sofique transitif, est transitif.*

Preuve.— Soit G un graphe minimal engendrant un système sofique Y transitif. Comme aucun sommet de G n'est de trop, pour tout sommet s il existe un mot $\epsilon(s)$ tel que que tout chemin engendrant ϵ passe par s (sinon l'ensemble des chemins ne passant pas par s engendre tous les mots, et G n'est pas minimal). Soient alors deux sommets s et s'. Le système Y étant transitif, il existe un mot η tel que $\epsilon(s)\eta\epsilon(s')$ soit encore un mot de Y. Tout chemin engendrant engendrant $\epsilon(s)\eta\epsilon(s')$ contient un chemin allant de s à s'. □

Corollaire.— *Si Y est sofique transitif, l'ensemble des suites périodiques est dense dans Y.*

Le recouvrement de Krieger

Nous décrivons ici une construction, due à Krieger, qui fournit à la fois un critère de soficité et un recouvrement naturel. Nous présentons ensuite une étude des propriétés des systèmes sofiques en utilisant des outils naturellement issus de cette construction : la notion de point finitaire, notamment, est utilisée dans la partie III pour obtenir une partition markovienne à partir du codage.

Soit un système sofique (Y, σ).

Commençons par fixer quelques notations. Soit B un mot de Y de longueur n. Une indéxation $B = (b_k, \ldots, b_{k+n-1})$ des lettres de B, étant donnée, on définit

$$Z(B) = \{y \in Y : \ \forall j = k, \ldots, k+n-1, \ y_j = b_j\}.$$

Par ailleurs, on désigne par :
$Z(b)$, l'ensemble $\{y \in Y : \ y_1 = b\}$, pour b un élément de S_Y,
$P_{]i,k[}$ la projection de $S_Y^{\mathbb{Z}}$ sur $S_Y^{]i,k[}$ et ses restrictions aux sous-shift de $S_Y^{\mathbb{Z}}$,
y_- (resp.y_+) l'image par $P_{]-\infty,0]}$ (resp.$P_{[1,\infty[}$) d'un élément y de Y,
Y^- (resp.Y^+) l'ensemble de ces y_- (resp.y_+).

La construction repose sur l'application Ω_+ de Y^- dans $\mathcal{P}(Y^+)$ qui, à un "passé" y_-, associe la partie de Y^+ formée des "futurs" admissibles pour y_-:

$$\Omega_+ \ : \ y_- \longmapsto \{z_+ \in Y^+ : \ (y_-, z_+) \in Y\}.$$

Nous utiliserons également l'application similaire

$$o_+ \ : \ \mathcal{B}(Y) \to \mathcal{P}(Y_+) \ : \ B \mapsto \{x_+ \in X_+ \ / \ (B, x_+) \in X_+\}$$

Proposition.— $\Omega_+(Y^-)$ *est un ensemble fini de parties de* Y^+.

Preuve.— Soient G un graphe engendrant Y et y_- un point de Y^-. L'ensemble $\Omega_+(y_-)$ dépend uniquement de l'ensemble des extrémités des chemins dans G engendrant y_-. Il y a donc au plus autant de $\Omega_+(y_-)$ que d'ensembles de sommets de G. □

Nous venons de montrer que si Y est sofique, alors $\Omega_+(Y^-)$ est fini. En fait, étant donné un sous-shift Z quelconque, la construction qui suit montre que, si $\Omega_+(Z^-)$ (défini de la même façon que pour Y) est fini si et seulement si Z est sofique.

Introduisons maintenant le recouvrement de Y annoncé.

Son alphabet est l'ensemble

$$E = \{(a, A) \in S_Y \times \Omega_+(Y^-) : \ Z(a) \cap A \neq \emptyset\}$$

et il est défini par la matrice carrée indexée par $E \times E$ définie par:

$$M((a, A), (b, B)) = \begin{cases} 1 & \text{si } B = \sigma(Z(a) \cap A), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour qu'une suite $((y_i, D_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ soit un élément de X_M, il faut et il suffit que, pour tout $j < k$, on ait $(y_i)_{i=j,\ldots,k} \in \mathcal{B}(Y)$ et

$$C_k = P_{[k,\infty[}(Z(y_j, \ldots, y_{k-1}) \cap C_j),$$

où l'on a posé $C_i = \sigma^{1-i} D_i$.
On vérifie facilement que, pour tout élément y de Y, la suite

$$(y_i, \Omega_+(\sigma^{i-1} P_{]-\infty,i-1]}(y))$$

est dans X_M. On en déduit que X_M est bien un recouvrement de Y. On a $Y = \rho_\infty(X_M)$, où ρ est l'application qui à (a, A) élément de E associe a. De plus, l'application

$$Y \xrightarrow{s} X_M : \ y \longmapsto (y_i, \Omega_+(\sigma^{i-1} P_{]-\infty,i-1]}(y))$$

est une section de ρ_∞.

Nous allons maintenant montrer que le sous-shift de type fini X_M est relativement "proche" de Y.

Proposition.— *On a l'égalité suivante :* $\overline{s(Y)} = X_M$.

Preuve.— Soit $B = (y_i, D_i), \ldots, (y_k, D_k)$ un mot de X_M. Il existe $y_- \in Y^-$ tel que $D_i = \Omega_+(y_-)$. Comme B est admissible on a $D_k = \Omega_+(\sigma^{k-i}(y_-, y_i, \ldots, y_{k-1}))$.

Soit $z_+ \in D_k \cap Z(y_k)$. On a $y = (y_-, y_i, \ldots, y_k, z_+) \in Y$ et $s(y) \in Z(B)$; d'où le résultat. □

Pour tout mot $C = ((y_1, D_1), \ldots, (y_k, D_k))$ de X_M, posons $\rho(C) = (y_1, \ldots, y_k)$.

Il est clair qu'étant donné un mot $B \in \mathcal{B}(Y)$, l'ensemble des mots C de X_M tels que $\rho(C) = B$ a, au plus, le même nombre d'éléments que $\Omega_+(Y^-)$. On en déduit immédiatement la proposition :

Proposition.— *On a l'égalité des entropies* $h(X_M, \sigma) = h(Y, \sigma)$, *et l'inégalité* $\mathrm{Card}(\rho_\infty^{-1}(y)) \leq \mathrm{Card}(\Omega_+(Y^-))$.

Nous définissons un ensemble sur lequel ρ_∞ est bijective.

Définition.— *On appelle bloc finitaire (ou mot finitaire) un mot* B, *que l'on peut écrire* $B = (b_{-k}, \ldots, b_0)$, *tel que* Ω_+ *soit constante sur* $Z(B)$.
Un élément y *de* Y *est dit finitaire si, pour tout entier* j, *il existe un entier* k, $k < j$, *tel que le mot* $(y_k, \ldots, y_j)$ *soit finitaire. Nous désignons par* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des éléments finitaires de* Y.

On voit aisément que $\mathcal{F}$ est un G_δ.

Proposition.— *Si* $y \in \mathcal{F}$, *l'ensemble* $\{x \in X_M : \rho_\infty(x) = y\}$ *est réduit à un élément.*

Preuve.— Soit $x \in X_M$ tel que $\rho_\infty(x) = y$.
Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, x_i est de la forme (y_i, D_i) et on a $D_{i+1} = \sigma(Z(y_i) \cap D_i)$. Soient $j \in \mathbb{Z}$ et $k < j$ tels que $(y_k, \ldots, y_{j-1})$ soit finitaire, et $z_- \in Y^-$ tel que $\Omega_+(z_-) = D_k$. On a

$$D_{k+1} = \sigma(Z(y_k) \cap D_k) = \sigma(Z(y_k) \cap \Omega_+(z_-)) = \Omega_+(\sigma(z_-, y_k)).$$

De même $D_j = \Omega_+(\sigma^{j-k}(z_-, y_k, \ldots, y_{j-1})) = \Omega_+((y_k, \ldots, y_{j-1}))$, ce qui montre que l'on a nécessairement $x = s(y)$. □

Proposition.— *Si* (Y, σ) *est transitif, alors* $\overline{\mathcal{F}} = Y$.

Preuve.— Montrons d'abord qu'il existe toujours des blocs finitaires. Soit G un graphe engendrant Y. Pour un sommet s de ce graphe, notons $o_+(s)$ l'ensemble des suites engendrées par les chemins "partant de s".
Pour $y_- \in Y^-$, on peut écrire

$$\Omega_+(y_-) = \cup_{s \in S_y} o_+(s),$$

où S_y est l'ensemble des extrémités des chemins dans G engendrant y_-. D'autre part, $\Omega_+(y_-)$ est égal à l'intersection des $o_+(y_{-k}\dots y_0)$. Pour k_0 suffisamment grand on a donc :

$$\Omega_+(y_-) = \cup_{s\in S_y} o_+(s) = o_+(y_{-k_0}\dots y_0).$$

Prenons alors y_- tel que S_y soit minimal. Pour tout y'_- tel que $y_i = y'_i$ pour $-k_0 \le i \le 0$, S'_y est inclus dans S_y, donc égal à S_y. On en déduit immédiatement que $(y_{k_0}\dots y_0)$ est finitaire.
Maintenant, supposons Y transitif. Soient $C \in \mathcal{B}(Y)$, et F un bloc finitaire de Y. Il existe $G \in \mathcal{B}(Y)$ tel que $FGC \in \mathcal{B}(Y)$ et évidemment FGC est finitaire. Prenons un point périodique $y \in Z(FGC)$. On a alors $y \in \mathcal{F} \cap Z(C)$, ce qui montre le résultat. □

Lorsque Y est transitif, on peut trouver un recouvrement de Y encore plus "proche" de Y.
Si B est finitaire, on note $\Omega_+(B)$ l'élément de $\mathcal{P}(Y^+)$ égal à $\Omega_+(y_-)$ pour $y \in Z(B)$. Soit

$$\omega = \{A \in \Omega_+(Y^-) :\ \exists y \in \mathcal{F}\ \ A = \Omega_+(y_-)\}.$$

Définissons alors $F = \{(a, A) \in E :\ A \in \omega\}$. Soit N la matrice carrée restriction de M à $F \times F$.

Proposition.— *Lorsque Y est transitif, N est irréductible.*

Preuve.— En fait on va montrer que, pour tout $(a, A) \in E$ et tout $(b, B) \in F$, il existe $(c_i, C_i)_{0\le i\le l}$ tels que

$$((a, A), (c_0, C_0), \dots, (c_l, D_l), (b, B)) \in \mathcal{B}(X_M).$$

Soient $(f_1, \dots, f_k)$ un mot finitaire tel que $\omega_+(f_1, \dots, f_k) = B$, et y_- tel que $\omega_+(y_-) = A$. En utilisant le fait que Y est engendré par un graphe de Shannon transitif, on montre facilement qu'il existe un mot $(a_1, \dots, a_n)$ tel que

$$(y_-, a, a_1, \dots, a_n, f_1, \dots, f_k)$$

soit encore un mot de Y. On en déduit la proposition. □

Proposition.— *Lorsque Y est transitif, $\rho_\infty(X_N) = Y$.*

Preuve.— Soit $y \in \mathcal{F}$. On a évidemment $s(y) \in X_N$. La proposition se déduit alors facilement du fait que $\overline{\mathcal{F}} = Y$ et de la compacité de X_N. □

Les systèmes sofiques transitifs périodique-denses ont une autre propriété qui va nous permettre de les munir d'une mesure canonique.

On dit qu'un sous-shift (Y,σ) est **IES** si (Y,σ) est intrinsèquement ergodique (i.e. possède une unique mesure de probabilité ν d'entropie maximale) et si ν charge les ouverts non vides.

Proposition.— *Un système sofique est IES si et seulement s'il est transitif.*

Preuve.— Supposons (Y,σ) transitif. Alors (Y,σ) est facteur, par une application f, de (X,σ) STF transitif tel que $h(X,\sigma) = h(Y,\sigma)$.
On sait que (X,σ) est IES. Une mesure d'entropie maximale sur Y est nécessairement l'image par f de l'unique mesure maximale sur X, ce qui donne l'unicité d'une telle mesure. Le fait qu'elle charge les ouverts provient directement de la propriété correspondante pour la mesure maximale sur X.
Supposons (Y,σ) IES. On montre facilement qu'un STF contient un STF transitif de même entropie. On en déduit la propriété analogue pour les systèmes sofiques, en utilisant le fait qu'un système sofique est facteur par une application f d'un STF de même entropie et que l'image d'un sous-shift transitif par f est transitif. Le sous-shift (Y,σ) contient donc un système sofique transitif de même entropie (Y',σ).
Mais la propriété "(Y,σ) IES" entraîne que $Y' = Y$ et que (Y,σ) est transitif. □

Proposition.— *Soient (Y,σ) un système sofique transitif et ν son unique mesure maximale. Il existe deux constantes $w_1, w_2 > 0$ telles que, pour tout mot $B \in \mathcal{B}(Y,n)$*

$$w_1\beta^{-n} \leq \nu(Z(B)) \leq w_2\beta^{-n},$$

où $\log\beta = h(Y,\sigma)$.

Preuve.— On a vu que (Y,σ) est facteur du STF transitif (construit plus haut) de même entropie (X_N,σ) par une application ρ_∞, où ρ est une application de S_{X_N} dans S_Y. La mesure ν est l'image par ρ_∞ de l'unique mesure maximale μ sur X_N. Il existe $v_1, v_2 > 0$ tels que pour $B \in \mathcal{B}(X_N,n)$, on ait

$$v_1\beta^{-n} \leq \mu(Z(B)) \leq v_2\beta^{-n}.$$

Le cardinal de $\rho^{-1}(B)$ étant uniformément borné, on déduit qu'il existe de $w_1, w_2 > 0$ tels que, pour $B \in \mathcal{B}(Y,n)$

$$w_1\beta^{-n} \leq \nu(Z(B)) \leq w_2\beta^{-n}.$$

□

Cette propriété de ν entraîne la proposition suivante.

Proposition.— *Soient (Y,σ) un système sofique transitif et ν son unique mesure maximale. L'ensemble des points finitaires est de mesure pleine : $\nu(\mathcal{F})=1$.*

Preuve.— Nous allons montrer que le complémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{F}$ est de mesure nulle. On a

$$\mathcal{N}=\bigcup_{i\in Z}\mathcal{N}_i\ \cup\mathcal{N}_\infty,$$

où $\mathcal{N}_i$ est l'ensemble des y tels que i soit le plus petit entier pour lequel il existe $k<i$ tel que $(y_k,\dots,y_i)$ soit un bloc finitaire, et où $\mathcal{N}_\infty$ est l'ensemble des y tels que, pour tous $i,k\in\mathbb{Z}$, $(y_k,\dots,y_i)$ n'est pas un bloc finitaire.
Cette réunion est disjointe et deux $\mathcal{N}_i$ (pour $i\neq\infty$) sont images l'un de l'autre par une puissance du shift, donc de ν-mesure nulle (invariance de ν par le shift). D'autre part $\mathcal{N}_\infty$ est un fermé invariant par le shift. Commme (Y,σ) est IES, l'entropie topologique du sous-shift $(\mathcal{N}_\infty,\sigma)$ est strictement inférieure à $\log\beta=h(Y,\sigma)$. Il existe donc $R>0$ et $0<\lambda<\beta$ tel que Card $\mathcal{B}(\mathcal{N}_\infty,n)<R\lambda^n$. Or on a

$$\nu(\mathcal{N}_\infty)\leq\sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{N}_\infty,n)}\nu(Z(B))\leq R\lambda^n w_2\beta^{-n},$$

ce qui montre le résultat. □

Remarquons que dans cette démonstration, on a en particulier montré que le nombre de mots non finitaires de longueur n croît exponentiellement moins vite que β^n.

II. Construction du codage

1. Notations

Soit M une matrice carrée de taille $d\times d$, à coefficients entiers, de déterminant ±1, sans valeur propre de module 1. Cette matrice permet de définir un automorphisme (dit hyperbolique) du tore de dimension d par :

$$\mathsf{T}:\mathbb{T}^d\longrightarrow\mathbb{T}^d\ :\ x\longmapsto Mx\ \mathrm{mod}1.$$

La mesure de Lebesgue m sur $\mathbb{T}^d$ est invariante par T, on peut donc considérer le système dynamique $(\mathbb{T}^d,\mathsf{T},m)$. Nous nous proposons de construire un codage de ce système dynamique $(\mathbb{T}^d,\mathsf{T},m)$.

Nous notons F_u (resp. F_s) le sous-espace vectoriel M-stable associé aux valeurs propres de M de module supérieur (resp. inférieur) à 1, π_u (resp. π_s) la projection

sur F_u (resp. F_s) parallèlement à F_s (resp. F_u) et M_u (resp. M_s) la restriction de M à F_u (resp. F_s). Nous fixons une fois pour toute une norme $||\ ||$ sur $\mathbb{R}^d$. Elle induit des normes sur F_u et F_s. Nous notons $B(x,r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r; suivant le contexte il peut s'agir d'une boule de $\mathbb{R}^d$, de F_u ou de F_s. Nous disons d'un ensemble inclus dans F_u (resp. F_s) que c'est un ouvert, un voisinage d'un point, un fermé s'il l'est pour la topologie induite sur F_u (resp. F_s) par $||\ ||$. Pour une partie C de $\mathbb{R}^d$, de F_u ou de F_s, nous notons ∂C le bord de C. Etant donnés deux ensembles $K \subset F_u$ et $L \subset F_s$, nous écrivons indifféremment $L \times K$ ou $L + K$.

Rappelons également le résultat classique suivant.

Théorème.— *(Kronecker) L'ensemble $\pi_u(\mathbb{Z}^d)$ est dense dans F_u.*

Preuve.— Notons r la dimension de F_u. Prenons r éléments $z_1, \ldots, z_r$ de $\mathbb{Z}^d$ tels que les $e_i = \pi_u(z_i)$ forment une base de F_u. Cette base permet de définir dans F_u les ensembles

$$\Lambda_{k_1 \ldots k_r} = \{x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r \ / \ 2k_i - 1 \leq x_i < 2k_i + 1\}.$$

Posons $\Lambda = \Lambda_{0,\ldots,0}$ et considérons la transformation S de Λ définie par

$$\forall\, x \in \Lambda \quad Sx = Mx - 2(k_1 e_1 + \ldots + k_r e_r)$$

où $(k_1, \ldots, k_r)$ est le point de $\mathbb{Z}^d$ tel que Mx appartient à $\Lambda_{k_1 \ldots k_r}$. En itérant cette transformation à partir de x, on obtient une écriture de la forme

$$x = 2 \sum_{i=1}^{\infty} M^{-i}(k_1^i e_1 + \ldots + k_r^i e_r),$$

où les k_j^i sont en nombre fini (car un nombre fini de $\Lambda_{k_1,\ldots,k_r}$ suffit à recouvrir $M\Lambda$). En d'autres termes

$$x = \lim_{N \to \infty} 2\pi_u\Big(\sum_{i=1}^{N}(k_1^i M^{-i} z_1 + \ldots + k_r^i M^{-i} z_r)\Big)$$

est limite de points de $\pi_u(\mathbb{Z}^d)$. Ensuite il suffit de remarquer que $F_u = \bigcup_{l=1}^{\infty} M^l \Lambda$ (car la restriction de M à F_u est dilatante) pour conclure. □

Remarque : La démonstration précédente utilise une transformation d'un cube dans F_u qui peut se voir comme une β-transformation multidimensionnelle. Comme dans le cas Pisot (le β-shift est directement lié à la β-transformation), on peut construire un codage de $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ en utilisant une telle transformation, mais on peut montrer que l'espace symbolique obtenu n'est généralement pas sofique. Des

deux caractérisations des β-développements (dynamique ou lexicographique), c'est la seconde qui donne lieu à la généralisation la plus intéressante d'un point de vue symbolique.

2. M_u-développement

Donnons-nous un ensemble E d'éléments de F_u. C'est l'ensemble des "digits" du M_u-développement. Considérons l'ensemble

$$W = \{\sum_0^\infty M_u^{-i} e_i \ / \ (e_i) \in E^{\mathbf{N}} \}.$$

C'est le compact caractérisé par la relation

$$W = \bigcup_{e \in E} (M_u^{-1} W + e).$$

Fixons un ordre sur E. Cet ordre induit un ordre sur $E^{\mathbf{N}}$.

Définition.— *Soit w un élément de W. On appelle M_u-développement de w le plus grand des éléments e de $E^{\mathbf{N}}$ tels que $w = \sum M_u^{-i} e_i$. On dit qu'un mot $e_0 \dots e_k$ est admissible s'il existe un M_u-développement commençant par $e_0 \dots e_k$.*

Notons Y' l'ensemble des M_u-développements des points de W et Y l'adhérence de Y' (pour la topologie produit sur $E^{\mathbf{N}}$). L'ensemble des mots du sous-shift unilatère Y est l'ensemble des mots admissibles. Donnons une caractérisation simple des mots admissibles.
A partir de la définition, on voit facilement qu'un mot $e_0 \dots e_k$ est admissible si et seulement s'il existe une suite $e_{k+1} e_{k+2} \dots$ telle que, pour tout mot $c_0 \dots c_k$ supérieur strictement à $e_0 \dots e_k$ et toute suite $c_{k+1} \dots$, on ait

$$\sum_0^\infty M_u^{-i} e_i \neq \sum_0^\infty M_u^{-i} c_i,$$

ce qui peut se réécrire (en prenant l'image par M^{k+1})

$$\sum_0^k M_u^{k+1-i}(e_i - c_i) + \sum_{k+1}^\infty M_u^{k+1-i} e_i \neq \sum_{k+1}^\infty M_u^{k+1-i} c_i.$$

Notons $a_{k+1}(c, e)$ la quantité $\sum_0^k M^{k+1-i}(e_i - c_i)$, et $A'_{e_0 \dots e_k}$ l'ensemble des $a_{k+1}(c, e)$ lorsque $c_0 \dots c_k$ décrit l'ensemble des suites supérieures strictement à $e_0 \dots e_k$. Ce qui précède permet alors de voir que $e_0 \dots e_k$ est admissible si et seulement si

$$W \not\subset \bigcup_{a \in A'_{e_0 \dots e_k}} (W - a).$$

Désignons par $W - W$ l'ensemble $\{w - w' \ / \ (w, w') \in W^2\}$. Si a n'appartient pas à $W - W$, $W \cap (W - a) = \emptyset$ (parmi les $c_0 \dots c_k > e_0 \dots e_k$ seuls nous intéressent ceux qui peuvent être le début d'une écriture d'un $\sum_{i=0}^{\infty} M^{-i} e_i$). Posons donc

$$A_{e_0 \dots e_k} = A'_{e_0 \dots e_k} \cap (W - W).$$

On obtient la caractérisation suivante des mots admissibles : un mot $e_0 \dots e_k$ est admissible si et seulement si

$$W \not\subset \bigcup_{a \in A_{e_0 \dots e_k}} (W - a).$$

Cette condition fournit naturellement un graphe engendrant Y. Il est défini par ses sommets (les $A_{e_0 \dots e_k}$ tels que $(e_0 \dots e_k)$ soit admissible (a priori en nombre infini)) et ses flèches (une flèche numérotée e_{k+1} joint $A_{e_0 \dots e_k}$ à $A_{e_0 \dots e_{k+1}}$). Sous une condition simple ce graphe est fini.

Lemme.— *Lorsque E est un ensemble d'images par π_u d'éléments de $\mathbb{Z}^d$, l'ensemble des $a_i(c, e)$ (i décrivant $\mathbb{N}$, c et e décrivant $E^{\mathbb{N}}$) est discret dans F_u. En particulier les $a_i(c, e)$ appartenant au compact $W - W$ sont en nombre fini.*

Preuve.— Considérons un ensemble Γ de points à coordonnées entières tel que π_u soit une bijection de Γ sur E. On peut écrire

$$a_{k+1}(c, e) = \sum_0^k M_u^{k+1-i}(e_i - c_i) = \pi_u\left(\sum_0^k M^{k+1-i}(\epsilon_i - \gamma_i)\right)$$

où ϵ_i et γ_i sont dans Γ tels que $\pi_u(\epsilon_i) = e_i$ et $\pi_u(\gamma_i) = c_i$. Notons $\alpha_{k+1}(\gamma, \epsilon)$ l'entier $\sum_0^k M^{k+1-i}(\epsilon_i - \gamma_i)$. Comme M_s est contractante et Γ est fini, les quantités $\pi_s(\alpha_{k+1}(\gamma, \epsilon))$ sont bornées par une borne R indépendante des suites ϵ et γ choisies. Donnons nous un ensemble B borné de F_u. L'ensemble des points z de $\mathbb{Z}^d$ tels $\pi_u(z) \in B$, et $||\pi_s(z)|| \leq R$ est fini, donc l'ensemble des $a_{k+1}(c, e)$ appartenant à B aussi. □

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème.— *Si E est un ensemble de projections (par π_u) d'éléments du réseau $\mathbb{Z}^d$, Y est sofique.*

Preuve.— Comme le montre le lemme précédent, les $A_{e_0 \dots e_k}$ sont dans ce cas des parties d'un ensemble fini, donc en nombre fini. Ainsi, Y est engendré par un graphe fini, et Y est sofique. □

3. Entropie

Le but de ce paragraphe est de calculer l'entropie topologique de Y. Cette entropie dépend bien sûr de l'ensemble E. Si E n'a qu'un élément par exemple, le calcul est trivial et sans intérêt.

Nous nous plaçons dans la situation suivante : les points de E sont des projections d'éléments de $\mathbb{Z}^d$, le compact W contient un voisinage de zéro. C'est sous cette hypothèse que nous calculerons l'entropie de Y.

Pour cela nous allons utiliser certaines propriétés topologiques de W.

L'application

$$\Phi \ : \ K \mapsto \Phi(K) = \bigcup_{e\in E}(M^{-1}K + e),$$

qui à un compact en associe un autre, est contractante pour la distance de Hausdorff induite par une norme adéquate sur F_u. Pour tout compact K, $\Phi^n(K)$ converge donc vers l'unique point fixe de Φ : W. Nous en déduisons :

Proposition.— *Soit U un compact tel que $U \subset \bigcup_{e\in E}(M^{-1}U+e)$, alors U est inclus dans W.*

Preuve.— La relation $U \subset \bigcup_{e\in E}(M^{-1}U+e)$ entraîne, Φ étant croissante, $U \subset \Phi^k(U)$ pour tout k, donc $U \subset W$. □

Cette proposition permet de voir que l'on peut toujours choisir un sous-ensemble E de $\pi_u(\mathbb{Z}^d)$ pour que W soit un voisinage de 0. En effet, considérons dans F_u la boule compacte de rayon positif r, $B(0,r)$. D'après le théorème de Kronecker $\pi_u(\mathbb{Z}^d)$ est dense dans F_u, donc la famille $(B(0,r)^\circ + e)_{e\in\pi_u(\mathbb{Z}^d)}$ est un recouvrement ouvert de $B(0,r)$. Un sous-recouvrement fini fournit un ensemble $E \subset \pi_u(\mathbb{Z}^d)$ tel que

$$B(0,r) \subset \bigcup_{e\in E}(M^{-1}B(0,r) + e),$$

et d'après la proposition l'ensemble W défini par un tel E contient $B(0,r)$.

Proposition.— *Le compact W est l'adhérence de son intérieur.*

Preuve.— L'ensemble $\bigcup_{e\in E}(M^{-1}W^\circ+e)$ est un ouvert inclus dans W donc dans W°. Ainsi $\overline{\bigcup(M^{-1}W^\circ + e)} = \bigcup(M^{-1}\overline{W^\circ} + e)$ est inclus dans $\overline{W^\circ}$, c'est-à-dire $\Phi(\overline{W^\circ}) \subset \overline{W^\circ}$, et en itérant $\Phi^k(\overline{W^\circ}) \subseteq \overline{W^\circ}$ pour tout k entier naturel. Or $\Phi^k(\overline{W^\circ})$ converge vers W, donc $W \subseteq \overline{W^\circ}$. L'inclusion inverse étant triviale (W est compact), cela

montre $W = \overline{W^\circ}$.

□

Pour un mot $e = e_1 \dots e_k$, notons W_e l'ensemble des points de W dont le M_u-développement commence par e. La famille $\{W_e\}_{e \in E^k}$ forme une partition de W (W_e n'est non vide que si e est admissible). Pour un mot $e = e_1 \dots e_k$, notons $\tilde{e}$ le vecteur $e_1 + M^{-1}e_2 + \dots + M^{-k+1}e_k$. On peut écrire :

$$W_e = (M^{-k}W + \tilde{e}) \setminus \Big(\bigcup_{f \in E^k, f > e} (M^{-k}W + \tilde{f}) \Big).$$

On en déduit :

Proposition.— *L'ensemble W_e et son adhérence ont même intérieur.*

Preuve.— Remarque préliminaire : l'ensemble W vérifie les relations

$$W = \overline{W} = \overline{W^\circ} \quad W^\circ = (\overline{W})^\circ.$$

Toute boule ouverte rencontrant la frontière de W rencontre donc à la fois W° et le complémentaire de W.

On a l'inclusion suivante :

$$\partial W_e \subset \bigcup_{f \in E^k, f \geq e} (M^{-k}\partial W + \tilde{f}) = X_e.$$

En effet, si x n'appartient pas au compact X_e, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \cap X_e = \emptyset$. Alors, d'après la remarque préliminaire, pour chaque f supérieur ou égal à e, $B(x, \epsilon)$ est incluse dans $(M^{-k}W^\circ + \tilde{f})$ ou dans le complémentaire de $(M^{-k}W + \tilde{e})$. Cela entraîne que $B(x, \epsilon)$ est incluse soit dans W_e°, soit dans ${}^c(\overline{W_e})$, donc que x n'appartient pas à ∂W_e.

Supposons W_e non vide (le cas vide est trivial) et prenons un x dans ∂W_e. D'après l'inclusion précédente et la remarque préliminaire, pour tout $\epsilon > 0$ $B(x, \epsilon)$ rencontre $(M^{-k}W + \tilde{e})^c$ ou un $(M^{-k}W^\circ + \tilde{f})$ $(f > e)$, donc x est limite de points de $(M^{-k}W + \tilde{e})^c \cup (\bigcup_{f>e}(M^{-k}W^\circ + \tilde{f}))$. Cet ensemble est un ouvert inclus dans le complémentaire de W_e, donc dans le complémentaire de l'adhérence de W_e. Le point x n'est donc pas dans l'intérieur de l'adhérence de W_e. La proposition en découle.

□

Revenons à la dynamique symbolique. Pour un mot e admissible, rappelons que $o_+(e)$ désigne l'ensemble des éléments $f = f_1 \dots f_n \dots$ de Y tels que $e_1 \dots e_k f_1 \dots f_n \dots$ soit encore dans Y (voir partie I). L'ensemble $o_+(e)$ ne dépend que de $A_{e_1 \dots e_k}$ donc

l'ensemble des $o_+(e)$ lorsque e décrit $\mathcal{B}(Y)$ est un ensemble fini.

Considérons l'application Ψ de Y dans W définie par : $\Psi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} M^{-i} f_i$. Cette application est le lien naturel entre $o_+(e)$ et W_e.

Proposition.— *On a l'égalité :* $\Psi(o_+(e)) = M^k \overline{W_e} - M^k \tilde{e}$.

Preuve.— Ce résultat est une conséquence immédiate des définitions, de la compacité de Y et de la continuité de Ψ. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner une évaluation du nombre de mots admissibles. Rappelons que $\mathcal{B}(Y,k)$ désigne l'ensemble des mots admissibles de longueur k. Notons Δ la valeur absolue du déterminant de M_u, l une mesure de Lebesgue $dim F_u$-dimensionnelle sur F_u.

Théorème.— *Il existe un réel R tel que*

$$\Delta^k \leq \mathrm{Card}\mathcal{B}(Y,k) \leq R\, l(W)\, \Delta^k.$$

En particulier, l'entropie topologique de Y est égale à $\log \Delta$.

Preuve.— Les $o_+(e)$ sont en nombre fini. Donc, d'après les deux propositions précédentes les $M^{-k} W_e^\circ$ sont en nombre fini à translation près, et il existe un $R > 0$ tel que, pour tout k et tout $e \in \mathcal{B}(Y,k)$, on ait :

$$R^{-1} \Delta^{-k} \leq l(W_e^\circ) \leq R\, \Delta^{-k}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$l(W) = \sum_{e \in \mathcal{B}(Y,k)} l(W_e).$$

On en déduit la majoration

$$l(W) \leq \sum_{e \in \mathcal{B}(Y,k)} \Delta^{-k} l(W) \leq \mathrm{Card}\mathcal{B}(Y,k)\ \Delta^{-k}\ l(W),$$

et la minoration

$$l(W) \geq \sum_{e \in \mathcal{B}(Y,k)} l(W_e^\circ) \geq \mathrm{Card}\mathcal{B}(Y,k)\ R^{-1} \Delta^{-k},$$

d'où l'encadrement souhaité. □

4. Codage

Nous nous plaçons dans la même situation que dans le paragraphe précédent : E est un ensemble de projections de points de $\mathbb{Z}^d$, W contient un voisinage de 0. On souhaite coder $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ par un système sofique X transitif. Cela présente un double avantage. L'intrinsèque ergodicité permet d'identifier une mesure d'entropie maximale. D'autre part tous les sous-shifts strictement inclus dans X sont d'entropie strictement plus petite que l'entropie topologique de X, donc aucun ne permet de coder $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ (en ce sens le codage est minimal).

Considérons le système sofique bilatère Z défini par :

$$Z = \{(e_i)_{i\in\mathbb{Z}} / \ \forall k \ \ (e_k, e_{k+1}, \ldots) \in Y\}.$$

On pourrait coder $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T})$ par Z, mais Z n'a aucune raison d'être transitif. Cependant il contient un système sofique transitif X d'entropie $\log \Delta$. On peut toujours changer le nom des lettres de l'alphabet définissant X. Le sous-shift X étant, comme Z, inclus dans $E^{\mathbb{Z}}$, on peut, si l'on préfère, le considérer comme sous-ensemble de $\Gamma^{\mathbb{Z}}$, où Γ est un ensemble fini inclus dans $\mathbb{Z}^d$ en bijection avec E par π_u. C'est ce que nous faisons à partir de maintenant.

Dans F_u la suite $\sum_{-N}^{N} M^{-i}\pi_u(\epsilon_i)$ n'est généralement pas convergente. Cependant ϵ_i appartenant à $\mathbb{Z}^d$, on a l'égalité modulo 1 : $\pi_u(\epsilon_i) = -\pi_s(\epsilon_i)$. Les propriétés de contraction de M_u et M_s assurent alors l'existence d'une limite modulo 1 de la suite $\sum_{-N}^{N} M^{-i}\pi_u(\epsilon_i)$, cette limite définissant l'application ϕ introduite dans le théorème suivant. Soit ν l'unique probabilité d'entropie maximale sur X.

Théorème.— *Le système dynamique $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ est facteur du système symbolique (X, σ, ν) par l'application*

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{T}^d \ : \ (\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{1}^{\infty} \pi_u(M^{-i}\epsilon_i) \mod 1 \ - \sum_{-\infty}^{0} \pi_s(M^{-i}\epsilon_i) \mod 1.$$

De plus ϕ est une application höldérienne.

Pour plus de clarté nous scindons la preuve de ce théorème.

Proposition.— *L'application ϕ est un homomorphisme, c'est-à-dire $\phi \circ \sigma = \mathsf{T} \circ \phi$.*

Preuve.—

$$\phi(\sigma((\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}})) \ = \ \lim_{N\to\infty} ((\sum_{-N}^{N} M^{-i}\pi_u(\epsilon_{i+1})) \mod 1)$$

$$= \lim_{N\to\infty}(M(\sum_{-N}^{N} M^{-i-1}\pi_u(\epsilon_{i+1}))\ \mathrm{mod}\ 1)$$
$$= T(\phi((\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}})).$$

□

Proposition.— *L'application ϕ est höldérienne.*

Preuve.— Soient ϵ et ϵ' deux suites telles que $\epsilon_i = \epsilon'_i$ pour $|i| \leq N$. Evaluons

$$d(\phi(\epsilon),\phi(\epsilon')) = d(\sum_{m+1}^{\infty}\pi_u(M^{-i}(\epsilon_i-\epsilon'_{i+1})) - \sum_{-\infty}^{m}\pi_s(M^{-i}(\epsilon'_i-\epsilon_i))\ ,\ \mathbb{Z}^d).$$

On a

$$d(\phi(\epsilon),\phi(\epsilon')) \leq d(\sum_{m+1}^{\infty}\pi_u(M^{-i}(\epsilon_i-\epsilon'_{i+1}))\ ,\ \mathbb{Z}^d)\ + d(\sum_{-\infty}^{m}\pi_s(M^{-i}(\epsilon'_i-\epsilon_i))\ ,\ \mathbb{Z}^d)$$

et

$$d(\phi(\epsilon),\phi(\epsilon')) \leq R\ \alpha^N$$

pour un $R > 0$ et un $0 < \alpha < 1$, car M_u est dilatante, M_s est contractante et les ϵ_i sont en nombre fini. □

Proposition.— *L'application ϕ est surjective.*

Preuve.— Le nombre de mots de longueur n de X vérifie une inégalité de la forme

$$R^{-1}\ \Delta^n < \mathrm{Card}\mathcal{B}(X,n) < R\ \Delta^n.$$

On en déduit (les $\overline{W_\epsilon}$ étant en nombre fini à translation près) que les sous-ensembles $F_n = \cup_{\epsilon\in\mathcal{B}(X,n)}\overline{W_\epsilon}$ de W sont tous de mesure supérieure à un $\alpha > 0$. Le compact $F = \cap_{n>0}F_n$ image de X par l'application

$$\psi : X \longrightarrow W\ :\ (\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} M^{-i}\pi_u(\epsilon_i),$$

limite de la suite décroissante (F_n), est alors de mesure supérieure ou égale à α. Il suffit maintenant, pour obtenir la surjectivité de ϕ, de montrer que, pour un ensemble F inclus dans F_u de mesure de Lebesgue $dim F_u$-dimensionnelle positive, on a

$$\overline{\cup_{k>0}M^kF\ \mathrm{mod}\ 1} = \mathbb{T}^d$$

ou mieux, de montrer que F mod 1 contient un point générique pour la mesure de Lebesgue sur le tore, i.e. un point x tel que pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f(\mathsf{T}^k x) = m(f).$$

Le système dynamique $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ étant ergodique, presque tous les points du tore sont génériques. On utilise alors le lemme suivant (voir [2]).

Lemme.— *Si z est générique, $\pi_u(z)$ est générique.*

Preuve.— Il suffit de voir que, pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, les deux suites

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f(M^k z)$$

$$\text{et } \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f(M^k \pi_u(z))$$

sont adjacentes. Pour cela, écrivons

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f(M^k z) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f(M^k(\pi_u(z)) + M^k(\pi_s(z))).$$

L'application M_s étant contractante et f étant uniformément continue, on en déduit facilement (en scindant la somme $\frac{1}{N}\sum_0^{N-1}(f(M^k z) - f(M^k \pi_u(z)))$ en deux) que les deux suites considérées ci-dessus sont adjacentes.

□

Remarquons que cette méthode légèrement modifiée (utiliser les coordonnées locales) donne des résultats analogues pour un difféomorphisme d'Anosov. On obtient notamment la minimalité des feuilles dilatantes.
Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit de remarquer que si F est de mesure de Lebesgue $dim F_u$-dimensionnelle positive, alors $F \times F_s$ mod 1 est de mesure de Lebesgue positive dans le tore, donc contient un point générique et F aussi. □

Proposition.— *La mesure de Lebesgue m est image par ϕ de la mesure ν.*

Preuve.— Cela provient directement de la surjectivité de ϕ et de l'intrinsèque ergodicité de X. □

III. Caractéristiques et applications

1. Constructibilité

Dans ce paragraphe nous montrons comment obtenir une construction effective de X. Les notations sont celles de la partie II. Le système X est obtenu à partir de Y, l'adhérence des M_u-développements des points de W. Commençons par tenter de construire Y.

Nous avons vu que Y est engendré par un graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets sont des parties d'un ensemble A (les $a_{k+1}(e,c)$ de $W-W$) dont à priori on ne sait qu'une chose, il est fini. On trouve facilement des bornes L et L' à $\pi_s(A)$ et $\pi_u(A)$. Ceci nous permet de déterminer un ensemble $C \subset \pi_u(\mathbb{Z}^d)$ tel que $A \subset C$, et c'est à partir de cet ensemble que nous définissons un graphe $\mathcal{G}'$ engendrant également Y.

Pour un mot $e_0 \dots e_k$ de E^k, considérons les objets suivants :

$$\mathcal{G}_{e_0 \dots e_k} = \{c_0 \dots c_k > e_0 \dots e_k \ / \ \forall i = 0, \dots, k+1 \ \ a_i(c,e) \in C\}$$

$$\text{et } C_{e_0 \dots e_k} = \{a_{k+1}(c,e) \ / c_0 \dots c_k \in \mathcal{G}_{e_0 \dots e_k}\}.$$

Pour construire effectivement les $C_{e_0 \dots e_k}$, on commence par calculer les C_e pour e dans E, puis les C_e pour e dans E^2 et on augmente ainsi la longueur des mots. Lorsque l'augmentation d'une unité de cette longueur ne fait pas apparaître de nouveau $C_{e_0 \dots e_k}$ on a déjà obtenu tous les $C_{e_0 \dots e_k}$.
Choisissons pour sommets du graphe de $\mathcal{G}'$ les $C_{e_0 \dots e_k}$ tels que

$$W \not\subset \bigcup_{c \in C_{e_0 \dots e_k}} (W - c).$$

Les flèches de $\mathcal{G}'$ sont définies naturellement. On passe de l'état $C_{e_0 \dots e_k}$ à l'état $C_{e_0 \dots e_{k+1}}$ par une flèche étiquetée e_{k+1}.

Proposition.— *Le graphe $\mathcal{G}'$ engendre Y.*

Preuve.— Soit $e_0 \dots e_k$ un mot. L'admissibilité de ce mot est équivalente à (voir partie II)

$$W \not\subset \bigcup_{a \in A_{e_0 \dots e_k}} (W - a).$$

On peut écrire $C_{e_0 \dots e_k} = A_{e_0 \dots e_k} \cup D_{e_0 \dots e_k}$ avec $D_{e_0 \dots e_k} \subset C \backslash (W - W)$. Or

$$W \cap \bigcup_{d \in D_{e_0 \dots e_k}} (W - d) = \emptyset.$$

Finalement

$$\bigcup_{c\in C_{e_0\dots e_k}} (W-c)\cap W = \bigcup_{a\in A_{e_0\dots e_k}} (W-a)\cap W$$

et le graphe proposé engendre bien Y. □

Pour construire $\mathcal{G}'$ il faut encore tester pour chaque $C_{e_0\dots e_k}$ la condition

$$W \not\subset \bigcup_{c\in C_{e_0\dots e_k}} (W-c).$$

Posons

$$W_n = \{\sum_0^n M^{-i}e_i \ / \ (e_i)\in E^{n+1}\}.$$

Si $W \subset \bigcup_{b\in B}(W-b)$ il existe $0<\alpha<1$ et $R>0$ (calculables) tels que :

$$\forall w_n \in W_n \quad d(w_n, \bigcup_{b\in B}(W_n-b)) \le R\alpha^n.$$

Comme W est l'adhérence de son intérieur, si $W \not\subset \bigcup_{b\in B}(W-b)$, il existe $w\in W$ tel que $d(z, \bigcup_{b\in B}(W-b))>0$, donc, pour n suffisamment grand, il existe w_n tel que

$$d(w_n, \bigcup_{b\in B}(W_n-b)) > R\ \alpha^n.$$

On peut maintenant proposer un procédé permettant la détection des $C_{e_0\dots e_k}$ qui sont des sommets de $\mathcal{G}'$. Pour n donné, pour chaque ensemble $B = C_{e_0\dots e_k}$, on teste s'il existe un ponit w_n de W_n tel que l'inégalité $d(w_n, \bigcup_{b\in B}(W_n-b)) > R\ \alpha^n$ est vérifiée. Si oui, B est un état final. On commence à $n=0$ puis on augmente n. Pour n suffisamment grand on aura obtenu tous les sommets. Le problème cependant reste entier car nous n'avons pas de critère nous permettant de tester si nous avons, ou non, obtenu tous les sommets de $\mathcal{G}'$.

Nous ne sommes donc pas en mesure de construire Y. Malgré tout, on peut construire un graphe engendrant un système sofique transitif X codant $(\mathbb{T}^d, \top, m)$ par ϕ. En effet, pour obtenir un tel X il nous suffit de construire un sous-graphe transitif de $\mathcal{G}'$ engendrant un système sofique d'entropie $\log\Delta$. Dans le procédé précédent, à chaque fois que l'on détecte un nouveau sommet de $\mathcal{G}'$, construisons donc une matrice A dont le rayon spectral est l'exponentielle de l'entropie du sous-shift engendré par le morceau du graphe $\mathcal{G}'$ déjà détecté (voir dans la partie I le paragraphe sur le système engendré par un graphe). Si ce rayon spectral est inférieur à Δ, il faut continuer à calculer. S'il est égal à Δ, le morceau du graphe construit suffit à engendré un X codant l'automorphisme du tore.

2. Le cas Pisot

Pour un nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x.

Plaçons-nous dans le cas où F_u est une droite propre associée à une valeur propre β réelle positive. Soit v un vecteur de $\mathbb{Z}^d$. Considérons l'ensemble :

$$W = \{\sum_0^\infty M^{-i}(\epsilon_i \pi_u(v)) \ / \ (\epsilon_i) \in \{0, \ldots, [\beta]\}^{\mathbf{N}}\}.$$

On peut voir facilement que W est le segment :

$$W = [0, (\beta - 1)^{-1}\beta[\beta]].\pi_u(v).$$

Munissons $\{0, \ldots, [\beta]\}$ de l'ordre naturel. Chercher le plus grand développement d'un élément $x.\pi_u(v)$ de W, c'est chercher la plus grande écriture de x de la forme $x = \sum_0^\infty \beta^{-i}\epsilon_i$ où $(\epsilon_i) \in \{0, \ldots, [\beta]\}^{\mathbf{N}}$.
Cette plus grande écriture est donnée par la suite suivante :

$$\epsilon_0 = [x] \quad \alpha_0 = \{x\}$$

$$\epsilon_{i+1} = [\beta\ \alpha_i] \quad \alpha_{i+1} = \{\beta\ \alpha_i\}.$$

On en déduit que, pour tout x dans le segment $[\gamma_k, \gamma_k + \beta^{-k}[$ (où on a posé $[\beta] + \ldots + [\beta]\beta^{-k} = \gamma_k$), le plus grand développement de x est donné par : $\epsilon_0 = \ldots = \epsilon_k = [\beta]$ et $(\epsilon_{k+1}, \ldots)$ est le β-développement de $\beta^k(x - \gamma_k)$.

L'ensemble des M_u-développements des éléments de W est donc fourni par :

$$Z_\beta = \{\epsilon_0 \ldots \ / \ \exists\ k \text{ avec } \epsilon_0 \ldots \epsilon_k = [\beta] \ldots [\beta] \text{ et } (\epsilon_{k+1} \ldots) \in X'_\beta\}$$

où X'_β est le β-shift unilatère.
La méthode décrite dans ce travail fournit un sous-graphe du graphe engendrant Z_β. Ce sous-graphe engendre un système sofique d'entropie $\log \beta$ inclus dans le β-shift bilatère X_β, il engendre donc X_β, car X_β est intrinsèquement ergodique et la mesure d'entropie maximale est positive sur les ouverts. Le codage obtenu coïncide donc avec celui construit dans [2] (repris dans [17]).

3. Etude de ϕ

L'application ϕ a une forme particulièrement intéressante. L'image d'une suite est donnée par ses coordonnées dans la feuille dilatante et dans la feuille contractante. Dans ce paragraphe nous étudions essentiellement ces "applications coordonnées". Considérons les applications suivantes :

$$\psi \ : \ X_+ \to F_u \ : \ \epsilon \mapsto \sum_1^\infty \pi_u(M^{-i}\epsilon_i)$$

$$\chi \ : \ X_- \to F_s \ : \ \epsilon \mapsto \sum_{-\infty}^0 \pi_s(M^{-i}\epsilon_i)$$

Rappelons que o_+ désigne l'application

$$o_+ \ : \ \mathcal{B}(X) \to \mathcal{P}(X_+) \ : \ \epsilon \mapsto \{\eta \in X_+ \ / \ (\epsilon,\eta) \in X_+\}.$$

Nous définissons de même

$$o_- \ : \ \mathcal{B}(X) \to \mathcal{P}(X_-) \ : \ \epsilon \mapsto \{\eta \in X_- \ / \ (\eta,\epsilon) \in X_-\}.$$

Comme ϕ est surjective, on a :

$$\mathbb{T}^d = \chi(X_-) \times \psi(X_+) \bmod 1.$$

On en déduit immédiatement une propriété supplémentaire de ϕ.

Proposition.— *Il existe un entier $p \geq 1$ tel que presque tout point de $\mathbb{T}^d$ ait p antécédents par ϕ.*

Preuve.— Pour un point x de $\mathbb{T}^d$ notons $Q(x)$ le nombre d'antécédents de x par ϕ. Il est facile de voir que Q est invariante par T. Comme $\chi(X_-) \times \psi(X_+)$ est compact elle est aussi bornée. L'ergodicité de $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ permet alors de conclure. □

La réunion

$$\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} (\chi(X_-) \times \psi(X_+)) + z$$

est un recouvrement de $\mathbb{R}^d$. D'après le théorème de Baire le compact $\chi(X_-) \times \psi(X_+)$ n'est donc pas d'intérieur vide, donc, ni $\chi(X_-)$ ni $\psi(X_+)$ ne sont d'intérieur vide. Etudions $\psi(X_+)$ (l'étude de $\chi(X_-)$ se fait de la même manière). Le compact $\psi(X_+)$ a une structure particulière, de type autosimilarité :

$$\psi(X_+) = \bigcup_{\epsilon \in \mathcal{B}(X,n)} (v_\epsilon + M_u^{-n}\psi(o_+(\epsilon))).$$

Chaque $\psi(o_+(\epsilon))$ vérifie lui-même une propriété analogue :

$$\psi(o_+(\epsilon)) = \bigcup_{\eta \in \mathcal{B}(X,n),(\epsilon,\eta) \in \mathcal{B}(X)} (v_\eta + M_u^{-n}\psi(o_+((\epsilon,\eta)))).$$

Proposition.— *Pour tout ϵ de $\mathcal{B}(X)$, $\psi(o_+(\epsilon))$ est l'adhérence de son intérieur.*

Preuve.— Rappelons que, X étant transitif, il existe un graphe transitif engendrant X (Fischer). Soit G un tel graphe, S l'ensemble de ses sommets. Pour un sommet s, appelons $o_+(s)$ l'ensemble fermé des suites engendrées par les chemins infinis partant de s. Pour tout ϵ de $\mathcal{B}(X)$, il existe un ensemble de sommets S_ϵ tel que :

$$o_+(\epsilon) = \bigcup_{s \in S_\epsilon} o_+(s).$$

Cela signifie que, pour tout entier n positif, $\psi(X_+)$ est une réunion finie de translatés de $M_u^{-n}\psi(o_+(s))$. Le compact $\psi(X_+)$ est d'intérieur non vide, donc l'un au moins des $\psi(o_+(s))$ est d'intérieur non vide. Mais les $\psi(o_+(s))$ vérifient également une égalité de la forme :

$$\psi(o_+(s)) = \bigcup (v_\alpha + M_u^{-n}\psi(o_+(s_\alpha))),$$

où la réunion est prise sur les mots α engendrés par les chemins de longueur n partant de s (le graphe G étant de Shannon pour chaque mot α, il existe au plus un chemin partant de s engendrant α; on désigne par s_α l'extrémité final de ce chemin, v_α un vecteur dépendant de α). Le graphe G étant transitif, on voit que pour tout s, $\psi(o_+(s))$ contient un translaté d'un $M_u^{-k_t}\psi(o_+(t))$, pour tout t de S. On en déduit que tous les $\psi(o_+(s))$ sont d'intérieur non vide. Par suite, pour tout ϵ, $\psi(o_+(\epsilon))$ est d'intérieur non vide.

Prenons maintenant un point x sur la frontière de $\psi(o_+(\epsilon))$, r un réel positif et n suffisamment grand pour que le diamètre de $M_u^{-n}\psi(X_+)$ soit plus petit que r. L'égalité

$$\psi(o_+(\epsilon)) = \bigcup_{\eta \in \mathcal{B}(X,n),(\epsilon,\eta)\in\mathcal{B}(X)} (v_\eta + M_u^{-n}\psi(o_+((\epsilon,\eta))))$$

montre alors que $B(x,r)$ contient un $v_\eta + M_u^{-n}\psi(o_+((\epsilon,\eta)))$, donc un point intérieur à $\psi(o_+(\epsilon))$, et le résultat est démontré. □

De cette proposition on déduit que les bords de $\psi(o_+(\epsilon))$ sont d'intérieur vide. En fait, ils sont de mesure $dimF_u$-dimensionnelle nulle.

Proposition.— *Quel que soit le mot ϵ, le bord de $\psi(o_+(\epsilon))$ est de mesure $dimF_u$-dimensionnelle nulle.*

Preuve.— Considérons de nouveau un graphe de Shannon G, transitif, d'ensemble de sommets S, engendrant X. Pour un sommet s quelconque de G considérons maintenant le recouvrement

$$\psi(o_+(s)) = \bigcup (v_\alpha + M_u^{-n}\psi(o_+(s_\alpha))).$$

Le compact $\psi(o_+(s))$ est d'intérieur non vide. Donc pour n suffisamment grand, l'un des $v_\alpha + M_u^{-n}\psi(o_+(s_\alpha))$ est contenu dans l'intérieur de $\psi(o_+(s))$. Cet ensemble $v_\alpha + M_u^{-n}\psi(o_+(s_\alpha))$ est donc inutile pour couvrir le bord de $\psi(o_+(s))$. Cela suffira à montrer que les bords des $\psi(o_+(t))$ sont de mesure nulle, donc qu'il en est de même des bords des $\psi(o_+(\epsilon))$.
Pour tout n, construisons à partir de G un autre graphe G_n, de même ensemble de sommets, mais avec des flèches étiquetées par $\mathcal{B}(X,n)$ définies de la manière suivante : deux sommets s et s' sont joints par une flèche ϵ allant de s à s' s'il existe un chemin dans G de longueur n allant de s à s' engendrant ϵ. Pour des raisons de périodicité de G, il se peut que pour certaines valeurs de n, G_n ne soit pas transitif. Néanmoins pour tout N, on peut choisir $n \geq N$ tel que G_n soit transitif. Prenons un n_0 tel que G_{n_0} soit transitif, et α_0 un mot tel que $v_{\alpha_0} + M_u^{-n}\psi(o_+(s_{\alpha_0}))$ soit inclus dans l'intérieur de $\psi(o_+(s))$. Appelons H le graphe déduit de G_{n_0} en enlevant la flèche numérotée α_0 allant de s à s_{α_0} et U (resp. V) le système sofique engendré par G_{n_0} (resp. H). Le graphe G_{n_0} étant de Shannon et transitif, V est inclus strictement dans U, donc d'entropie topologique $\log \delta^{n_0}$ strictement inférieure à celle de U, $\log \Delta^{n_0}$.
Le choix de α_0 a été fait pour que l'on ait pour tout t :

$$\partial\psi(o_+(t)) \subset \bigcup_{\eta \in \mathcal{B}(V,k)} (v_\eta + M_u^{-kn_0}\psi(o_+(t_\eta))).$$

Il vient donc, pour une mesure $dimF_u$-dimensionnelle m_u,

$$m_u(\partial\psi(o_+(t))) \leq \mathrm{Card}\mathcal{B}(V,k)\ \Delta^{-kn_0}\ m_u(\psi(X_+)).$$

Or il existe C tel que $\mathrm{Card}\mathcal{B}(V,k)$ soit inférieur à $C\delta^{kn_0}$, on peut donc écrire

$$m_u(\partial\psi(o_+(t))) \leq\ \delta^{kn_0}\Delta^{-kn_0}\ m_u(\psi(X_+)),$$

et on conclut car $\delta^{n_0} < \Delta^{n_0}$. □

En partant d'un graphe de Shannon transitif engendrant $X^* = \{\epsilon\ /\ (\epsilon_{-i})_{i\in\mathbb{Z}} \in X\}$ on obtient de même la proposition suivante.

Proposition.— *Pour tout mot ϵ, $\chi(o_-(\epsilon))$ est l'adhérence de son intérieur, et son bord $\partial\chi(o_-(\epsilon))$ est de mesure $dimF_s$-dimensionnelle nulle.*

Corollaire.— *Les applications ψ et χ sont presque surement injectives.*

Preuve.— Un point de $\psi(X_+)$ admettant deux antécédents par ψ appartient à l'intersection de deux $v_\epsilon + M_u^{-n}\psi(o_+(\epsilon))$ pour deux mots ϵ distincts de même longueur. Il suffit donc de montrer que deux tels $v_\epsilon + M_u^{-n}\psi(o_+(\epsilon))$ ne peuvent se rencontrer que sur leur frontière (de mesure nulle d'après les propositions précédentes).

Si ce n'était pas le cas, on pourrait définir un nouveau M_u-développement des points de $\psi(X_+)$. L'ensemble de ces développements engendrerait un système sofique strictement inclus dans X_+ d'entropie $\log \Delta$ ce qui est en contradiction avec le fait que X_+ est IES.
On peut tenir le même raisonnement pour χ. □

4. Partition markovienne

On trouvera dans [6] (par exemple) la définition suivante :

Définition.— *Une partition markovienne de* $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ *est un recouvrement de* $\mathbb{T}^d$ *par une famille* $\mathcal{C} = \{R_i\}_{i=1}^{l}$ *ayant les propriétés suivantes :*

(a) Les R_i *sont des rectangles fermés, c'est-à-dire des ensembles de la forme* $R_i^s \times R_i^u$, *où* R_i^s *(resp.*R_i^u*) est inclus dans* F_s *(resp.* F_u*).*

(b) Pour chaque i, R_i *est l'adhérence de son intérieur, et, pour tout couple* (i,j) *où* i *et* j *sont distincts, les intérieurs de* R_i *et de* R_j *sont disjoints.*

(c) Les bords des R_i *sont de mesure nulle.*

(d) Si $\mathsf{T}^{-1}R_i \cap R_j$ *est d'intérieur non vide,* $(\mathsf{T}^{-1}R_i)^u \subset R_j^u$.

(e) Si $\mathsf{T}R_i \cap R_j$ *est d'intérieur non vide,* $(\mathsf{T}R_i)^s \subset R_j^s$.

(f) Le diamètre des R_i *est suffisamment petit.*

Remarquons que la condition (c) ne semble pas être prise en compte habituellement.

A partir de ϕ, nous construisons une telle partition.

Pour un mot η appartenant à $\mathcal{B}(X, 2n)$, notons C_η le cylindre de X défini par $C_\eta = \{\epsilon \in X \ / \ \epsilon_i = \eta_i \ \ |i| \leq n\}$. Si X est de type fini, pour n suffisamment grand les $\phi(C_\eta)$ sont des rectangles recouvrant $\mathbb{T}^d$, vérifiant les conditions (a), (c), (d), (e) de la définition des partitions markoviennes. Si de plus ϕ est bijective, les $\phi(C_\eta)$ forment une partition markovienne.

En revanche, lorsque X n'est pas de type fini, les $\phi(C_\eta)$ ne sont pas tous des rectangles. En utilisant les applications Ω_+ et o_+, nous donnons une partition de X en des ensembles dont les images par ϕ sont des rectangles.

L'idée principale est la suivante. Considérons Λ l'ensemble des $\Omega_+(\eta)$: c'est un ensemble fini. Pour chaque λ dans Λ, appelons X_λ l'ensemble des éléments η de X_-

tels que $\Omega_+(\eta) = \lambda$. Cela fournit la partition de X :

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda \times \lambda),$$

et l'image par ϕ d'un $X_\lambda \times \lambda$ est un rectangle (pour tout η de X_λ, tous les ϵ de λ vérifient $\eta\epsilon \in X$). Malheureusement, X_λ n'est pas fermé, on modifie donc un peu cette partition de X.

Soit Θ le sous-ensemble de Λ constitué des $\Omega_+(\eta)$ lorsque η décrit l'ensemble des éléments finitaires de X_-.

Pour tout θ dans Θ, notons A_θ l'adhérence de X_θ.

Proposition.— *On a le recouvrement suivant de X :*

$$X = \bigcup_{\theta \in \Theta} (A_\theta \times \theta)$$

Preuve.— Soit G un graphe transitif engendrant X. L'ensembles des points finitaires de X étant dense dans X, tout point de X_- est limite d'une suite de points finitaires, donc appartient à un A_θ. D'autre part montrons que, pour tout élément η de X_- $\Omega_+(\eta)$ est la réunion des θ tels que η appartient à A_θ, ce qui achèvera la preuve.
Soit η un élément de X_-. Il existe un entier k tel que $\Omega_+(\eta) = o_+(\eta_k, \ldots, \eta_0)$.
D'abord $\Omega_+(\eta)$ contient la réunion citée. En effet supposons que η soit limite d'une suite $\eta^{(i)}$ d'éléments tels que $\Omega_+(\eta^{(i)}) = \theta$. Pour i suffisamment grand $(\eta_k^{(i)}, \ldots, \eta_0^{(i)}) = (\eta_k, \ldots, \eta_0)$, et θ est un sous-ensemble de $o_+((\eta_k^{(i)}, \ldots, \eta_0^{(i)}))$.
Inversement, pour n quelconque inférieur à 0, écrivons $o_+((\eta_n, \ldots, \eta_0)) = \cup o_+(s)$, la réunion portant sur les extrémités des chemins dans G engendrant η. Pour chacun de ces sommets s, considérons un chemin engendrant $(\eta_n, \ldots, \eta_0)$ se terminant en s. Ce chemin commence en t. Notons s' l'extrémité terminale d'un chemin quelconque engendrant un mot finitaire ϵ. Il existe un chemin dans G joignant s' à t, engendrant un mot α. Alors $\epsilon\alpha(\eta_n, \ldots, \eta_0)$ est finitaire, et $o_+(\epsilon\alpha(\eta_n, \ldots, \eta_0))$ contient $o_+(s)$. L'entier n étant quelconque, η est limite d'une suite de points finitaires η' tels que $o_+(\eta')$ contient $o_+(s)$, d'où l'inclusion inverse. □

Pour tout couple (η, ϵ) de mots de X de longueur n, l'intersection de $(A_\theta \times \theta)$ avec $C_{(\eta\epsilon)}$ est égale à $A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon$, où A_{θ_η} est l'ensemble des points de A_θ se terminant par η, et θ_ϵ est l'ensemble des points de θ commençant par ϵ. L'image par ϕ de cette intersection est donc un rectangle (éventuellement vide).

Proposition.— *Le bord des rectangles $\phi(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$ est de mesure nulle.*

Preuve.— On a l'égalité :

$$\partial(\phi(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)) = (\partial\chi(A_{\theta_\eta}) \times \psi(\theta_\epsilon)) \cup (\chi(A_{\theta_\eta}) \times \partial\psi(\theta_\epsilon)) \mod 1.$$

L'étude précédente montre que $\partial\psi(\theta_\epsilon)$ est de mesure $dim F_u$-dimensionnelle nulle. En effet $\psi(\theta_\epsilon)$ est égal $v_\epsilon + M_u^{-n}\psi(o + (\eta\epsilon)$, où η est un mot tel que $o_+(\eta) = \theta$. L'ensemble $\chi(A_{\theta_\eta})$ est l'adhérence de la réunion des C_ϵ où les ϵ sont les mots finitaires se terminant par η tels que $o_+(\epsilon) = \theta$. Le bord de $\chi(A_{\theta_\eta})$ est donc inclus dans la réunion des $\partial\chi(o_-(\epsilon))$ (de mesure $dim F_s$-dimensionnelle nulle), et de l'image par χ de l'ensemble des points non finitaires de X_-. Comme le nombre de mots non finitaires de longueur k croît exponentiellement moins vite que Δ^k, l'image par χ de l'ensemble des points non finitaires de X_- est également de mesure $dim F_s$-dimensionnelle nulle. □

On montre facilement la proposition suivante.

Proposition.— *On a :*

$$\sigma(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon) \subset (A_{\mu_{\eta\epsilon_1}} \times \mu_{\epsilon_2 \ldots \epsilon_n}),$$

où $\mu = \Omega_+(v\epsilon_1)$ pour v est un point finitaire quelconque de A_θ;

$$\sigma^{-1}(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon) \subset \cup(A_{\mu_{\eta_{-n} \ldots \eta_{-1}}} \times \mu_{\eta_0\epsilon}),$$

la réunion portant sur les $\mu = \Omega_+(v\epsilon_{-n} \ldots \epsilon_{-1})$, où v est tel que $v\epsilon_{-n} \ldots \epsilon_{-1}$ soit finitaire, et tel que $v\epsilon$ apartienne à A_θ.

Preuve.— L'application σ étant bicontinue, il suffit de vérifier ces inclusions pour des sous-ensembles denses de $(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$.
Soit x un point de $(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$ tel que $(x_{-k} \ldots x_{-1})$ soit finitaire et tel que

$$o_+((x_{-k} \ldots x_{-1}x_0)) = \theta.$$

Evidemment $\sigma(x)$ appartient à $(A_{\mu_{\eta\epsilon_1}} \times \mu_{\epsilon_2 \ldots \epsilon_n})$ et $\sigma^{-1}(x)$ appartient à la réunion des $(A_{\mu_{\eta_{-n} \ldots \eta_{-1}}} \times \mu_{\eta_0\epsilon})$. Il est facile de voir que l'ensemble de ces x est dense dans $(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$. □

Corollaire.— *Lorsque ϕ est bijective les $\phi(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$ forment une partition markovienne de $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$. Lorsque ϕ n'est pas bijective, les $\phi(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$ recouvrent plusieurs fois le tore. Les intersections des $\phi(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$ forment un pavage; ce pavage est une partition markovienne.*

Preuve.— On notera r_i les rectangle $\phi(A_{\theta_\eta} \times \theta_\epsilon)$.
Les $\chi(A_{\theta_\eta})$ forment un pavage de $\chi(X_-)$ et pour θ fixé les $\psi(\theta_\epsilon)$ forment un pavage

de $\psi(\theta)$. Dans $\mathbb{R}^d$ les $\chi(A_{\theta_\eta}) \times \psi(\theta_\epsilon)$ vérifient donc les propriétés $(a)(b)(c)$ de la définition des partitions markoviennes. D'après la proposition précédente dans le tore les r_i vérifient les propriétés $(d)(e)$.
Si ϕ est bijective $(a)(b)(c)$ sont vérifiées dans le tore et on a obtenu une partition markovienne.
Si ϕ n'est pas bijective considérons le pavage du tore défini par les intersections des r_i. C'est un recouvrement par des rectangles vérifiant $(a)(b)(c)$. Presque tout point du tore appartient à p r_i distincts donc tout point appartient à au plus p intérieurs de r_i. Considérons alors deux rectangles R_i et R_j du pavage tels que $\mathsf{T}R_i \cap R_j$ soit d'intérieur non vide. Suposons que R_i soit égal à $\cap_{l=1}^{p} r_l^{(i)}$ et que R_j soit égal à $\cap_{m=1}^{p} r_m^{(j)}$. Les r_i vérifiant $(d)(e)$, pour chaque m il existe un l tel que $(\mathsf{T}r_l^{(i)})^s \subset (r_m^{(j)})^s$, donc la propriété est vérifiée pour les intersections : $(\mathsf{T}R_i)^s \subset R_j^s$.
La condition (d) se vérifie de la même manière. □

5. Points génériques

Pour un système dynamique (K, S, μ), on dit que x un élément de K est générique pour μ si, pour toute fonction continue f de K dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x) = \mu(f).$$

Le système dynamique $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T}, m)$ étant ergodique, presque tous les points du tore (pour la mesure de Lebesgue) sont génériques pour la mesure de Lebesgue. Cependant pour un point donné on ne sait pas en général s'il est générique pour la mesure de Lebesgue ou non. Nous montrons ici comment le codage obtenu permet de construire un point générique.

Il suffit pour cela de trouver une suite ϵ générique pour la mesure ν d'entropie maximale sur X. Un procédé pour obtenir une telle suite est décrit dans [3].
Le système sofique transitif X est un système codé, c'est-à-dire qu'on peut lui associer un ensemble $\mathcal{X}$ de mots de X, appelé code préfixe, tel que :

— aucun élément de $\mathcal{X}$ n'est le début d'un autre élément de $\mathcal{X}$,

— $\mathcal{B}(X)$ est l'ensemble des mots apparaissant dans les concaténations d'éléments de $\mathcal{X}$.

Il est facile de décrire un code préfixe associé à X à l'aide d'un graphe G transitif engendrant X (voir [5]). Soit s un sommet de G, l'ensemble des mots engendrés par les chemins partant de s et arrivant en s sans passer par s est un code préfixe associé à X.

On a alors le théorème suivant ([3]) :

Théorème.— *Soit q le pgcd des longueurs des éléments de $\mathcal{X}$. Concaténons les éléments de $\mathcal{X}$ de longueur q, puis ceux de longueur $2q$, $3q$,... et ainsi de suite pour obtenir une suite $\epsilon_+ = (\epsilon_i)_{n\geq 1}$. Alors la suite ϵ_+ appartient à X_+, et pour tout ϵ_- tel que $\epsilon = (\epsilon_-, \epsilon_+)$ appartient à X, la suite ϵ est générique pour la mesure ν sur X d'entropie maximale.*

Corollaire.— *Pour les suites ϵ définies dans le théorème, $\phi(\epsilon)$ est générique pour la mesure de Lebesgue.*

Remarque : un codage par partition markovienne fournit également des points génériques par le même théorème. Cependant utiliser le codage proposé présente un avantage. La forme explicite de l'application ϕ permet de "localiser" facilement le point générique et ses images par T. La complexité géométrique inévitable des partitions markoviennes rend cette localisation difficile dans le cas d'un codage par partition markovienne.

6. Une remarque sur les endomorphismes dilatants du tore

Pour construire une partition markovienne, on aurait pu partir des recouvrements de F_s et F_u induits par le recouvrement

$$\bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d} (\chi(X_-) \times \psi(X_+)) + z.$$

Il s'agirait ensuite d'en déduire des pavages autosimilaires (pour M_s et M_u) dont les tuiles permettraient de construire une partition markovienne. Il est possible de le faire, mais le procédé est plus complexe que celui que nous avons exposé. Dans le cas purement dilatant en revanche, un raisonnement simple de ce type permet d'obtenir un codage bijectif de type fini de l'endomorphisme.

Soit A une matrice à coefficients entiers, dont les valeurs propres sont toutes de module strictement supérieur à 1. Cette matrice définit un endomorphisme T du tore.

Choisissons un ensemble T de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$. Cet ensemble est de cardinal Δ, le déterminant de A, et :

$$\mathbb{Z}^d = A\mathbb{Z}^d + T$$

Considérons le compact Q défini par :

$$Q = \{\sum_1^\infty A^{-i}\tau_i \ / \ (\tau_i)_{i\in N} \in T^N\}.$$

C'est un compact autosimilaire caractérisé par la relation :

$$AQ = \cup_{\tau \in T}(Q + \tau),$$

la réunion étant disjointe presque partout. On sait montrer que Q est de mesure entière et que la réunion $\cup_{z \in \mathbb{Z}^d}(Q + z)$ est un recouvrement de $\mathbb{R}^d$. Si Q est de mesure de Lebesgue 1 ce recouvrement est un pavage et l'application ψ défini par :

$$\psi \ : \ T^{\mathbb{N}} \to \mathbb{T}^d \ : \ (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_1^\infty A^{-i}\tau_i \bmod 1$$

fournit un codage bijectif de l'endomorphisme du tore.

On ignore si on peut toujours choisir T tel que le compact Q associé soit de mesure 1. Quoi qu'il en soit on peut toujours obtenir un codage sofique bijectif. C'est ce que nous montrons ici.

Commençons par remarquer que le recouvrement $\mathbb{R}^d = \cup_{z \in \mathbb{Z}^d}(Q + z)$ induit un pavage de $\mathbb{R}^d$. Le bord de Q étant de mesure nulle presque tous les points de $\mathbb{R}^d$ sont dans le complémentaire de $\cup(\partial Q + z)$. Pour un tel point x, notons R_x l'intersection des $Q + z$ auxquels appartient x.

Proposition.— *Les R_x sont en nombre fini à translation par des entiers près. La réunion des R_x forme un pavage de $\mathbb{R}^d$ invariant par translation entière. Ce pavage est autosimilaire, c'est-à-dire que l'image par A d'un R_x est une réunion finie de R_y.*

Preuve.— Tout R_x est translaté d'un des éléments du pavage de Q obtenu en découpant Q suivant les intersections de Q avec les $Q+z$ le rencontrant. L'ensemble Q étant compact ce pavage est fini.
Les R_x forment, par définition, un pavage de $\mathbb{R}^d$. L'invariance de ce pavage par translation entière provient directement de l'invariance par translation entière du recouvrement $\mathbb{R}^d = \cup_{z \in \mathbb{Z}^d}(Q + z)$.
L'autosimilarité du pavage par les R_x provient directement de l'autosimilarité du recouvrement $\mathbb{R}^d = \cup_{z \in \mathbb{Z}^d}(Q + z)$. □

Il existe donc un ensemble fini de R_x, $(R_i)_{i=1}^k$, tel que la réunion $\cup_{z \in \mathbb{Z}^d}(\cup_i R_i + z)$ soit un pavage de $\mathbb{R}^d$. Autrement dit $\cup_i R_i$ est un pavage du tore. Nous pouvons maintenant décrire le codage.
Chaque R_i vérifie une relation du type :

$$R_i = \cup_{j=1}^{k_i} A^{-1}(R_j + z_{ij}),$$

la réunion étant disjointe et les z_{ij} étant des point à coordonnées entières.
Définissons alors le graphe G : l'ensemble S des sommets de G est l'ensemble des

R_i, une flèches numérotée z_{ij} joint R_i à R_j. Soit Z le système sofique engendré par G. En itérant la relation précédente, on obtient :

$$R_i = \cup A^{-1} z_{i_1} + A^{-2} z_{i_2} + \ldots + A^{-l} z i_l + A^{-l} R_{i_l},$$

la réunion étant prise sur l'ensemble des mots $(z_{i_1} \ldots z_{i_l})$ appartenant à $\mathcal{B}(Z, l)$. On en déduit que tout point x du tore peut s'écrire sous la forme

$$x = A^{-1} z_1 + A^{-2} z_2 + \ldots + A^{-l} z_{l+1} + \ldots$$

où $(z_1 z_2 \ldots)$ appartient à Z.

Proposition.— *L'application :*

$$\psi \ : \ Z \to \mathbb{T}^d \ : \ z \mapsto \sum A^{-i} z_i$$

est une application bijective presque partout faisant de $(\mathbb{T}^d, \mathsf{T})$ *un facteur de* (Z, σ).

Preuve.— Par construction ψ est surjective et conjugue T à σ. Soit x un point du tore ayant deux antécédents z et z' par ψ. Soit k_0 le plus petit des k tels que $z_k \neq z'_k$. Alors x appartient à un ensemble de la forme $\sum_{i=1}^{k_0-1} A^{-i} z_i + A^{-k_0+1}(R_{k_0} \cap R'_{k_0})$. Mais la réunion des ensembles de cette forme est de mesure nulle. □

Bibliographie

[1] **R.L. Adler, B. Weiss** : *Entropy, a complete invariant for automorphism of the torus*, Proceedings of national academy of science, vol.57 (1967), p.1573-1576.

[2] **A.Bertrand-Mathis** : *Développement en base θ, répartition modulo 1 de la suite* $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, *langages codés et θ-shift*, Bull. Soc. Math. France, 114, 1986, p. 271-323.

[3] **A.Bertrand-Mathis** : *Points génériques pour les mesures de Champernowne sur certains systèmes codés*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1986), 8, p. 35-51.

[4] **T.Bedford** : *Generating special Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms using fractals*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1986), 6, p. 325-333.

[5] **F.Blanchard, G.Hansel** : *Systèmes codés*, Theoretical Comp. Sci., 44, 1986, p. 17-49

[6] **R.Bowen** : *Equilibrium States and the Ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math., Springer Verlag 470.

[7] **R.Bowen** : *Markov partitions are not smooth*, Proc. Amer. Math. Soc., 71 (1978), p. 130-132.

[8] **E.Cawley** : *Smooth Markov Partitions and Toral Automorphisms*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1991), 11, p. 633-651.

[9] **I.Csizar, J.Komlos** : *On the equivalence of two models of finite-state noiseless channels from the point of view of the output*, Proceedings of the colloquium of information theory. Edited by A.Renyi, J.Bolyai, Math. Soc., Budapest, 1968.

[10] **J.M.Derrien** : *Théorème limite central pour les automorphismes ergodiques du tore*, Publications de l'IRMAR, Fascicule de probabilités (1992).

[11] **R.Fischer** : *Sofic Systems and Graphs*, Monatshefte für Mathematik, 80, 1975, p. 179-186.

[12] **C.Frougny, B.Solomiak** : *Finite beta-expansions*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1992), 4, p. 713-723.

[13] **Y.Guivarc'h, J.Hardy** : *Théorèmes limites pour une classe particulière de chaîne de Markov et applications aux diffèomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. Henri Poincarré, vol. 24, 1, 1988, p. 73-98.

[14] **Y.Katznelson** : *Ergodic automorphisms of $\mathbb{T}$ are Bernoulli shifts*, Israël Journal of Mathematics, vol. 10, 1971,p. 186-195.

[15] **W.Krieger** : *On sofic systems I*, Israël Journal of Mathematics, vol. 48, 4, 1984.

[16] **J.Lagarias, Y.Wang** : *Self Affine Tiles in* $\mathbf{R}^n$.

[17] **S.Le Borgne** : *Codage des automorphismes hyperboliques du tore et nombres de Pisot*, Publications de l'IRMAR, Fascicule de probabilités (1993).

[18] **D.S.Ornstein, N.A.Friedman** : *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Advances in mathematics, 5, 1971, p. 365-374.

[19] **K.Petersen** : *Ergodic theory*, Cambridge university press, 1989.

[20] **W.P.Thurston** : *Groups, Tilings and Finite State Automaton*, Colloquium Lectures 92^{nd} Summer Meeting of the AMS, (1989).

[21] **A.M.Vershik** : *The fibadic expansions of real numbers and adic transformation*, Prep. report. inst. Mittag Leffler, 4, 1991-1992, p. 1-9.

[22] **A.M.Vershik** : *Arithmetic isomorphism of hyperbolic toral automorphisms and sofic shift*, UDC 519.56, 517.91.