

ALBERT RAUGI

Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994__2_A8_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE SPECTRALE D'UN OPÉRATEUR DE TRANSITION SUR UN ESPACE MÉTRIQUE COMPACT

Par Albert RAUGI

(1.1) Le but du présent article est de retrouver les principaux résultats de [8] avec des démonstrations simplifiées.

1. Définitions et notations.

(1.1) Dans toute la suite, nous désignons par (E, d) un espace métrique compact et par P une probabilité de transition sur E qui *respecte les fonctions continues* ; c'est-à-dire telle que pour toute fonction continue f , la fonction Pf est continue. Nous notons $P^n, n \geq 1$, les itérées de P . Nous convenons que P^0 est l'opérateur identité ou encore que pour tout $x \in E, P^0(x, \cdot)$ est la mesure de Dirac en x .

Nous notons $C(E)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur E , muni de la norme de la convergence uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Si K est un sous ensemble de E et x un élément de E , nous notons $d(x, K)$ la distance de x à K ; c'est-à-dire que $d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$.

Nous disons qu'un espace topologique X est *séparable* s'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de X dense dans X . Tout espace métrique compact possède une base dénombrable d'ouverts ou, ce qui revient au même, est séparable. On sait alors que l'espace $C(E)$ est séparable.

Un borélien B de E est dit *absorbant* si $\forall x \in B, P(x, B) = 1$.

(1.2) Nous appelons : Ω l'espace produit $E^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de Ω et $(X_n)_{n \geq 0}$ les applications coordonnées de l'espace produit Ω . Pour tout $x \in E$, nous notons $\mathbb{P}_x$ l'unique probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ qui fait des coordonnées $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de probabilité de transition P , partant de x ; c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 0$ et pour toute fonction borélienne bornée (ou positive) f sur E^n ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(X_0, \dots, X_n) \mathbb{P}_x(d\omega) \\ = \int_E \dots \int_E f(x, u_1, \dots, u_n) P(x, du_1) \dots P(u_{n-1}, du_n). \end{aligned}$$

Nous notons $\mathbb{E}_x$ l'espérance associée à la probabilité $\mathbb{P}_x$. Nous appelons θ l'opérateur de décalage sur Ω ; pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $X_n \circ \theta = X_{n+1}$.

(1.3) Pour tout $x \in E$, nous notons $G(x, \cdot)$ la mesure *potentiel* définie par : $G(x, \cdot) = \sum_{r \geq 0} P^r(x, \cdot)$. Si σ est une mesure positive sur les boréliens de E , nous

appelons *support* de σ et nous notons $\text{Supp } \sigma$ l'ensemble des éléments x de E tels que $\sigma(V) > 0$, pour tout voisinage V de x . On voit facilement que $\text{Supp } \sigma$ est aussi l'ensemble des éléments x de E tels que $\int_E f(y) \sigma(dy) > 0$ pour toute fonction continue positive sur E vérifiant $f(x) > 0$.

(1.4) **Lemme.** Pour tout élément u de E et tout entier $r \geq 1$,

i) $x \in \text{Supp } P(u, \cdot)$ et $y \in \text{Supp } P^r(x, \cdot)$, implique $y \in \text{Supp } P^{r+1}(u, \cdot)$

ii) $x \in \text{Supp } P(u, \cdot)$ et $y \in \text{Supp } G(x, \cdot)$, implique $y \in \text{Supp } G(u, \cdot)$.

Preuve. Soit f une fonction continue positive telle que $f(y) > 0$. Ecrivons:

$$P^{r+1}f(u) = \int_E P^r f(z) P(u, dz).$$

Comme P respecte $C(E)$, la fonction $P^r f$ est continue positive. De plus, puisque $y \in \text{Supp } P^r(x, \cdot)$, nous avons $P^r f(x) > 0$. Il s'ensuit qu'il existe un voisinage V de x tel que $\forall z \in V$, $P^r f(z) > \frac{1}{2} P^r f(x)$. Il vient alors

$$P^{r+1}f(u) \geq \int_V P^r f(z) P(u, dz) \geq \frac{1}{2} P^r f(x) P(u, V) > 0.$$

D'où la première assertion. La seconde affirmation résulte de la première, après avoir remarqué que, pour tout élément x de E , $\text{Supp } G(x, \cdot)$ est la fermeture dans E de la réunion $\bigcup_{r \geq 0} \text{Supp } P^r(x, \cdot)$. ■

2. Etude des fonctions P -harmoniques continues.

Définition et notations.

(2.1) Une fonction borélienne bornée h , à valeurs réelles ou complexes, est dite P -harmonique si elle vérifie la relation $Ph = h$. Nous désignons par $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions P -harmoniques boréliennes bornées et par $\mathcal{H}_c$ celui des fonctions P -harmoniques continues.

(2.2) Si $h \in \mathcal{H}$, la fonction h^2 vérifie $Ph^2 \geq (Ph)^2 = h^2$. Il s'ensuit que la suite de fonctions $(P^n(h^2))_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers une fonction de $\mathcal{H}$ que nous noterons $h * h$. Pour deux fonctions h_1 et h_2 de $\mathcal{H}$, nous définissons alors

$$\begin{aligned} h_1 * h_2 &= \frac{1}{4} [(h_1 + h_2) * (h_1 + h_2) - (h_1 - h_2) * (h_1 - h_2)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(h_1 h_2) \end{aligned}$$

Muni de ce produit et de la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$, $\mathcal{H}$ est une algèbre de Banach. Nous notons $\text{Alg}(\mathcal{H}_c)$ la sous-algèbre fermée de $\mathcal{H}$ engendrée par $\mathcal{H}_c$.

But et commentaires.

Le but de cette section est de donner une description de $\mathcal{H}_c$.

Soit h une fonction de $\mathcal{H}_c$. Alors l'ensemble des points de E , où h atteint son maximum (resp. son minimum) est un compact absorbant de E . Si h n'est pas constante, on obtient ainsi deux compacts absorbants disjoints. Dans ce qui suit nous précisons le lien existant entre les fonctions harmoniques continues et les sous-ensembles compacts absorbants de E .

Nous mettons en évidence une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensembles compacts absorbants de E , deux à deux disjoints, telle que, pour presque toute trajectoire $\omega \in \Omega$, il existe un compact absorbant $\eta(\omega)$ de $\mathcal{B}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X_n(\omega), \eta(\omega)) = 0$. Les éléments de $\mathcal{B}$ jouent en quelque sorte le rôle des "classes ergodiques" dans la théorie classique des chaînes de Markov vérifiant la condition de Doeblin ([3]). Nous munissons $\mathcal{B}$ d'une distance qui en fait un espace métrique compact. Nous construisons sur $\mathcal{B}$ une famille de mesures de probabilité $\{\mu_x : x \in E\}$ telle que l'application

$$\hat{h} \rightarrow h(x) = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma) \mu_x(d\gamma)$$

soit une isométrie d'algèbre de Banach de $C(\mathcal{B})$ sur $\text{Alg}(\mathcal{H}_c)$.

Nous disons qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E converge vers $\gamma \in \mathcal{B}$ si la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ a toutes ses valeurs d'adhérence dans γ ; c'est-à-dire $d(x_n, \gamma) \rightarrow 0$. L'espace $\mathcal{B}$ apparaît alors comme une frontière de E et la formule $h(x) = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma) \mu_x(d\gamma)$, comme une formule de Poisson. A tout élément h de $\mathcal{H}_c$, nous avons associé une fonction continue $\hat{h}$ sur la frontière $\mathcal{B}$ de E , qui intégrée par le "noyau de Poisson" μ_x permet de retrouver h .

La description des fonctions harmoniques continues a été ramenée à la recherche de sous-ensembles compacts absorbants disjoints de E . Dans de nombreux cas, cette recherche revêt un caractère géométrique (Cf [1]).

Fonctions harmoniques et variables aléatoires invariantes.

(2.3) Nous désignons par $\mathcal{I} = \{B \in \mathcal{F} : \theta^{-1}(B) = B\}$ la tribu des boréliens de Ω invariants par θ . Une variable aléatoire Z est $\mathcal{I}$ -mesurable si et seulement si $Z \circ \theta = Z$; une telle variable sera dite invariante par θ . Pour tout entier $n \geq 0$, nous notons $\mathcal{F}_n$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables aléatoires $\{X_k : 0 \leq k \leq n\}$.

(2.4) **Proposition.** ([7], Prop V 2.4) *Pour tout $h \in \mathcal{H}$ et tout $x \in E$, le processus $(h(X_n))_{n \geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, est une martingale bornée relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Ce processus converge $\mathbb{P}_x$ -p.s. vers une variable aléatoire Z invariante par θ et telle que, pour tout entier $n \geq 0$:*

$$h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_n)] = \mathbb{E}_x[Z] \quad \text{et} \quad h(X_n) = \mathbb{E}_x[Z | \mathcal{F}_n] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

Réciproquement si Z est une variable aléatoire bornée invariante par θ , alors la fonction h , définie par $h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$, $x \in E$, appartient à $\mathcal{H}$ et la martingale $(h(X_n))_{n \geq 0}$ converge, $\mathbb{P}_x$ -p.s. $\forall x \in E$, vers Z .

Preuve. Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[h(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] &= Ph(X_n) \quad (\text{propriété de Chaîne de Markov}) \\ &= h(X_n) \quad (\text{invariance de } h \text{ par } P); \end{aligned}$$

le processus $(h(X_n))_{n \geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, est donc une martingale, bornée par $\|h\|_\infty$, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. D'après la théorie des martingales, on sait alors que ce processus converge, $\mathbb{P}_x$ -p.s., et sa limite Z ferme la martingale; c'est-à-dire $h(X_n) = \mathbb{E}_x[Z | \mathcal{F}_n]$ $\mathbb{P}_x$ -p.s. Par passage à l'espérance, cette dernière relation nous donne $\mathbb{E}_x[h(X_n)] = \mathbb{E}_x[Z]$. D'autre part, nous avons $\mathbb{E}_x[h(X_n)] = P^n h(x) = h(x)$. D'où la première assertion.

Réciproquement soient Z une variable aléatoire invariante par θ et h la fonction définie par $h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$. D'après la propriété de markov, nous avons, pour tout entier naturel n ,

$$h(X_n) = \mathbb{E}_{X_n}[Z] = \mathbb{E}_x[Z \circ \theta^n | \mathcal{F}_n] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.};$$

et donc grâce à l'invariance de Z par θ , $h(X_n) = \mathbb{E}_x[Z | \mathcal{F}_n]$. Par passage à l'espérance, il vient $P^n h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$, pour tout entier naturel n ; d'où la P -harmonicité de h . Enfin la théorie des martingales nous dit que le processus $(\mathbb{E}_x[Z | \mathcal{F}_n])_{n \geq 0}$ converge, $\mathbb{P}_x$ -p.s. vers Z . ■

(2.5) Deux variables aléatoires, Z et Z' , invariantes par θ sont dites équivalentes si $\forall x \in E$, $\mathbb{P}_x[Z \neq Z'] = 0$. Nous appelons $\mathcal{V}$ l'algèbre des classes d'équivalence des variables aléatoires invariantes par θ .

(2.6) **Corollaire.** L'application qui à la classe Z de $\mathcal{V}$ associe la fonction P -harmonique $h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$ définit un isomorphisme d'algèbre de Banach.

(2.7) **Lemme.** Soit h une fonction de $\mathcal{H}$. Pour tout entier $r \geq 1$ et tout $x \in E$, nous avons

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x \left[\int_E [h(y) - h(X_n)]^2 P^r(X_n, dy) \right] < +\infty.$$

Preuve. Il suffit de voir que:

$$\mathbb{E}_x \left[\int_E [h(y) - h(X_n)]^2 P^r(X_n, dy) \right] = \mathbb{E}_x[h^2(X_{n+r})] - \mathbb{E}_x[h^2(X_n)].$$

Le résultat s'en déduit facilement. ■

(2.8) **Corollaire** Pour tout $x \in E$, tout $h \in \mathcal{H}$ et tout entier $r \geq 1$, la suite de variables aléatoires $(\int_E [h(y) - h(X_n)]^2 P^r(X_n, dy))_{n \geq 0}$ converge vers zéro, P_x -presque sûrement.

Classes ergodiques.

(2.9) Soit $h \in \mathcal{H}_c$. Nous appelons Ω_h le sous-ensemble $\mathcal{F}$ -mesurable et θ -invariant de Ω constitué des éléments ω tels que:

i) la suite $(h(X_n(\omega)))_{n \geq 0}$ converge;

ii) pour tout entier $r \geq 1$, la suite

$$\left(\int_E [h(x) - h(X_n(\omega))]^2 P^r(X_n(\omega), dx) \right)_{n \geq 0}$$

converge vers zéro.

D'après ce qui précède, nous savons que $P_x[\Omega_h] = 1, \forall x \in E$.

Comme $\mathcal{H}_c$ est un sous-espace vectoriel fermé de $C(E)$, $\mathcal{H}_c$ est séparable; nous désignons par $(h_p)_{p \geq 0}$ une suite de fonctions non nulles de $\mathcal{H}_c$ dense dans $\mathcal{H}_c$. En posant $\Omega_0 = \bigcap_{p \geq 0} \Omega_{h_p}$, nous obtenons alors un sous-ensemble de Ω , $\mathcal{F}$ -mesurable, invariant par θ de P_x -mesure 1 pour tout $x \in E$ et vérifiant $\Omega_0 = \bigcap_{h \in \mathcal{H}_c} \Omega_h$.

(2.10) Soient ω un élément de Ω_0 et u une valeur d'adhérence dans E de la suite $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$. Puisque P respecte $C(E)$, il résulte de la propriété ii) de (2.9) que, pour tout $h \in \mathcal{H}_c$ et tout $r \geq 1$, $\int_E [h(x) - h(u)]^2 P^r(u, dx) = 0$. Autrement dit, toute fonction P -harmonique continue h est constante et égale à $h(u)$ sur $\text{Supp } G(u, \cdot)$.

Ceci nous amène à considérer le sous-ensemble compact, non vide, de E défini par:

$$F = \{u \in E : \forall h \in \mathcal{H}_c, \forall x \in \text{Supp } G(u, \cdot), h(x) = h(u)\}.$$

Du lemme (1.4), il résulte que F est absorbant.

(2.11) Nous disons que deux éléments u et v de F sont *équivalents* si $\forall h \in \mathcal{H}_c, h(u) = h(v)$. Il est clair que nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur F . Chaque classe d'équivalence fournit un sous-ensemble compact absorbant de F . Nous désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces classes d'équivalences. Pour tout $h \in \mathcal{H}_c$ et tout $\gamma \in \mathcal{B}$, nous notons $\hat{h}(\gamma)$ la valeur de h sur γ . Nous munissons $\mathcal{B}$ de la distance δ définie par:

$$\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} \frac{|\hat{h}_p(\gamma_1) - \hat{h}_p(\gamma_2)|}{\|h_p\|_\infty}.$$

Nous avons alors:

(2.12) **Lemme et définition.** $(\mathcal{B}, \delta)$ est un espace métrique compact.
Il existe une application mesurable η de Ω dans $\mathcal{B}$ telle que:

$$i) \forall \omega \in \Omega_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(X_n(\omega), \eta(\omega)) = 0.$$

$$ii) \eta \circ \theta = \eta$$

Nous donnons le nom de classe ergodique à chaque élément de $\mathcal{B}$.

Preuve. Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite de classes ergodiques. Pour tout entier naturel n , nous choisissons un élément u_n de γ_n . Le procédé diagonal, nous fournit une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telle que pour tout entier $p \geq 0$, la suite $(h_p(u_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ converge. Quitte à prendre une sous-suite de $(\varphi(n))_{n \geq 0}$, on peut supposer que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers un élément u de F . Si γ est la classe ergodique qui contient u , il est alors clair que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(\gamma_{\varphi(n)}, \gamma) = 0$. D'où la compacité.

Soit $\omega \in \Omega_0$. Nous avons vu que toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$ appartiennent à F . Or nous savons aussi que, pour tout $h \in \mathcal{H}_c$, la suite $(h(X_n(\omega)))_{n \geq 0}$ converge. Il s'ensuit que toutes les valeurs d'adhérence appartiennent nécessairement à la même classe ergodique $\eta(\omega)$.

Il est clair que l'application η de Ω_0 dans $\mathcal{B}$ ainsi obtenue est invariante par θ . Nous montrons qu'elle est $\mathcal{F}$ -mesurable. Soit C une boule fermée de $\mathcal{B}$. Le sous-ensemble $B = \bigcup_{\gamma \in C} \gamma$ de F est compact. [En effet si x est un élément de F adhérent à B , il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de F convergeant vers x telle que: $\forall n \geq 0, x_n \in \gamma_n \in C$. D'après la compacité de $\mathcal{B}$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telle que $\gamma_{\varphi(n)} \xrightarrow{\delta} \gamma \in C$. Nous avons alors $x \in \gamma \subset B$.]

Pour tout $\omega \in \Omega_0$, nous avons alors:

$$\eta^{-1}(C) = \left\{ \omega \in \Omega_0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(X_n(\omega), B) = 0 \right\};$$

ce qui montre que η est $\mathcal{F}$ -mesurable.

On obtient le résultat énoncé en donnant à η une valeur arbitraire sur le complémentaire de Ω_0 , qui est aussi un sous-ensemble de Ω invariant par θ . ■

Représentation intégrale.

Pour tout $x \in E$, nous appelons μ_x l'image de la probabilité P_x par l'application η du lemme précédent.

(2.13) **Théorème.** *La famille de mesures de probabilité $\{\mu_x : x \in E\}$ sur $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés suivantes:*

$$i) \forall x \in E, \int_E \mu_u P(x, du) = \mu_x;$$

$$ii) \forall \gamma \in \mathcal{B}, \forall x \in \gamma, \mu_x \text{ est la mesure de Dirac en } \gamma.$$

Toute fonction h de $\mathcal{H}_c$ s'écrit

$$h(x) = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma) \mu_x(d\gamma).$$

L'application $h \rightarrow \hat{h}$ est une isométrie d'algèbres de Banach de $\text{Alg}(\mathcal{H}_c)$ sur l'espace $C(\mathcal{B})$ des fonctions continues sur $\mathcal{B}$.

Preuve. Pour toute fonction continue $\hat{f}$ sur $\mathcal{B}$, nous avons:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \hat{f}(\gamma) \mu_x(d\gamma) &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \eta] \\ &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \eta \circ \theta] \quad (\theta\text{-invariance de } \eta) \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \eta \circ \theta \mid \mathcal{F}_1]] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[\hat{f} \circ \eta]] \quad (\text{propriété de Markov}) \\ &= \int_E \mathbb{E}_u[\hat{f} \circ \eta] P(x, du) \\ &= \int_E \int_{\mathcal{B}} \hat{f}(\gamma) \mu_u(d\gamma) P(x, du). \end{aligned}$$

D'où la première propriété de la famille $\{\mu_x : x \in E\}$.

Soient $\gamma \in \mathcal{B}$ et $x \in \gamma$. Comme γ est un compact absorbant, pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{P}_x[X_n \in \gamma] = 1$. Si bien que, $\mathbb{P}_x$ -p.s., $\eta(\cdot) = \gamma$ et par suite μ_x est la mesure de Dirac en γ .

Ceci dit nous avons

$$h(x) = \mathbb{E}_x\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} h(X_n)\right] = \mathbb{E}_x[\hat{h} \circ \eta] = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma) \mu_x(d\gamma).$$

Cette formule montre que $\|h\|_{\infty} \leq \|\hat{h}\|_{\infty}$. Comme l'inégalité contraire est évidente, l'application $h \rightarrow \hat{h}$ est bien une isométrie.

Pour toutes fonctions h_1 et h_2 de $\mathcal{H}_c$, nous avons $\widehat{h_1 * h_2} = \hat{h}_1 \hat{h}_2$. D'après la construction même de l'espace $\mathcal{B}$, l'ensemble des fonctions continues $\{\hat{h} : h \in \mathcal{H}_c\}$ sépare les points de $\mathcal{B}$ et contient les fonctions constantes. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, l'algèbre engendrée par ces fonctions est dense dans $C(\mathcal{B})$. On en déduit que l'application $h \rightarrow \hat{h}$ de $\text{Alg}(\mathcal{H}_c)$ dans $C(\mathcal{B})$ est surjective. ■

(2.14) *Corollaire.* Supposons que, pour toute fonction continue f sur E , la famille de fonctions $\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f : n \geq 1\}$ soit équicontinue et donc relativement compacte dans $C(E)$.

Alors l'algèbre $\text{Alg}(\mathcal{H}_c)$ est égale à $\mathcal{H}_c$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{B}$, la fonction

$$\mu_x(\{\gamma\}) = P_x \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X_n, \gamma) = 0 \right],$$

est semi-continue supérieurement.

L'espace vectoriel $\mathcal{H}_c$ est de dimension finie (i.e. $\mathcal{B}$ est fini) si et seulement si les fonctions $\{x \rightarrow \mu_x(\{\gamma\}) : \gamma \in \mathcal{B}\}$ sont continues. Ces fonctions constituent alors une base de $\mathcal{H}_c$.

Preuve. Soient h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathcal{H}_c$. De l'hypothèse faite et de la relation

$$h_1 * h_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(h_1 h_2)$$

il résulte que la fonction $h_1 * h_2$ est continue. D'où la première affirmation du corollaire.

Soit $\gamma \in \mathcal{B}$. Considérons une suite de fonctions continues sur $\mathcal{B}$ qui décroît vers l'indicatrice du singleton $\{\gamma\}$. L'isométrie du théorème (2.13) nous dit alors que la fonction P -harmonique $x \rightarrow \mu_x(\{\gamma\})$ est une limite décroissante de fonctions P -harmoniques continues et est donc semi-continue supérieurement. De plus cette fonction est continue si et seulement si la fonction indicatrice du singleton $\{\gamma\}$ est continue ; ce qui équivaut à dire que γ est un point isolé de $\mathcal{B}$. Le résultat est alors clair. ■

3. Mesures invariantes et convergence en moyenne de Cesaro

(3.1) Nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur les boréliens de E qui sont invariantes par P . Nous nous proposons dans cette section de donner, sous une hypothèse d'équicontinuité, une description de $\mathcal{M}$. Pour toute fonction continue f sur E et tout entier $n \geq 1$, nous désignons par $M_n(f)$ la fonction continue sur E définie par $M_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f$.

(3.2) **Proposition.** Toute mesure ν de $\mathcal{M}$ est portée par le compact absorbant F de (2.10). Si ν est extrémale, elle est portée par une classe ergodique.

Supposons que, pour toute fonction continue f sur E , la famille de fonctions $\{M_n(f) : n \geq 1\}$ soit équicontinue. Alors:

- i) chaque classe ergodique γ porte une unique mesure ν_γ de $\mathcal{M}$;
- ii) tout élément λ de $\mathcal{M}$ s'écrit $\int_{\mathcal{B}} \nu_\gamma \mu_\lambda(d\gamma)$ avec $\mu_\lambda = \int_E \mu_x \lambda(dx)$;
- iii) pour toute fonction f de $C(E)$, la suite de fonctions $(M_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément sur E vers $\int_{\mathcal{B}} \nu_\gamma(f) \mu_\lambda(d\gamma)$.

Preuve. Soient $\nu \in \mathcal{M}$ et $h \in \mathcal{H}_c$. Pour tout entier $r \geq 1$, nous avons:

$$P^r(h^2) \geq (P^r h)^2 = h^2 \text{ et } \int_E [P^r(h^2) - h^2](u) \nu(du) = 0.$$

Il s'ensuit que, pour tout $u \in \text{Supp } \nu$ et tout $x \in \text{Supp } G(u, \cdot)$, $h(x) = h(u)$. D'où $\text{Supp } \nu \subset F$.

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P f(u) \nu(du) &= \int_{\gamma} P(1_{\gamma} f)(u) \nu(du) \quad (\gamma \text{ est un compact absorbant}) \\ &= \int_F P(1_{\gamma} f)(u) \nu(du) \quad (F \text{ est réunion de compacts absorbants}) \\ &= \int_E P(1_{\gamma} f)(u) \nu(du) \quad (\nu \text{ est portée par } F) \\ &= \int_{\gamma} f(u) \nu(du). \end{aligned}$$

Ce qui montre que la restriction de ν à chaque classe ergodique est encore une mesure invariante par P .

Supposons que, pour toute fonction continue f sur E , la famille de fonctions $(M_n(f))_{n \geq 1}$ soit équicontinue.

Soit $(\varphi(n))_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que, pour tout $f \in C(E)$, la suite de fonctions $(M_{\varphi(n)}(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément sur E vers une fonction notée h_f . [l'existence de telles suites est assurée par le procédé diagonal via la séparabilité de $C(E)$.] Chaque fonction h_f appartient à $\mathcal{H}_c$ et s'écrit donc (théorème (2.13)): $h_f(x) = \int_B \widehat{h_f}(\gamma) \mu_x(d\gamma)$. Il est clair que, pour tout $\gamma \in B$, l'application $f \mapsto \widehat{h_f}(\gamma)$ définit une mesure de probabilité ν_{γ} sur E , invariante par P . Si λ est une quelconque mesure de $\mathcal{M}$, nous avons, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_E f(u) \lambda(du) = \int_E M_{\varphi(n)}(f)(u) \lambda(du) = \int_E \int_B \nu_{\gamma}(f) \mu_x(d\gamma) \lambda(dx).$$

En restriction à une classe ergodique γ , la suite de fonctions $(M_{\varphi(n)}(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $\widehat{h_f}(\gamma) = \nu_{\gamma}(f)$ [noter que, pour tout $x \in \gamma$, μ_x est la mesure de Dirac en γ]. Il s'ensuit que ν_{γ} est l'unique mesure de $\mathcal{M}$ portée par γ . On en déduit alors que les fonctions limites h_f , $f \in C(E)$ ne dépendent pas de la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 1}$ choisie. D'où la convergence des moyennes. ■

(3.3) Proposition. *Supposons que, pour toute fonction continue f sur E , la famille de fonctions $(M_n(f))_{n \geq 1}$ soit équicontinue. Alors, pour toute fonction f de $C(E)$, la suite de variables aléatoires $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k))_{n \geq 1}$ converge, $\mathbb{P}_x$ -p.s. $\forall x \in E$, vers la variable aléatoire $\nu_{\eta(\cdot)}(f)$.*

Preuve. Soient $f \in C(E)$ et $x \in E$. On voit aisément que le processus $\left(\sum_{k=1}^n \frac{f(X_k) - Pf(X_{k-1})}{k} \right)_{n \geq 1}$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Ce processus converge donc $\mathbb{P}_x$ -p.s. et il s'ensuit (lemme de Kronecker) que le processus $\left(S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f(X_k) - Pf(X_{k-1})) \right)_{n \geq 1}$ converge $\mathbb{P}_x$ -p.s. vers zéro.

Considérons le sous-ensemble Ω_0 de (2.9) et appelons $\widetilde{\Omega}_0$ l'ensemble des éléments ω de Ω_0 pour lesquels la suite $(S_n(f)(\omega))_{n \geq 1}$ converge vers zéro, pour toutes les fonctions f de $C(E)$. L'espace $C(E)$ étant séparable, $\widetilde{\Omega}_0$ est un borélien de $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}_x$ -mesure 1, pour tout $x \in E$.

Soient $\omega \in \widetilde{\Omega}_0$ et λ_ω une valeur d'adhérence étroite de la suite de mesures de probabilité $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{X_k(\omega)} \right)_{n \geq 1}$. D'après ce qui précède, λ_ω est invariante par P . D'autre part d'après le lemme (2.12), $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X_n(\omega), \eta(\omega)) = 0$; la mesure λ_ω est nécessairement portée par la classe cyclique $\eta(\omega)$. On en déduit que $\lambda_\omega = \nu_{\eta(\omega)}$. D'où le résultat. ■

4. Fonctions harmoniques pour la chaîne espace-temps.

Définitions et notations.

(4.1) Nous appelons Q la probabilité de transition sur l'espace produit $E \times \mathbb{Z}$ définie par :

$$QF(x, n) = \int_E F(y, n+1) P(x, dy), \quad (x, n) \in E \times \mathbb{Z}.$$

Nous désignons par $\mathcal{K}$ l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées Q -harmoniques sur $E \times \mathbb{Z}$. Tout élément H de $\mathcal{K}$, est une suite bornée $(h_n = H(\cdot, n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de fonctions boréliennes sur E telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, Ph_n = h_{n-1}.$$

Nous notons $\mathcal{K}_c$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ constitué des fonctions H telles que la famille de fonctions $\{H(\cdot, n) : n \in \mathbb{Z}\}$ soit équicontinue (et donc relativement compacte dans $C(E)$).

(4.2) Comme en (2.2), on définit le produit de deux fonctions de $\mathcal{K}$ par:

$$H_1 * H_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n(H_1 H_2).$$

Muni de ce produit et de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, définie par

$$\|H\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|H(\cdot, n)\|_\infty,$$

$\mathcal{K}$ est une algèbre de Banach.

A tout élément h de $\mathcal{H}$ est associé un élément $H = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{K}$ défini par $h_k = h$, pour tout entier relatif k . Cette correspondance permet d'identifier l'algèbre $\mathcal{H}$ à une sous-algèbre de $\mathcal{K}$.

(4.3) **Définition.** Nous disons que l'opérateur P vérifie l'hypothèse (H) si pour toute fonction continue f , la famille de fonctions $\{P^n f : n \geq 0\}$ est équicontinue et donc relativement compacte dans $C(E)$.

Nous allons établir une représentation intégrale des fonctions de $\mathcal{K}_c$ analogue à celle obtenue pour les éléments de $\mathcal{H}_c$.

Fonctions Q -harmoniques et variables aléatoires asymptotiques.

(4.4) Pour tout entier $n \geq 0$, nous notons $\mathcal{A}_n$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables aléatoires $\{X_k : k \geq n\}$. Nous appelons $\mathcal{A}$ la *tribu asymptotique*; c'est-à-dire la tribu intersection des tribus $\mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{I}$ des boréliens invariants par θ est contenue dans la tribu asymptotique. Une variable aléatoire U est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire U_n telle que $U = U_n \circ \theta^n$; une telle variable sera dite *asymptotique*. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour tous éléments $x_1, \dots, x_n$ de E et tout $\omega \in \Omega$, il vient:

$$\forall k \geq 1, U(x_1, \dots, x_n, \omega) = U_n(\omega) = U_{n+k} \circ \theta^k(\omega).$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires $\{U_n : n \geq 1\}$ sont déterminées de façon unique et asymptotiques. Nous écrirons donc $\forall n \geq 1, U_n = U \circ \theta^{-n}$.

(4.5) **Proposition.** ([9], ch. 6, prop. 2.3) Pour tout $H \in \mathcal{K}$ et tout $(x, k) \in E \times \mathbb{Z}$, le processus $(H(X_n, n+k))_{n \geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, est une martingale bornée relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Ce processus converge $\mathbb{P}_x$ -p.s. vers une variable aléatoire asymptotique $U \circ \theta^{-k}$, vérifiant, pour tout entier $n \geq 0$,

$$H(x, k) = \mathbb{E}_x[H(X_n, n+k)] = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k}]$$

et

$$H(X_n, n+k) = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k} | \mathcal{F}_n] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

Réciproquement si U est une variable aléatoire asymptotique bornée, alors la fonction H , définie par $H(x, k) = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k}]$ $((x, k) \in E \times \mathbb{Z})$, appartient à $\mathcal{K}$ et la martingale $(H(X_n, k+n))_{n \geq 0}$ converge, $\mathbb{P}_x$ -p.s. $\forall x \in E$, vers $U \circ \theta^{-k}$.

Preuve. La démonstration est analogue à celle de la proposition (2.4).

(4.6) Deux variables aléatoires asymptotiques, U et U' , sont dites équivalentes si $\forall (x, k) \in E \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_x[U \circ \theta^{-k} \neq U' \circ \theta^{-k}] = 0$. Nous appelons $\mathcal{W}$ l'algèbre des classes d'équivalence des variables aléatoires asymptotiques.

(4.7) **Corollaire.** *L'application qui à la classe U de $\mathcal{W}$ associe la fonction Q -harmonique $H(x, k) = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k}]$ est un isomorphisme d'algèbre de Banach.*

(4.8) **Lemme.** *Soit H une fonction de $\mathcal{K}$. Pour tout $r \geq 1$, tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in E$, nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x \left[\int_E [H(y, r + n + k) - H(X_n, n + k)]^2 P^r(X_n, dy) \right] < +\infty.$$

Preuve. La démonstration est identique à celle du lemme (2.7). ■

(4.9) **Corollaire** *Pour tout fonction H de $\mathcal{K}$, tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $r \geq 1$, la suite de variables aléatoires $(\int_E [H(y, r + n + k) - H(X_n, n + k)]^2 P^r(X_n, dy))_{n \geq 0}$ converge vers zéro, $\mathbb{P}_x$ -p.s. $\forall x \in E$.*

Lemmes fondamentaux

Dorénavant on suppose que P vérifie l'hypothèse (H) de (4.3).

(4.10) **Lemme.** *De toute suite d'entiers naturels, $(\varphi(n))_{n \geq 0}$, on peut extraire une sous-suite $(\varphi \circ \psi(n))_{n \geq 0}$, telle que : pour tout $f \in C(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi \circ \psi(n) - k} f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E . La fonction H définie par,*

$$H(x, k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{\varphi \circ \psi(n) - k} f(x) \quad (x, k) \in E \times \mathbb{Z}.$$

appartient alors à $\mathcal{K}_c$.

Preuve. Compte tenu de la séparabilité de $C(E)$ et de la propriété de contraction de P , la première assertion, découle du procédé diagonal. La seconde affirmation est évidente. ■

(4.11) **Lemme.** *Soit $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que, pour tout $f \in C(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi(n) - k} f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E .*

Soit $\bar{H} = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une fonction de $\mathcal{K}_c$. Soit (procédé diagonal) $(\psi(n))_{n \geq 0}$ une suite d'entiers telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(h_{\varphi \circ \psi(n) + k})_{n \geq 0}$,

converge uniformément vers une fonction notée l_k . Alors $L = (l_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $\mathcal{K}_c$ tel que, pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(l_{k-\varphi(n)})_{n \geq 0}$, converge uniformément vers h_k .

L'espace $\mathcal{K}_c$ est une sous-algèbre séparable de $\mathcal{K}$.

Preuve. Il est clair que L appartient à $\mathcal{K}_c$.

Ceci dit, nous avons:

$$\begin{aligned} h_k &= P^{\varphi(n)} h_{\varphi(n)+k} = P^{\varphi \circ \psi(n)} h_{\varphi \circ \psi(n)+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{\varphi \circ \psi(n)} l_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{\varphi(n)} l_k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} l_{k-\varphi(n)}; \end{aligned}$$

les convergences étant uniformes sur E .

D'où la première assertion du lemme.

Ce qui précède montre que pour tout élément H de $\mathcal{K}_c$ et tout entier k de $\mathbb{Z}$, la fonction $h_k = H(\cdot, k)$ s'obtient comme limite uniforme d'une suite de fonctions du type $(P^{\varphi(n)-k} f)_{n \geq 0}$, avec $f \in C(E)$ (Il suffit de prendre $f = l_0$). La séparabilité de $\mathcal{K}_c$ est alors claire.

Soient $H_1 = (h_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$, $H_2 = (h_{2,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathcal{K}_c$ et k un entier relatif. Nous avons

$$\begin{aligned} H_1 * H_2(\cdot, k) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^{n-k}(H_1 H_2)(\cdot, k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{n-k}(h_{1,n} h_{2,n}). \end{aligned}$$

Soit $(\psi(n))_{n \geq 0}$ une suite d'entiers telle que, pour $i \in \{1, 2\}$, la suite de fonctions $(h_{i, \varphi \circ \psi(n)})_{n \geq 0}$, converge uniformément sur E vers une fonction notée f_i . Il vient alors

$$H_1 * H_2(\cdot, k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{\varphi(n)-k}(f_1 f_2);$$

ce qui montre, puisque P vérifie l'hypothèse (H), que $H_1 * H_2$ est encore un élément de $\mathcal{K}_c$. ■

Classes cycliques.

(4.12) Soit $H \in \mathcal{K}_c$. Nous appelons Ω_H le sous-ensemble de Ω , $\mathcal{F}$ -mesurable et invariant par θ , constitué des éléments ω tels que:

i) pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(H(X_n(\omega), k+n))_{n \geq 0}$ converge

ii) pour tout entiers $r \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, la suite

$$\left(\int_E [H(y, r+n+k) - H(X_n, n+k)]^2 P^r(X_n, dy) \right)_{n \geq 0}$$

converge vers zéro.

D'après ce qui précède, nous savons que $\mathbb{P}_x[\Omega_H] = 1, \forall x \in E$.

Comme $\mathcal{K}_c$ est séparable, en posant $\Omega_1 = \cap_{H \in \mathcal{K}_c} \Omega_H$, nous obtenons un sous-ensemble de Ω , $\mathcal{F}$ -mesurable, invariant par θ , de $\mathbb{P}_x$ -mesure 1 pour tout $x \in E$.

(4.13) **Lemme.** Soient ω un élément de Ω_1 et u une valeur d'adhérence dans E de la suite $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$. Pour tout élément H de $\mathcal{K}_c$ et tout entier k de $\mathbb{Z}$, nous avons:

$$\forall r \geq 1, \forall x \in \text{Supp}(P^r(u, \cdot)), \quad H(u, k) = H(x, k + r).$$

Preuve. Soit $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que $X_{\varphi(n)}(\omega) \rightarrow u$. Soit ψ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $f \in C(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi \circ \psi(n) - k} f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E (lemme (4.10)).

Soit $H = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une fonction de $\mathcal{K}_c$. D'après le lemme (4.11), il existe une application strictement croissante ξ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une fonction $L = (l_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{K}_c$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$a) \quad l_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{\varphi \circ \psi \circ \xi(n) + k};$$

$$b) \quad h_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_{k - \varphi \circ \psi(n)}.$$

Des propriétés ii) de (4.12) et a) ci-dessus, il résulte que, pour tous entiers $r \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E [L(x, r + k) - L(X_{\varphi \circ \psi \circ \xi(n)}, k)]^2 P^r(X_{\varphi \circ \psi \circ \xi(n)}, dx) = 0;$$

et par suite, puisque P respecte $C(E)$,

$$\forall x \in \text{Supp } P^r(u, \cdot), \quad L(x, r + k) = L(u, k).$$

De la propriété b) ci-dessus, il vient alors:

$$\forall x \in \text{Supp } P^r(u, \cdot), \quad H(x, r + k) = H(u, k). \quad \blacksquare$$

(4.14) Ceci nous amène à considérer le sous-ensemble compact, non vide, de E défini par:

$$D = \{u \in E : \forall H \in \mathcal{K}_c, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \geq 1, \\ \forall x \in \text{Supp } P^r(u, \cdot), \quad H(x, r + k) = H(u, k)\}.$$

Comme $\mathcal{H}_c$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{K}_c$, le compact D est contenu dans le compact absorbant F de (2.10). Du lemme (1.4), il résulte que D aussi

est absorbant. D'après le lemme (4.13), D contient toutes les valeurs d'adhérence des suites $\{(X_n(\omega))_{n \geq 0} : \omega \in \Omega_1\}$. Tout ce qui a été fait dans la section 2, peut alors se faire en remplaçant F par D . Dans la suite nous supposons que cette substitution a été faite et donc $D = F$.

(4.15) Nous disons que deux éléments u et v de F sont *équivalents* si, pour tout $H \in \mathcal{K}_c$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $H(u, k) = H(v, k)$. Nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur F . Chaque classe d'équivalence fournit un sous-ensemble compact de F . Nous notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces compacts. Comme $\mathcal{H}_c$ s'identifie à une sous algèbre de $\mathcal{K}_c$, cette partition de F est obtenue par découpage de chaque classe ergodique γ de $\mathcal{B}$. Pour toute classe ergodique γ , nous notons $\mathcal{C}_\gamma$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ qui constituent une partition de γ .

Pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $\hat{H}(\varsigma, k)$ la valeur de $H(\cdot, k)$ sur la classe ς de $\mathcal{C}$.

Soit $(H_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une suite d'éléments, non nuls, de $\mathcal{K}_c$ dense dans $\mathcal{K}_c$. Nous munissons $\mathcal{C}$ de la distance δ définie par:

$$\delta(\varsigma_1, \varsigma_2) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} \frac{\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{H}_p(\varsigma_1, k) - \hat{H}_p(\varsigma_2, k)|}{\|H_p\|_\infty}.$$

Nous avons alors:

(4.16) **Lemme.** $(\mathcal{C}, \delta)$ est un espace métrique compact.

Pour toute classe ς de $\mathcal{C}$, les supports des mesures de probabilités $\{P(u, \cdot) : u \in \varsigma\}$ sont tous contenus dans une unique classe de $\mathcal{C}$, notée $\tau \cdot \varsigma$. L'opérateur P induit alors une isométrie, notée τ , sur l'espace $(\mathcal{C}, \delta)$.

Pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, tout $\varsigma \in \mathcal{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{H}(\varsigma, k) = \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma, 0)$.

Preuve. Soit $(\varsigma_n)_{n \geq 0}$ une suite de classes de $\mathcal{C}$. Pour tout entier naturel n , nous choisissons un élément u_n de ς_n . Le procédé diagonal, nous donne une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telle que pour tous entiers $p \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, la suite $\left(H_p(u_{\varphi(n)}, k)\right)_{n \geq 0}$ converge. Quitte à prendre une sous-suite de $(\varphi(n))_{n \geq 0}$, on peut supposer que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers un élément u de F . Si ς est la classe de $\mathcal{C}$ qui contient u , il est alors clair que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(\varsigma_{\varphi(n)}, \varsigma) = 0$. D'où la compacité.

La deuxième et la dernière assertions résultent de la définition même du compact absorbant $D = F$.

Des relations

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \varsigma \in \mathcal{C}, \hat{H}(\tau \cdot \varsigma, k+1) = \hat{H}(\varsigma, k),$$

on déduit que, pour tous ς_1 et ς_2 de $\mathcal{C}$, $\delta(\tau \cdot \varsigma_1, \tau \cdot \varsigma_2) = \delta(\varsigma_1, \varsigma_2)$. Comme toute isométrie dans un espace métrique compact est nécessairement surjective et donc bijective, la démonstration du lemme est terminée. ■

(4.17) L'ensemble des isométries de l'espace métrique compact $(\mathcal{C}, \delta)$ muni de la loi de composition des applications est un groupe topologique compact. Nous désignons par G le sous-groupe fermé, du groupe des isométries, engendré par l'isométrie τ ; G est un groupe compact et abélien. En outre comme tout semi-groupe compact d'un groupe topologique est un groupe, G coïncide avec le semi-groupe fermé engendré par l'isométrie τ . En particulier, il existe des suites d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telles que la suite des isométries $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ de G converge vers l'identité (ou élément neutre de G).

(4.18) **Lemme.** *Il existe une application $\mathcal{F}$ -mesurable ζ de Ω dans $(\mathcal{C}, \delta)$ telle que:*

i) *Pour tout $\omega \in \Omega_1$ et toute suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ pour laquelle, la suite des isométries $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l'identité,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(X_{\varphi(n)}(\omega), \zeta(\omega)) = 0;$$

ii) *Pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\zeta \circ \theta(\omega) = \tau \circ \zeta(\omega)$.*

Nous donnons le nom de classe cyclique à chaque élément de $\mathcal{C}$.

Preuve. Soient $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ et $(\psi(n))_{n \geq 0}$ deux suites d'entiers naturels telle que, les suites des isométries $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ et $(\tau^{\psi(n)})_{n \geq 0}$ convergent vers l'identité. Soit $\omega \in \Omega_1$. Soient u_1 et u_2 des valeurs d'adhérence respectivement des suites $(X_{\varphi(n)}(\omega))_{n \geq 0}$ et $(X_{\psi(n)}(\omega))_{n \geq 0}$. Nous appelons ς_1 et ς_2 les classes cycliques contenant respectivement u_1 et u_2 .

Soit H une fonction de $\mathcal{K}_c$. Il existe des applications strictement croissantes ξ_1 et ξ_2 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, tout entier k de $\mathbb{Z}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(X_n(\omega), n+k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(u_1, \varphi \circ \xi_1(n) + k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(u_2, \psi \circ \xi_2(n) + k);$$

et par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(X_n(\omega), n+k) = \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma_1, 0) = \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma_2, 0).$$

D'où l'on déduit que:

$$\forall g \in G, \forall k \in \mathbb{Z}, \hat{H}(g \cdot \varsigma_1, k) = \hat{H}(g \cdot \varsigma_2, k);$$

et donc $\varsigma_1 = \varsigma_2$.

Nous venons de montrer qu'il existe une classe cyclique $\zeta(\omega)$ qui contient toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(X_{\varphi(n)}(\omega))_{n \geq 0}$, pour toute suite d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ pour laquelle la suite $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l'identité. Nous obtenons ainsi une application mesurable ζ de Ω_1 dans $\mathcal{C}$ vérifiant l'assertion i).

[La mesurabilité de ζ se démontrant de la même façon que celle de η dans le lemme (2.12).] Nous étendons cette application à Ω en lui donnant une valeur arbitraire sur le complémentaire de Ω_1 .

D'autre part, pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\omega \in \Omega_1$, la relation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(X_n \circ \theta(\omega), n+k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(X_n(\omega), n-1+k)$$

implique, d'après ce qui précède,

$$\hat{H}(\tau^{-k} \cdot \zeta \circ \theta(\omega), 0) = \hat{H}(\tau^{-k+1} \cdot \zeta(\omega), 0);$$

et par suite

$$\forall g \in G, \forall k \in \mathbb{Z}, \hat{H}(g \cdot \zeta \circ \theta(\omega), k) = \hat{H}(g\tau \cdot \zeta(\omega), k).$$

D'où l'on déduit l'assertion ii). ■

Représentation intégrale.

(4.19) Pour tout $x \in E$, nous appelons ρ_x l'image de la probabilité P_x par l'application ζ du lemme précédent.

Nous notons plus simplement $\hat{H}$ la fonction $\hat{H}(\cdot, 0)$; nous avons (lemme (4.16)) $\forall x \in \varsigma, \forall k \in \mathbb{Z}, H(x, k) = \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma)$.

(4.20) **Théorème.** *La famille de mesures de probabilité $\{\rho_x : x \in E\}$ sur $\mathcal{C}$ vérifie les propriétés suivantes:*

$$i) \forall x \in E, \int_E \rho_u P(x, du) = \tau(\rho_x);$$

$$ii) \forall \varsigma \in \mathcal{C}, \forall x \in \varsigma, \rho_x \text{ est la mesure de Dirac en } \varsigma.$$

Toute fonction H de $\mathcal{K}_c$ s'écrit:

$$H(x, k) = \int_{\mathcal{C}} \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma) \rho_x(d\varsigma) \quad (x, k) \in E \times \mathbb{Z}.$$

L'application $H \rightarrow \hat{H}$ est une isométrie d'algèbres de Banach de $\mathcal{K}_c$ sur $C(\mathcal{C})$.

Preuve. Pour toute fonction continue $\hat{f}$ sur $\mathcal{C}$, nous avons (cf démonstration du théorème (2.13)):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \hat{f}(\tau \cdot \varsigma) \rho_x(d\varsigma) &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \tau \circ \zeta] \\ &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \zeta \circ \theta] \\ &= \int_E \int_{\mathcal{C}} \hat{f}(\varsigma) \rho_u(d\varsigma) P(x, du). \end{aligned}$$

D'où la première propriété de la famille $\{\rho_x : x \in E\}$.

Soient $\varsigma \in \mathcal{C}$ et $x \in \varsigma$. pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $\mathbb{P}_x[X_n \in \tau^n \cdot \varsigma] = P^n(x, \tau^n \cdot \varsigma) = 1$. Si bien que, $\mathbb{P}_x$ -p.s., $\zeta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^{\varphi(n)} \cdot \varsigma = \varsigma$ et par suite ρ_x est la mesure de Dirac en ς .

Ceci dit, soit $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que, la suite des isométries $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l'identité. Pour tout $(x, k) \in E \times \mathbb{Z}$, nous avons:

$$\begin{aligned} H(x, k) &= \mathbb{E}_x \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} H(X_n, n + k) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} H(X_{\varphi(n)}, \varphi(n) + k) \right] \\ &= \mathbb{E}_x [\hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma)] \\ &= \int_{\mathcal{C}} \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma) \rho_x(d\varsigma). \end{aligned}$$

On prouve enfin que l'application $H \rightarrow \hat{H}$ est une isométrie de $\mathcal{K}_c$ sur $C(\mathcal{C})$ en reprenant les arguments de la démonstration du théorème (2.13). ■

5. Décomposition spectrale.

Définitions et notations.

(5.1) Nous notons $\mathbb{T}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, nous désignons par $\mathcal{H}_\alpha$ [resp. $\mathcal{H}_{\alpha, c}$] l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées [resp. des fonctions continues] f sur E telles que $Pf = \alpha f$. Nous appelons $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{P}_c$] le fermé de $C(E)$ constitué par la réunion des $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{T}$ [resp. des $\mathcal{H}_{\alpha, c}$, $\alpha \in \mathbb{T}$].

(5.2) Soient $\alpha \in \mathbb{T}$ et $h \in \mathcal{H}_\alpha$. La fonction H définie par $H(x, k) = \alpha^{-k} h(x)$, $(x, k) \in E \times \mathbb{Z}$ appartient à $\mathcal{K}$. Soient $h_1 \in \mathcal{H}_\alpha$ et $h_2 \in \mathcal{H}_\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$. Le produit $H_1 * H_2$ des éléments de $\mathcal{K}$ correspondants respectivement à h_1 et h_2 s'écrit $H_1 * H_2(x, k) = (\alpha\beta)^{-k} h(x)$; où h est un élément de $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$.

Le fermé $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{P}_c$] s'identifie alors à un fermé de $\mathcal{K}$, stable pour le produit. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ [resp. $\mathcal{K}_c$] engendré par ce fermé constitue donc une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{K}$ [resp. $\mathcal{K}_c$].

(5.3) Nous notons $Sp(P)$ l'ensemble des nombres complexes α de $\mathbb{T}$ tels que l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\alpha, c}$ ne soit pas réduit à la fonction nulle.

Nous appelons *caractère* sur G tout homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{T}$. Nous désignons par $\hat{G}$ le groupe des caractères sur G .

Étude de $\mathcal{P}_c$.

(5.4) **Théorème.** Soit h un élément de $\mathcal{P}_c$. Pour toute classe cyclique ς nous notons $\hat{h}(\varsigma)$ la valeur de la fonction h sur ς .

La formule

$$h(x) = \int_{\mathcal{C}} \hat{h}(\varsigma) \rho_x(d\varsigma)$$

établit une isométrie de $\mathcal{P}_c$ sur l'ensemble des fonctions $\hat{h}$ de $C(\mathcal{C})$ pour lesquelles il existe un caractère χ sur G tel que:

$$\forall \varsigma \in \mathcal{C}, \forall g \in G, \hat{h}(g \cdot \varsigma) = \chi(g) \hat{h}(\varsigma).$$

Preuve du théorème (5.4). Soient $\alpha \in Sp(P)$ et $h \in \mathcal{H}_{\alpha, c}$. D'après le théorème (4.20) nous avons, pour tout $(x, k) \in E \times \mathbb{Z}$,

$$\alpha^{-k} h(x) = \int_{\mathcal{C}} \hat{h}(\tau^{-k} \cdot \varsigma) \rho_x(d\varsigma).$$

Si bien que

$$\forall \varsigma \in \mathcal{C}, \forall k \in \mathbb{Z}, \hat{h}(\tau^{-k} \cdot \varsigma) = \alpha^{-k} \hat{h}(\varsigma).$$

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit alors de montrer qu'il existe un caractère χ sur G tel que $\chi(\tau) = \alpha$.

De la dernière égalité, il résulte que pour toute suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telle que, la suite des isométries $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l'identité la suite $(\alpha^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers 1. Soit g une isométrie de G . Considérons une suite d'entiers naturels $(\psi(n))_{n \geq 0}$ telle que $\tau^{\psi(n)} \rightarrow g$. A l'aide de la remarque précédente, on voit aisément que la suite $(\alpha^{\psi(n)})_{n \geq 0}$ converge et que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(\psi(n))_{n \geq 0}$. En posant $\chi(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{\psi(n)}$, on définit un caractère sur G qui vérifie la propriété voulue. ■

(5.5) **Corollaire.** La sous-algèbre (ou sous-espace) de $\mathcal{K}_c$ engendré par $\mathcal{P}_c$ est dense dans $\mathcal{K}_c$.

Preuve. Il suffit de montrer que la famille de fonctions $\{\hat{h} : h \in \mathcal{P}_c\}$ sépare les points de $\mathcal{C}$.

Nous désignons par κ la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact abélien G . Pour tout caractère χ sur G et toute fonction H de $\mathcal{K}_c$, nous appelons $\hat{h}_\chi$ la fonction de $C(\mathcal{C})$ définie par

$$\hat{h}_\chi(\varsigma) = \int_G \chi(g) \hat{H}(g \cdot \varsigma) \kappa(dg) \quad (\varsigma \in \mathcal{C}).$$

Pour tout $g \in G$, nous avons $\hat{h}_\chi(g \cdot \varsigma) = \chi^{-1}(g) \hat{h}_\chi(\varsigma)$. Les fonctions $\{\hat{h}_\chi : \chi \in \hat{G}\}$ correspondent donc à des fonctions de $\mathcal{P}_c$ par l'isométrie du théorème (5.4).

Soient ς_1 et ς_2 deux classes cycliques telles que $h(\varsigma_1) = h(\varsigma_2)$ pour toute fonction h de $\mathcal{P}_c$. De ce qui précède, il résulte que

$$\forall H \in \mathcal{K}_c, \forall \chi \in \hat{G}, \hat{h}_\chi(\varsigma_1) = \hat{h}_\chi(\varsigma_2).$$

Autrement dit, pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, les fonctions continues f_1 et f_2 sur G définies par $f_i(g) = \hat{H}(g \cdot \varsigma_i)$ ($g \in G$) ($i \in \{1, 2\}$), ont les mêmes coefficients de Fourier. Elles sont donc égales ([11]) et l'on a $\forall H \in \mathcal{K}_c, \forall g \in G, \hat{H}(g \cdot \varsigma_1) = \hat{H}(g \cdot \varsigma_2)$; ce qui montre que $\varsigma_1 = \varsigma_2$.

D'où le résultat. ■

Décomposition spectrale.

(5.6) **Théorème.** *Supposons que, pour toute fonction continue f , la famille de fonctions $\{P^n f : n \geq 0\}$ soit équicontinue.*

Alors l'espace des fonctions continues $C(E)$ sur E se décompose en la somme directe de deux sous-espaces fermés $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ tels que:

i) $\mathcal{E}_1$ est le sous-espace fermé de $C(E)$ engendré par les fonctions propres de P associées à des valeurs propres de module 1.

ii) pour toute fonction f de $\mathcal{E}_2$, la suite de fonctions $(P^n f)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Preuve. Soit $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que:

i) la suite $(\tau^{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l'identité;

ii) pour toute fonction f de $C(E)$ et tout entier k de $\mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi(n)-k} f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E .

En posant, pour tout $(x, k) \in E \times \mathbb{Z}$, $H_f(x, k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{\varphi(n)-k} f(x)$, nous obtenons une fonction H_f de $\mathcal{K}_c$ qui s'écrit donc (théorème (4.20))

$$H_f(x, k) = \int_c \widehat{H}_f(\tau^{-k} \cdot \varsigma) \rho_x(d\varsigma).$$

Pour $f \in C(E)$, posons:

$$\Pi f = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{\varphi(n)} f = H_f(\cdot, 0) = \int_c \widehat{H}_f(\varsigma) \rho_x(d\varsigma).$$

Des égalités

$$\forall x \in E, \forall n \geq 0, P^{\varphi(n)} \Pi f(x) = \int_c \widehat{H}_f(\tau^{\varphi(n)} \cdot \varsigma) \rho_x(d\varsigma),$$

il résulte que l'on définit ainsi un projecteur sur $C(E)$ tel que la suite de fonctions $(P^{q(n)}(f - \Pi f))_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E vers la fonction nulle. Comme P est une contraction de $C(E)$, on en déduit que la suite de fonctions $(P^n(f - \Pi f))_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E vers la fonction nulle. Enfin d'après le corollaire (5.5), l'image du projecteur Π n'est autre que le sous-espace fermé de $C(E)$ engendré par les fonctions propres de P associées à des valeurs propres de module 1. D'où le résultat. ■

Bibliographie

- [1] J.-P. CONZE et A. RAUGI, Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, *Bull. Soc. math. France*, 118, 1990, p.273-310.
- [2] K. DE LEEUW et I. GLICKSBERG, Applications of almost periodic compactifications, *Acta Math.*, 105, 1961, p.63-67.
- [3] J.-L. DOOB, Stochastic processes, John Wiley, New York, 1953.
- [4] J. JAMISON, Asymptotic behavior of successive iterates of continuous functions under a Markov operator, *J. Math. Anal. Appl.*, 9, 1964, p.203-214.
- [5] J. JAMISON, Ergodic decompositions induced by certain Markov operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117, 1965, p.451-468.
- [6] J. JAMISON et R. SINE, Irreducible almost periodic markov operators, *J. Math. and Mech.*, 18, 11, 1969, p.1043-1057.
- [7] J. NEVEU, Bases Mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1964.
- [8] A. RAUGI, Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 28, 2, 1992, p. 281-309.
- [9] D. REVUZ, Markov chains, North Holland Pub. Comp., 1975.
- [10] M. ROSENBLATT, Equicontinuous Markov operators, *Teor. Verojatnost. i Primenen*, 9, 1964, p.205-222.
- [11] W. RUDIN, Fourier analysis on groups, Interscience publishers, John Wiley and sons, New York - London, 1967.