PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

B. CADRE

Principes d'invariance faibles pour le temps local d'intersection du mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994___2_A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PRINCIPES D'INVARIANCE FAIBLES POUR LE TEMPS LOCAL D'INTERSECTION DU MOUVEMENT BROWNIEN DE $\mathbb{R}^d$

B.Cadre
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES

1 Le temps local d'intersection du mouvement brownien d-dimensionnel

1.1 Rappels et définitions

Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ une fonction borélienne et B un élément de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). On définit la mesure d'occupation μ_B sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\mu_B(A) = \lambda_n(X^{-1}(A) \cap B),$$

pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, λ_n désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 *Si $\mu_B \ll \lambda_d$, on dit que X a un temps local sur B, et on définit ce temps local, $\alpha(x, B)$, par*

$$\alpha(x, B) = \frac{d\mu_B}{d\lambda_d}(x).$$

Une conséquence directe de cette définition est la formule dite du temps d'occupation:

Proposition 1.1.2 *Pour toute fonction borélienne bornée f, $\alpha(., B)$ vérifie l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\alpha(x, B)d\lambda_d(x) = \int_B f(X(t))d\lambda_n(t).$$

On passe maintenant à la définition correspondante pour des champs aléatoires i.e. $X(t) = X(t, \omega)$ où ω est un élément de l'espace probabilisé (Ω, P).

Définition 1.3 *On dit que X a un temps local sur B si $X(., \omega)$ a un temps local sur B pour P-presque tout $\omega \in \Omega$.*

Dans la suite, nous prendrons toujours $n = 2$ et nous nous restreindrons aux temps locaux associés à des champs gaussiens : si W et W' sont deux mouvements browniens d-dimensionnels sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on note $X_d : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^d$ le champ aléatoire définit par

$$X_d(t) = W_u - W'_v \text{ pour } t = (u, v).$$

L'expression $\alpha_d(x, B)$ désignera, lorsqu'il existe, le temps local de X_d sur B.

Définition 1.1.4 *Supposons que* $\alpha_d(x, B)$ *existe pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$.

i) $(\alpha_d(x, B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$ *s'appellera le temps local d'intersection de* W *et* W' *au point* x *de* $\mathbb{R}^d$.

ii) Si $W = W'$, $(\alpha_d(x, B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$ *s'appellera le temps local d'intersection de* W *au point* x *de* $\mathbb{R}^d$.

Remarque Intuitivement, on peut comprendre $\alpha_d(x, B)$ comme étant l'intégrale formelle

$$\int_B \delta_x(W_u - W'_v)dudv,$$

si δ_x désigne la mesure de Dirac en x.

Lorsque W et W' sont indépendants, le théorème suivant est essentiel (Geman, Horowitz et Rosen [GHR], paragraphe 4 et lemme 3.11):

Théorème 1.1.5 *i)* W *et* W' *possèdent un temps local d'intersection* $\alpha_d(x, .)$ *pour tout* x *si et seulement si* $d \leq 3$. *Dans ce cas, la famille* $(\alpha_d(x, .), x \in \mathbb{R}^d)$ *est une famille de mesures aléatoires positives et* $P - ps$ *finies.*

ii) Soit B *un borélien de* $\mathbb{R}_+^2$, p *un entier pair et* $d \leq 3$. *Il existe une constante c telle que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $\varepsilon < 1$ *si* $d \leq 2$, $\varepsilon < 1/2$ *si* $d = 3$:

$$||\alpha_d(x, B) - \alpha_d(y, B)||_{L^p} \leq c|x - y|^{\varepsilon}.$$

Remarques - Le résultat du i) est intimement lié au fait qu'un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$ n'a $P - ps$ pas d'intersections (voir Dvoretzki-Erdös-Kakutani [DEK]).

- Avec un peu plus de travail, le résultat du ii) entraîne l'existence d'une version bi-holdérienne de $(\alpha_d(x, [0, t]^2))_{x,t}$.

On considère maintenant que $W = W'$. Dans son théorème 1, Rosen [R1] a montré que si $d \leq 3$, W possède un temps local d'intersection $\alpha_d(x, .)$ qui est tel que la fonction $x \mapsto \alpha_d(x, B)$ appartient $P - ps$ à $L^2(\mathbb{R}^d, d\lambda_d)$ si B est un borélien borné de $\mathbb{R}_+^2$.

Cependant, dans le cas où $d = 2$ ou 3, il est facile de voir que $\alpha_d(0, B) = +\infty$ $P - ps$ si B rencontre la diagonale $\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s = t\}$, ce qui s'explique intuitivement par le fait que le champ aléatoire $(W_u - W_v)_{u,v}$ a une très forte tendance à s'annuler au voisinage de la diagonale de $\mathbb{R}_+^2$. Il est intéressant de remarquer que, paradoxalement, cela est aussi lié au fait que la mesure de Lebesgue d'une trajectoire brownienne de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est nulle (voir Rosen [R1]).

Il existe pourtant un moyen de donner un sens à $\alpha_d(0, B)$ lorsque $d = 2$. C'est ce que nous verrons dans le paragraphe suivant.

Terminons ce paragraphe en mentionnant le fait que le temps local d'intersection d'ordre k quelconque a été défini et étudié : voir Rosen [R2], Bass et Khoshnevisan [BK], Rosen et Yor [RY] (pour k=3), ...

1.2 Le cas de la dimension 2 : la méthode de renormalisation de Varadhan

On prend ici un mouvement brownien plan et centré W sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, avec $\mathrm{cov}(W_1) = \Gamma$.

L'idée suggérée par Varadhan [Va] pour donner un sens au temps local d'intersection de W au point 0 est de retrancher à ce terme son espérance : il observe qu'alors la variable aléatoire obtenue est $P - ps$ finie.

Cette idée a été reprise par Le Gall [LG3], Yor ([Y1] et [Y3]) et d'autres .... En notant comme d'habitude, si B est un borélien borné de $\mathbb{R}_+^2$ qui rencontre la diagonale de $\mathbb{R}_+^2$, $\alpha_2(x, B)$ le temps local d'intersection de W au point x, ces derniers ont montré que la fonction $x \mapsto \gamma(x, B)$ définie pour x non nul par $\gamma(x, B) = \alpha_2(x, B) - E[\alpha_2(x, B)]$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier. Ceci appelle une nouvelle terminologie:

Définition 1.2.1 $\gamma(x, .) = \alpha_2(x, .) - E[\alpha_2(x, .)]$ *s'appelle le temps local d'intersection renormalisé de W au point x.*

Afin d'alléger les écritures, nous utiliserons souvent dans les démonstrations la notation : si X est une variable aléatoire intégrable, $\overline{X}$ désignera la variable aléatoire égale à $X - E[X]$.

Les deux approches de Yor sont basées sur une détermination de $\gamma(x, [0, t]^2)$ sous forme d'intégrales stochastiques. Dans la continuité d'un article de Rosen [R4], Yor [Y1] a établit une formule de type Tanaka pour $\alpha_2(x, [0, t]^2)$ et en a déduit dans [Y2] le module de continuité de $(\gamma(x, [0, t]^2)_{x,t}$. Une autre approche, beaucoup plus directe, est donnée dans [Y3]. L'inconvénient majeur de cette dernière est que l'on n'a pas la décomposition canonique de la semimartingale $(\alpha_2(x, [0, t]^2))_t$.

L'approche de Le Gall, quant à elle, est très différente. Dans la mesure où elle nous servira plus loin, nous allons la résumer. L'article de Le Gall ne traite que du mouvement brownien standard, mais cette preuve est encore valable lorsque la matrice de covariance Γ de W_1 est une matrice diagonale.

Soit $\mathcal{C}_t = \{(u, v) : 0 \leq u < v \leq t\}$ et $\mathcal{A}_\eta^\xi$ le pavé de $\mathbb{R}_+^2$ définit par

$$\mathcal{A}_\eta^\xi = [\frac{t2\eta}{2^\xi}, \frac{t(2\eta+1)}{2^\xi}[\times]\frac{t(2\eta+1)}{2^\xi}, \frac{t(2\eta+2)}{2^\xi}].$$

On a alors

$$\mathcal{C}_t = \bigcup_{\xi \geq 0} \bigcup_{\eta=0}^{2^\xi - 1} \mathcal{A}_\eta^\xi.$$

De plus, les $\mathcal{A}_\eta^\xi$ sont deux à deux disjoints. Sur chaque pavé $\mathcal{A}_\eta^\xi$, on est ramené à la situation de deux mouvements browniens indépendants issus du même point. Le théorème 1.1.5 i) entraîne donc l'existence pour chaque couple (η, ξ) d'une famille $(\beta_\eta^\xi(x, .), x \in \mathbb{R}^2)$

de mesures positives et $P-ps$ finies sur $\mathcal{A}_\eta^\xi$ qui vérifie les relations de la proposition 1.1.2 et du théorème 1.1.5 ii). Le Gall introduit la mesure aléatoire $(\alpha_2(x,.), x \in \mathbb{R}^2 \setminus 0)$:

$$\alpha_2(x,.) = \sum_{\xi \geq 0} \sum_{\eta=0}^{2^\xi - 1} \beta_\eta^\xi(x,.\cap \mathcal{A}_\eta^\xi)$$

qui vérifie aussi la proposition 1.1.2. En posant, pour $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(x,.) = \sum_{\xi \geq 0} (\alpha_2(x,.\cap \mathcal{A}^\xi) - E[\alpha_2(x,.\cap \mathcal{A}^\xi)]) \text{ si } \mathcal{A}^\xi = \bigcup_{\eta=0}^{2^\xi - 1} \mathcal{A}_\eta^\xi,$$

et en utilisant le théorème 1.1.5 ii), Le Gall aboutit au résultat:

Théorème 1.2.2 *Soit B un borélien de C_t et p un entier pair. Il existe une constante c telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon < 1$:*

$$||\gamma(x,B) - \gamma(y,B)||_{L^p} \leq c|x-y|^\varepsilon.$$

Puis, comme corollaire, le résultat final:

Corollaire 1.2.3 *Soit B un borélien de C_t et $(f_k)_k$ une suite de fonctions bornées, d'intégrale égale à 1, telle que $f_k(y)dy$ converge étroitement vers la mesure de Dirac en x. Alors*

$$\int_B f_k(W_v - W_u)dvdu - E[\int_B f_k(W_v - W_u)dvdu] \xrightarrow[k\to\infty]{L^p, P-ps} \gamma(x,B).$$

Passons au cas où la matrice de covariance Γ est quelconque. Puisque Γ est définie positive, il existe une matrice A inversible et une matrice diagonale D telles que $\Gamma = ADA^T$. Soit $X = A^T W$: X est un mouvement brownien centré dont la matrice de covariance $\text{cov}(X_1)$ est égale à D. Alors, B étant un borélien de C_t, $(f_k)_k$ la suite du corollaire 1.2.3 et γ^X désignant le temps local d'intersection renormalisé associé à X:

$$\int_B f_k(W_v - W_u)dvdu - E[\int_B f_k(W_v - W_u)dvdu]$$

$$= \int_B f_k(A(X_v - X_u))dvdu - E[\int_B f_k(A(X_v - X_u))dvdu]$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} f_k(Ay)\gamma^X(y,B)dy \text{ en utilisant la proposition 1.1.2}$$
$$= \det A^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f_k(y)\gamma^X(A^{-1}y,B)dy.$$

D'après le corollaire 1.2.3, cette quantité converge $P-ps$ et dans L^p vers

$$\det A^{-1}\gamma^X(A^{-1}x,B).$$

On peut maintenant définir le temps local d'intersection renormalisé de W au point x par $\det A^{-1}\gamma^X(A^{-1}x,B)$, et les propriétés de la proposition 1.1.2, du théorème 1.2.2 et du corollaire 1.2.3 sont conservées.

1.3 Intervention du temps local d'intersection en Mécanique Statistique : la mesure de polymère

On reprend ici un mouvement brownien W d-dimensionnel ($d \leq 3$) issu de 0, défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$. On se donne une suite de fonctions $(f_k)_k$ telle que $f_k(x)dx$ converge étroitement vers δ_0 la mesure de Dirac en 0. Définissons la probabilité $\mu_k(g,t)$ sur l'espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$ par

$$\mu_k(g,t)(d\omega)=\frac{1}{L_{g,k}}\exp(-g\int_0^t\int_0^t f_k(W_u-W_v)dudv)P(d\omega),$$

où g est une constante positive et $L_{g,k}$ la constante de normalisation. Le temps local d'intersection apparaît naturellement dans l'étude des "mesures de polymères" (voir Edwards [Ed] ou Westwater [Wes]):

Définition 1.3.1 *Les valeurs d'adhérence de la suite $(\mu_k(g,t))_k$ sont appelées mesures de polymères.*

Si l'existence de la mesure de polymère est évidente en dimension 1, il n'en est pas de même pour les dimensions supérieures.

En dimension 2, on peut montrer, comme conséquence du corollaire 1.2.3 et du fait que le temps local d'intersection renormalisé du mouvement brownien plan $\gamma(0,\mathcal{C}_t)$ possède des moments exponentiels de tous ordres:

Théorème 1.3.2 *Toutes les mesures de polymères sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sont de la forme:*

$$\mu(g,t)(d\omega)=\frac{1}{L_g}\exp(-g\gamma(0,\mathcal{C}_t))P(d\omega).$$

En dimension 3, Westwater [Wes] a montré l'existence de la mesure de polymère. Sa preuve est très longue et nous n'en parlerons pas ici.

Concrètement, on s'attend à ce que la limite en $g\to\infty$ de la mesure de polymère $\mu(g,t)$ converge étroitement vers une mesure de chemin aléatoire sans recoupement, qui fournirait donc une bonne modélisation des polymères en solution. Cette limite a été étudiée en dimension 1 par Kusuoka [Ku]. Le problème des dimensions 2 et 3 reste ouvert.

2 Principes d'invariance faibles

2.1 Introduction

Vu l'intérêt géométrique que revêt le temps local d'intersection, il est intéressant de rechercher des approximations de ce dernier, approximations dont le sens géométrique est intuitivement clair.

C'est dans cet esprit que, dans [LG2], Le Gall a montré que le temps local d'intersection de deux mouvements browniens indépendants pouvait être construit à partir de la mesure de Lebesgue de la saucisse de Wiener (voir aussi Weinryb [Wei] pour une extension de ce résultat à d'autres mesures que celle de Lebesgue). Puis, dans [LG3], Le Gall a obtenu le résultat correspondant pour le temps local d'intersection renormalisé du mouvement brownien plan.

L'équivalent discret de la mesure de Lebesgue de la saucisse de Wiener est le rang d'une marche aléatoire, c'est-à-dire le nombre de points visités par celle-ci. Il paraît alors clair que le temps local d'intersection d'un mouvement brownien plan puisse être obtenu comme limite d'une expression comportant essentiellement le rang d'une marche aléatoire de $\mathbb{Z}^2$: c'est ce que Le Gall a montré dans [LG1].

Nous nous intéressons ici à une approximation apparemment plus naturelle du temps local d'intersection d'un mouvement brownien.

Dans tout ce qui suit, $(S_n)_n$ désignera une marche aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, de distribution initiale δ_0 (la mesure de Dirac en 0) et engendrée par une mesure centrée Q possèdant un moment d'ordre 2. On appelera Γ la matrice

$$\Gamma = \int x.x^T dQ(x)$$

et $(X_k)_{k\geq 1}$ la suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi Q telle que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. D'autre part, W désignera un mouvement brownien centrée sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\mathrm{cov}(W_1) = \Gamma.$$

Reprenons les notations de la première partie. En particulier, $\alpha_d(x, .)$ sera le temps local d'intersection de W au point $x \in \mathbb{R}^d$. On appellera $C_{[nt]}$ l'équivalent discret de $\mathcal{C}_t$ (cf. partie 1.2) i.e.

$$C_{[nt]} = \{(i,j) \ : \ 0 \leq i < j \leq [nt]\}$$

et, si $x = (x^1, \cdots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, $[x]$ désignera l'élément de $\mathbb{Z}^d$:

$$([x^1], \cdots, [x^d]).$$

Le candidat naturel pour représenter l'équivalent discret de $\alpha_d(x, \mathcal{C}_t)$ est

$$\frac{1}{n^{(4-d)/2}} \sum_{(i,j)\in C_{[nt]}} I_{\{S_i - S_j = [x\sqrt{n}]\}}.$$

On a donc la terminologie, que nous utiliserons par la suite:

Définition 2.1.1 *Si $\mathcal{P}$ est une partie bornée de $\mathbb{N}^2$, la variable aléatoire $\alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P})$ définie par*

$$\alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P}) = \frac{1}{n^{(4-d)/2}} \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}} I_{\{S_i - S_j = x\}}$$

s'appelle le temps local d'intersection de S_n au point $x \in \mathbb{Z}^d$.

Borodin [Bor] avait déjà considéré ce type d'approximation pour le temps local du mouvement brownien linéaire. La démonstration qu'il met en oeuvre est très spécifique au cas particulier qu'il étudie. Toujours dans ce contexte, Perkins [P] a retrouvé un résultat de même nature en établissant, du point de vue de l'Analyse non-standard, une formule de Tanaka.

Le Gall ([LG1], page 497) lui aussi a considéré ces sommes dans le cas des temps locaux d'intersection de deux marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $d \leq 3$.

En utilisant l'Analyse non-standard, Stoll [St] a montré que, en dimension 2 et lorsque la marche aléatoire $(S_n)_n$ est engendrée par une mesure à support compact, la variable aléatoire

$$\alpha_2^{(n)}(0, C_{[nt]}) - E[\alpha_2^{(n)}(0, C_{[nt]})]$$

converge en loi vers $\gamma(0, C_t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Par analogie au cas brownien, nous utiliserons la terminologie:

Définition 2.1.2 *Si $\mathcal{P}$ est une partie bornée de $\mathbb{N}^2$, la variable aléatoire $\gamma^{(n)}(x,\mathcal{P})$ définie par*

$$\gamma^{(n)}(x,\mathcal{P}) = \alpha_2^{(n)}(x,\mathcal{P}) - E[\alpha_2^{(n)}(x,\mathcal{P})]$$

s'appelle le temps local d'intersection renormalisé de S_n au point $x \in \mathbb{Z}^2$.

Dans le paragraphe 2.3, nous retrouverons et étendrons le résultat de Stoll avec des techniques classiques. Les extensions porteront d'une part sur la mesure qui engendre la marche aléatoire - nous supposerons seulement qu'elle possède un moment d'ordre 2 - et d'autre part, nous montrerons un résultat fonctionnel en t et x.

Après avoir terminé cette rédaction, nous avons appris que, dans [R3], Rosen avait déjà considéré ce type de problèmes. Bien que n'étant pas des résultats fonctionnels, les résultats montrés par Rosen sont plus généraux dans la mesure ou il considère le temps local d'intersection d'ordre k quelconque.

Comparé à Rosen, l'intérêt de la preuve que nous allons présenter est double : l'utilité de l'aspect fonctionnel se remarque par exemple à partir du problème des marches aléatoires en scène aléatoire. D'autre part, une variation de notre méthode permet d'obtenir un principe d'invariance fort.

Dans le paragraphe 2.4, nous reprendrons l'étude du cas général des marches aléatoires de $\mathbb{Z}^d$, $d \leq 3$.

Enfin, dans le paragraphe 2.5, nous donnerons un équivalent discret à la mesure de polymère associée au mouvement brownien plan, construit à partir de $\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]})$.

Dans un premier temps, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

2.2 Préliminaires généraux

a) Plongement d'une marche aléatoire dans un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$

Rappelons l'énoncé d'un théorème, figurant dans Revuz-Yor [ReY] (Chapitre VI, théorème 5.4):

Théorème 2.2.1 *Soit B un mouvement brownien réel sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si μ est une mesure de probabilité telle que $\int x d\mu(x) = E[B_0]$ et $\int |x| d\mu(x) < \infty$, il existe un temps d'arrêt $P-ps$ fini T_μ relatif à la filtration naturelle associée à B vérifiant:*
i) $\mathcal{L}(B_{T_\mu}) = \mu$
ii) $E[< B, B >_{T_\mu}] = \int x^2 d\mu(x)$
iii) Pour $p \geq 1$, il existe c_p avec $E[(< B, B >_{T_\mu})^p] \leq c_p \int x^{2p} d\mu(x)$.
Les points ii) et iii) n'étant bien entendu valables que lorsque μ admet des moments d'ordre 2 et $2p$ respectivement.

Remarque Le point iii) ne figure pas dans Revuz-Yor, mais est donné par Haeusler [Ha].

Si X est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ nous appellerons $(X^1, \cdots, X^d)$ ses coordonnées. Le résultat de plongement est le suivant:

Lemme 2.2.2 *Soit W un mouvement brownien centré sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance Γ est diagonale ($\Gamma = \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_d)$), et $M_k = \sum_{i=1}^k U_i$ une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et de carré intégrable sur le même espace probabilisé (en grossissant ce dernier si besoin).*

Il existe une suite croissante de variables aléatoires $(T_k^1, \cdots, T_k^d)_k$ ($T_0^i = 0$) telles que si $\phi_d(x_1, \cdots, x_{d-1}) = E[U_1^d | U_1^1 = x_1, \cdots, U_1^{d-1} = x_{d-1}]$ ($\phi_1 \equiv 0$) pour $x_1, \cdots, x_{d-1} \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{L}((M_k^1, \cdots, M_k^d)_k) = \mathcal{L}((W_{T_k^1}^1, \cdots, W_{T_k^d}^d + \sum_{l=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} \phi_l(W_{T_i^1}^1 - W_{T_{i-1}^1}^1, \cdots, W_{T_i^{l-1}}^{l-1} - W_{T_{i-1}^{l-1}}^{l-1})_k).$$

De plus, pour $i = 1, \cdots, d$ et $k \geq 1$:

$$b_i E[T_k^i - T_{k-1}^i] = E[(U_1^i)^2], \; b_i^{2p} E[(T_k^i - T_{k-1}^i)^p] \leq c_p E[|U_1^i|^{2p}], \; p \geq 1$$

la dernière relation n'étant valable que si $U_1 \in L^{2p}(P)$.

PREUVE : Dans un souci de simplification, nous ne considèrerons que le cas $d = 2$.

1) Nous appelerons $\mathcal{F}^M$ la filtration naturelle associée à un processus M. On construit les processus $(W_t^{1,k}, W_t^{2,k}(x_1,\cdots,x_{k-1}))_t$ pour toute suite $(x_k)_k$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ et tout réel positif t de la façon suivante:

- Pour $k=1$: $W_t^{i,1} = W_t^i \ i=1,2$
- Pour $k \geq 2$: $W_t^{1,k} = W_{t+\tau_{k-1}^1}^{1,k-1} - W_{\tau_{k-1}^1}^{1,k-1}$

$$W_t^{2,k}(x_1,\cdots,x_{k-1}) = W_{t+\tau_{k-1}^2(x_1,\cdots,x_{k-1})}^{2,k-1}(x_1,\cdots,x_{k-2}) - W_{\tau_{k-1}^2(x_1,\cdots,x_{k-1})}^{2,k-1}(x_1,\cdots,x_{k-2})$$

où, pour $l \leq k$, τ_l^1 est un temps d'arrêt relatif à $\mathcal{F}^{W^{1,l}}$ et $\tau_l^2(x_1,\cdots,x_l)$ est un temps d'arrêt relatif à $\mathcal{F}^{W^{2,l}(x_1,\cdots,x_{l-1})}$.

2) Faisons quelques remarques sur ces objets:
Soient $x_1,\cdots,x_l$ des entiers relatifs quelconques.
- Les temps d'arrêt τ_1^l et $\tau_2^l(x_1,\cdots,x_l)$ que nous utilisons ici sont ceux du théorème 2.2.1. Précisons, ce qui sera utile par la suite, que l'application

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)) &\to \mathbb{R}^+\\ (x_1,\cdots,x_l) &\mapsto \tau_l^2(x_1,\cdots,x_l)\end{aligned}$$

est mesurable.
- Les processus $W^{1,l}$ et $W^{2,l}(x_1,\cdots,x_{l-1})$ sont des mouvements browniens de processus croissants associés:

$$< W^{1,l}, W^{1,l} > = b_1 Id \text{ et } < W^{2,l}(x_1,\cdots,x_{l-1}), W^{2,l}(x_1,\cdots,x_{l-1}) > = b_2 Id.$$

- $\sum_{i=1}^l \tau_i^1$ et $\sum_{i=1}^l \tau_i^2(x_1,\cdots,x_i)$ sont des temps d'arrêt relativement à $\mathcal{F}^{W^{1,1}}$ et $\mathcal{F}^{W^{2,1}}$, comme le montre la proposition 3.3 page 98 de [ReY].

3) Montrons qu'il existe des temps d'arrêt $(\tau_l^1)_l$ et $(\tau_l^2(x_1,\cdots,x_l))_l$ tels que quelque soit k:

$$\mathcal{L}(U_1^1,\cdots,U_k^1) = \mathcal{L}(W_{\tau_1^1}^{1,1},\cdots,W_{\tau_k^1}^{1,k}) \tag{21}$$

et, pour $l \leq k$,

$$\mathcal{L}(U_l^2|U_1^1 = x_1,\cdots,U_l^1 = x_l) = \mathcal{L}(W_{\tau_l^2(x_1,\cdots,x_l)}^{2,l}(x_1,\cdots,x_{l-1}) + \phi_2(x_l)). \tag{22}$$

(21) est une application directe du théorème 2.2.1, en tenant compte de l'indépendance de ces variables. Pour (22):

- $k=1$. Considérons, si x_1 est dans $\mathbb{Z}$, la loi de U_1^2 sachant $U_1^1 = x_1$. D'après le théorème 2.2.1, il existe un temps d'arrêt $\tau_1^2(x_1)$ relatif à $\mathcal{F}^{W^{2,1}}$ tel que

$$\mathcal{L}(U_1^2|U_1^1 = x_1) = \mathcal{L}(W_{\tau_1^2(x_1)}^{2,1} + \phi_2(x_1)).$$

- Lorsque k est quelconque, le problème se traite de la même façon en plongeant la variable aléatoire définie par $\mathcal{L}(U_k^2|U_k^1 = x_k)$ dans le mouvement brownien $W^{2,k}(x_1, \cdots, x_{k-1})$ $+\phi_2(x_k)$.

Nous obtenons alors, pour tout k et $x_1, \cdots, x_k$ éléments de $\mathbb{Z}$, par indépendance:

$$\mathcal{L}(U_1^2, \cdots, U_k^2|U_1^1 = x_1, \cdots, U_k^1 = x_k) = \mathcal{L}((W^{2,i}_{\tau_i^2(x_1,\cdots,x_i)}(x_1, \cdots, x_{i-1}) + \phi_2(x_i))_{i\leq k}).$$

4) Les processus $W^{2,1}, \cdots, W^{2,k}(x_1, \cdots, x_{k-1})$ sont indépendants de $W^{1,1}_{\tau_1^1}, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^1}$ parce que la matrice Γ est diagonale, d'où:

$$\mathcal{L}((W^{2,i}_{\tau_i^2(x_1,\cdots,x_i)}(x_1, \cdots, x_{i-1}) + \phi_2(x_i))_{i\leq k}) =$$

$$\mathcal{L}\Big((W^{2,i}_{\tau_i^2(W^{1,1}_{\tau_1^1},\cdots,W^{1,i}_{\tau_i^1})}(W^{1,1}_{\tau_1^1}, \cdots, W^{1,i-1}_{\tau_{i-1}^1}) + \phi_2(W^{1,i}_{\tau_i^1}))_{i\leq k}|\bigcap_{i=1}^{k}[W^{1,i}_{\tau_i^1} = x_i]\Big).$$

Ceci étant valable pour tout $x_1, \cdots, x_k$ de $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{L}(U_1^2, \cdots, U_k^2, U_1^1, \cdots, U_k^1) =$$

$$\mathcal{L}\Big((W^{2,i}_{\tau_i^2(W^{1,1}_{\tau_1^1},\cdots,W^{1,i}_{\tau_i^1})}(W^{1,1}_{\tau_1^1}, \cdots, W^{1,i-1}_{\tau_{i-1}^1}) + \phi_2(W^{1,i}_{\tau_i^1}), W^{1,i}_{\tau_i^1})_{i\leq k}\Big)$$

et donc

$$\mathcal{L}((M_k^1, M_k^2)_{k\leq p}) = \mathcal{L}\Big((W^1_{\sum_{i=1}^k \tau_i^1}, W^2_{\sum_{i=1}^k \tau_i^2(W^{1,1}_{\tau_1^1},\cdots,W^{1,i}_{\tau_i^1})} + \sum_{i=1}^{k} \phi_2(W^{1,i}_{\tau_i^1}))_{k\leq p}\Big) \ \forall p.$$

D'où la première assertion en posant $T_k^1 = \sum_{i=1}^k \tau_i^1$ et $T_k^2 = \sum_{i=1}^k \tau_i^2(W^{1,1}_{\tau_1^1}, \cdots, W^{1,i}_{\tau_i^1})$.

5) Les inégalités s'obtiennent comme conséquences directes du théorème 2.2.1 et de la construction de T_k^1 et T_k^2. Par exemple avec $i = 2$:

$$b_2 E[\tau_k^2(x_1, \cdots, x_k)] = E[(U_k^2)^2|U_1^1 = x_1, \cdots, U_k^1 = x_k]$$

et on conclut en remarquant que

$$\mathcal{L}(\tau_k^2(x_1, \cdots, x_k)) = \mathcal{L}(\tau_k^2(W^{1,1}_{\tau_1^1}, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^1})|W^{1,1}_{\tau_1^1} = x_1, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^1} = x_k)$$

puisque la filtration $\mathcal{F}^{W^{2,k}(x_1,\cdots,x_{k-1})}$ est indépendante des filtrations $\mathcal{F}^{W^{1,1}}, \cdots, \mathcal{F}^{W^{1,k}}$. Les autres inégalités s'obtiennent de la même manière ■

Remarque On peut montrer que les variables

$$(W^{2,i}_{\tau_i^2(W^{1,1}_{\tau_1^1},\cdots,W^{1,i}_{\tau_i^1})}(W^{1,1}_{\tau_1^1}, \cdots, W^{1,i-1}_{\tau_{i-1}^1}))_{i\leq k}$$

sont indépendantes entre elles. Malheureusement, il n'en est pas de même pour les couples

$$(W^{1,i}_{\tau^1_i}, W^{2,i}_{\tau^2_i(W^{1,1}_{\tau^1_1},\dots,W^{1,i}_{\tau^1_i})}(W^{1,1}_{\tau^1_1},\cdots,W^{1,i-1}_{\tau^1_{i-1}}) + \phi_2(W^{1,i}_{\tau^1_i}))_{i\leq k},$$

ce qui fait que, étant donnée une mesure Q sur $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$), on ne sait pas construire par plongement une marche aléatoire engendrée par Q.

b) Un résultat de convergence pour W

Dans le cas où Γ est diagonale, nous pouvons énonçer, comme complément au lemme 2.2.2, un résultat de convergence dans $L^1(P)$ entre le processus $(S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq T}$ et le processus $(W_t)_{t\leq T}$. Dans ce but, plongeons $(S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq T}$ dans le mouvement brownien W. D'après le lemme 2.2.2, il existe une suite de variables aléatoires $(T^1_{[nt]},\cdots,T^d_{[nt]})_{t\leq T}$ vérifiant

$$\mathcal{L}\Big((W_{T_{[nt]}} + \overline{\phi}_{[nt]})_{t\leq T}\Big) = \mathcal{L}\Big((\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}})_{t\leq T}\Big),$$

où on a noté $W_{T_{[nt]}} = (W^1_{T^1_{[nt]}},\cdots,W^d_{T^d_{[nt]}})$ et

$$\overline{\phi}_{[nt]} = (0, \sum_{i=1}^{[nt]} \phi^n_2(W^1_{T^1_i} - W^1_{T^1_{i-1}}),\cdots,\sum_{l=1}^{d}\sum_{i=1}^{[nt]} \phi^n_d(W^1_{T^1_i} - W^1_{T^1_{i-1}},\cdots,W^{l-1}_{T^{l-1}_i} - W^{l-1}_{T^{l-1}_{i-1}}))$$

si, pour $x_1,\cdots,x_{d-1} \in \mathbb{Z}/\sqrt{n}$ et $l \leq d$:

$$\phi^n_l(x_1,\cdots,x_{l-1}) = E[\frac{X^l_1}{\sqrt{n}}|\frac{X^1_1}{\sqrt{n}} = x_1,\cdots,\frac{X^{l-1}_1}{\sqrt{n}} = x_{l-1}].$$

De façon identique, $T_{[nt]}$ représentera le vecteur $(T^1_{[nt]},\cdots,T^d_{[nt]})$.

Lemme 2.2.3 *Si Γ est diagonale ($\Gamma = \mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_d)$), $(W_{T_{[nt]}})_{t\leq T}$ converge uniformément dans $L^1(P)$ vers $(W_u)_u$ et $(\overline{\phi}_{[nt]})_{t\leq T}$ converge uniformément vers 0 dans $L^1(P)$.*

PREUVE : La deuxième assertion est facile à montrer : on a vu dans la preuve du lemme précédent de quelle façon on pouvait simplifier cette somme par conditionnement. On arrive donc à des expressions du type

$$E[\frac{S^k_n}{\sqrt{n}}|\sigma(S^1_i,\cdots,S^{k-1}_i;i\leq n)],\ k\leq d$$

qui convergent en loi vers 0 si n tend vers l'infini car $((S^1_{[nt]},\cdots,S^k_{[nt]})/\sqrt{n})_{t\leq T}$ converge vers un mouvement brownien centré dont la matrice de covariance est diagonale. Le passage à la convergence $L^1(P)$ est évident puisque $E[(S^k_n)^2] = nb_k$.

On s'occupe maintenant de la première assertion. Nous supposerons ici que $X_1 \in L^4(P)$. Dans le cas où X_1 ne possède qu'un moment d'ordre 2, il suffit de considérer des variables aléatoires tronquées.

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E[\sup_{t\leq T}|W_{T_{[nt]}} - W_t|]$$
$$\leq \varepsilon + (E[\sup_{t\leq T}|W_{T_{[nt]}} - W_t|^2])^{\frac{1}{2}} P(\sup_{t\leq T}|W_{T_{[nt]}} - W_t| > \varepsilon)^{\frac{1}{2}};$$

or

$$E[\sup_{t\leq T}|W_{T_{[nt]}} - W_t|^2] \leq 2\sum_{i=1}^{d}(\sup_{k\leq[nT]}\frac{E[(S_k^i)^2]}{n} + \sup_{t\leq T}E[(W_t^i)^2]) \leq 4T\sum_{i=1}^{d}b_i.$$

Par ailleurs, pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{t\leq T}|W_{T_{[nt]}} - W_t| > \varepsilon)\\
&\leq P(\sup_{t\leq T}|W_{T_{[nt]}} - W_t| > \varepsilon, \sup_{t\leq T}|T_{[nt]} - t| \leq \lambda) + P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]} - t| \geq \lambda)\\
&\leq P(\sup_{|u-v|\leq\lambda}|W_u - W_v| \geq \varepsilon) + P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]} - t| \geq \lambda). \qquad (23)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité exponentielle donnant le module de continuité d'un mouvement brownien, il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que, pour tous $\varepsilon > 0$ et $\lambda < 1$

$$P(\sup_{|u-v|\leq\lambda,\, u\leq T+\lambda}|W_u - W_v| \geq \varepsilon) \leq c_1\frac{1}{\sqrt{\lambda}\varepsilon}\exp(-\frac{\varepsilon^2}{c_2\lambda}).$$

Il suffit de prendre $\lambda = \varepsilon^2/c_2\log n$, si ε est tel que $\lambda < 1$, pour obtenir la convergence vers 0 du premier terme à droite du signe $\leq$ de (23). Il reste à montrer que $P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]}-t| \geq \lambda)$ tend vers 0:

$$P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]} - t| \geq \lambda) \leq P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]} - E[T_{[nt]}]| \geq \frac{\lambda}{2})$$

si $\lambda \geq 2\sqrt{2}/n$ car, d'après le lemme 2.2.2, $E[T_{[nt]}^i] = [nt]/n \quad i = 1, \cdots, d$. Or,

$$P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]} - E[T_{[nt]}]| \geq \frac{\lambda}{2}) \leq \sum_{i=1}^{d}P(\sup_{t\leq T}|T_{[nt]}^i - E[T_{[nt]}^i]| \geq \frac{\lambda}{2d}).$$

Majorons cette expression pour $i = 2$ (les autres cas se traitant de la même façon):

$$P(\max_{k\leq[nT]}|T_k^2 - E[T_k^2]| \geq \frac{\lambda}{2d}) = P(\max_{k\leq[nT]}|\sum_{l=1}^{k}\overline{\tau_l^2}(W_{\tau_1^1}^{1,1}, \cdots, W_{\tau_l^1}^{1,l})| \geq \frac{\lambda}{2d})$$

$$= \sum_{x_1,\cdots,x_l} P(\max_{k\leq[nT]}|\sum_{l=1}^{k}\overline{\tau_l^2}(x_1, \cdots, x_l)| \geq \frac{\lambda}{2d})P(W_{\tau_1^1}^{1,1} = x_1)\cdots P(W_{\tau_l^1}^{1,l} = x_l)$$

car, d'après la preuve du lemme 2.2.2, $(\tau_l^2(x_1,\cdots,x_l))_l$ est indépendant de $(W^{1,l}_{\tau_l^1})_l$ et

$$\mathcal{L}((\tau_l^2(W^{1,1}_{\tau_1^1},\cdots,W^{1,l}_{\tau_l^1}))_{l\le k}) = \mathcal{L}((\tau_l^2(x_1,\cdots,x_l))_{l\le k}|\bigcap_{l=1}^{k}[W^{1,l}_{\tau_l^1}=x_l]).$$

Le processus $(\sum_{l=1}^k \overline{\tau_l^2}(x_1,\cdots,x_l))_{k\le[nT]}$ étant une martingale, on obtient en utilisant l'inégalité de Doob:

$$\begin{aligned} P(\max_{k\le[nT]}|\sum_{l=1}^{k}\overline{\tau_l^2}(x_1,\cdots,x_l)|\ge\frac{\lambda}{2d}) &\le \frac{4d^2}{\lambda^2}E\left[\left(\sum_{l=1}^{[nT]}\overline{\tau_l^2}(x_1,\cdots,x_l)\right)^2\right] \\ &\le \frac{4d^2}{\lambda^2}\sum_{l=1}^{[nT]}E[(\tau_l^2(x_1,\cdots,x_l))^2] \\ &\le \frac{4d^2}{\lambda^2}\frac{[nT]}{n^2}\le\frac{4d^2T}{\lambda^2 n} \end{aligned}$$

d'où le lemme en prenant par exemple $\varepsilon = 6.2^{\frac{1}{4}}/n^{\frac{1}{8}}$ et $\lambda = 1/\sqrt{n}$ ∎

c) Un équivalent discret du théorème 1.1.5

Soit $\mathcal{M}$ une mesure de probabilité sur un groupe additif R. Si $\mathcal{M}^{*n}$ représente la loi de la marche aléatoire engendrée par $\mathcal{M}$ et de distribution initiale δ_0 (la mesure de Dirac en 0), on note, comme dans Spitzer ([Sp], définitions D2.1 et D2.2):

Définition 2.2.4 *On appelle $\sum(\mathcal{M})$ et $R^+(\mathcal{M})$ les sous-ensembles de R définis par*

$$\sum(\mathcal{M}) = \{x\in R\ :\ \mathcal{M}(x)>0\}$$
$$R^+(\mathcal{M}) = \{x\in R\ :\ \exists n\ \mathcal{M}^{*n}(x)>0\}.$$

Définition 2.2.5 *On dit que la marche aléatoire engendrée par la mesure $\mathcal{M}$ et de distribution initiale δ_0 est apériodique sur R si $\sum(\mathcal{M})$ engendre R.*

Dans un contexte non-standard, Stoll ([St], proposition 1.10) a montré un résultat, que nous traduisons ici dans une version standard:

Lemme 2.2.6 *On suppose que $(S_n)_n$ est apériodique et que Q est à support compact. Soit $\mathcal{P} = \{(j,l)\ :\ j=\underline{a},\cdots,\overline{a}$ et $l=\underline{b},\cdots,\overline{b}\}$ où $\underline{a}<\overline{a}\le\underline{b}<\overline{b}$ et $\overline{b}$ se comporte au plus comme n. Pour tout entier pair p, tout élément x,y de $\mathbb{Z}^d$, $\lambda<1$ si $d\le 2$ ou $\lambda<1/2$ si $d=3$:*

$$||\alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P})-\alpha_d^{(n)}(y,\mathcal{P})||_{L^p}\le\frac{c}{n^{(4-d)/2}}|x-y|^{\lambda}(\overline{a}-\underline{a})^{(4-d-\lambda)/4}(\overline{b}-\underline{b})^{(4-d-\lambda)/4}$$
$$||\alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P})||_{L^p}\le\frac{c}{n^{(4-d)/2}}(\overline{a}-\underline{a})^{(4-d)/4}(\overline{b}-\underline{b})^{(4-d)/4}$$

pour une certaine constante c indépendante des paramètres cités plus haut.

Remarque - Les intervalles $\{\underline{a},\cdots,\overline{a}\}$ et $\{\underline{b},\cdots,\overline{b}\}$ sont supposés disjoints, ce qui permet en fait de se ramener à la situation de deux marches aléatoires indépendantes. Le lemme 2.2.5 est donc l'équivalent discret du théorème 1.1.5.

- On peut montrer que la constante c qui apparaît ci-dessus ne dépend que de la plus petite valeur propre de la matrice $\Gamma_s = \int x.x^T d(Q*Q_-)(x)$ (où $Q_-(x) = Q(-x)$), ce qui, compte tenu de ce que nous voulons montrer, est naturel puisque ces inégalités admettent une version brownienne.

IDEE DE LA PREUVE : On peut le montrer de la même façon que Stoll, en adaptant les outils non-standards qu'il utilise. Dans la démonstration de Stoll, l'intérêt de l'aspect non-Standard apparait plus tard. Le plan de cette preuve est en fait identique à celui de Geman, Horowitz et Rosen ([GRH], lemme 3.11) dans le cas brownien.

Puisque Q est à support compact, il existe un entier q tel que le support de $x \mapsto \alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P})$ soit contenu dans $\{-qn+1,\cdots,qn\}^d$. Sa transformée de Fourier est égale à:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_d^{(n)}(y,\mathcal{P}) &= \sum_{x_1=-qn+1}^{qn}\cdots\sum_{x_d=-qn+1}^{qn}\alpha^{(n)}(x,\mathcal{P})\exp(2\pi iy.\frac{x}{2qn})\\ &= \frac{1}{n^{(4-d)/2}}\sum_{j=\underline{a}}^{\overline{a}}\sum_{l=\underline{b}}^{\overline{b}}\exp(2\pi iy.\frac{S_l-S_j}{2qn}).\end{aligned}$$

La transformation de Fourier inverse donne la relation (24) suivante:

$$\begin{aligned}\alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P}) &= \frac{1}{(2qn)^d}\sum_{y_1=-qn+1}^{qn}\cdots\sum_{y_d=-qn+1}^{qn}\widehat{\alpha}_d^{(n)}(y,\mathcal{P})\exp(-2\pi iy.\frac{x}{2qn})\\ &= \frac{1}{n^{(4+d)/2}}\frac{1}{(2q)^d}\sum_{y_1=-qn+1}^{qn}\cdots\sum_{y_d=-qn+1}^{qn}\sum_{j=\underline{a}}^{\overline{a}}\sum_{l=\underline{b}}^{\overline{b}}\exp(2\pi iy.\frac{S_l-S_j}{2qn})\exp(-2\pi iy.\frac{x}{2qn}).\end{aligned}$$

D'autre part, comme Q est centrée et $\sum(Q)$ engendre $\mathbb{Z}^d$, on a $R^+(Q) = \mathbb{Z}^d$. A partir de cette égalité, Stoll montre que la mesure $Q_s = Q*Q_-$ (si $Q_-(x) = Q(-x)$) engendre une marche aléatoire apériodique sur un sous-groupe H de $\mathbb{Z}^d$ qu'il décrit. La transformée de Fourier ϕ de Q_s i.e.

$$\phi(\theta) = \int \exp(i\theta.x)Q_s(dx)$$

est réelle et telle que, si $\psi(\theta) = \int\exp(i\theta.x)Q(dx)$: $\phi(\theta)^2 = |\psi(\theta)|$. Puisque H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^d$, on peut trouver d vecteurs linéairement indépendants $a_1,\cdots,a_d$ dans l'ensemble $\sum(Q_s)$ (cf. définition 2.2.4). La proposition P7.5 de Spitzer [Sp] donne alors une estimation du type

$$\phi(\theta) = |\psi(\theta)|^{1/2} \le 1-\alpha|\theta|^2 \le \exp(-\alpha|\theta|^2),\ \theta\in[-\pi,\pi]^d \tag{25}$$

où $\alpha = \min(2\pi^{-1}\alpha_1, \min_{\pi\geq|\theta|\geq\pi L^{-1}}(1-\phi(\theta))L)$ si $L = \max_k |a_k|$ et α_1 est la plus petite valeur propre de la matrice $\int x.x^T dQ_s(x) = 2\int x.x^T dQ(x)$. Des considérations classiques sur les marches aléatoires nous assurent que $\alpha > 0$. Enfin, la relation qui suit est classique:

$$|e^{ix.y} - e^{ix.z}| \leq c|y-z|^\lambda |x|^\lambda \quad (\lambda < 1 \text{ et } x, y, z \in \mathbb{R}^d). \tag{26}$$

Le lemme provient alors des relations (24), (25) et (26), après de nombreux calculs, et la constante c qui apparait dans l'énonçé du lemme ne dépend que de α ∎

On peut facilement étendre ce lemme. Dans la mesure où cette extension ne posera pas de problèmes, nous nous plaçerons par la suite dans la situation du lemme 2.2.7 qui suit au lieu de celle du lemme 2.2.6. Appelons $\check{Q}^{(q)}$ la mesure de probabilité

$$\check{Q}^{(q)} = \frac{Q|_{[-q,q]^d}}{Q([-q,q]^d)}.$$

Soit l'hypothèse:

- **H(d)** : Il existe q tel que $R^+(\check{Q}^{(q)}) = \mathbb{Z}^d$.

Remarque Lorsque Q est une mesure telle que, pour un certain q, $\check{Q}^{(q)}$ est centrée et $\sum(\check{Q}^{(q)})$ engendre $\mathbb{Z}^d$, alors H(d) est satisfaite.

Lemme 2.2.7 *Sous H(d), les conclusions du lemme 2.2.6 sont vraies.*

PREUVE : On pose $X_k^{(q)} = X_k I_{\{|X_k|\leq q\}}$, $S_n^{(q)} = \sum_{k=1}^n X_k^{(q)}$ et

$$\alpha_d^{(n),q}(x,\mathcal{P}) = \frac{1}{n^{(4-d)/2}} \sum_{j=\underline{a}}^{\overline{a}} \sum_{l=\underline{b}}^{\overline{b}} I_{\{S_l^{(q)} - S_j^{(q)} = x\}}.$$

L'hypothèse H(d) entraîne la relation (25) d'après les explications qui précèdent cette inégalité. On peut donc se servir du lemme 2.2.6 après avoir noté que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$:

$$||\alpha_d^{(n)}(x,\mathcal{P}) - \alpha_d^{(n)}(y,\mathcal{P})||_{L^p} \leq \liminf_{q\to\infty} ||\alpha_d^{(n),q}(x,\mathcal{P}) - \alpha_d^{(n),q}(y,\mathcal{P})||_{L^p}.$$

Or, pour tout q, il existe une constante $c^{(q)}$ telle que

$$||\alpha_d^{(n),q}(x,\mathcal{P}) - \alpha_d^{(n),q}(y,\mathcal{P})||_{L^p} \leq \frac{c^{(q)}}{n^{(4-d)/2}} |x-y|^\lambda (\overline{a}-\underline{a})^{(4-d-\lambda)/4} (\overline{b}-\underline{b})^{(4-d-\lambda)/4}$$

où, comme dans la preuve du lemme 2.2.6, $c^{(q)}$ ne dépend que de la valeur de $\alpha^{(q)} = \min(2\pi^{-1}\alpha_1^{(q)}, \min_{\pi\geq|\theta|\geq\pi(L^{(q)})^{-1}}(1-\phi^{(q)}(\theta))L^{(q)})$ si $\alpha_1^{(q)}$ est la plus petite valeur propre de la matrice $2\int x.x^T d\check{Q}^{(q)}(x)$, $\phi^{(q)}$ est la transformée de Fourier de $\check{Q}^{(q)} * \check{Q}_-^{(q)}$ (avec

$\check{Q}_-^{(q)}(x) = \check{Q}^{(q)}(-x))$ et $L^{(q)}$ est le plus grand des vecteurs linéairement indépendants $a_1^{(q)}, \cdots, a_d^{(q)}$ dans $\sum(\check{Q}^{(q)} * \check{Q}_-^{(q)})$. Maintenant, la limite c de $c^{(q)}$ est finie et strictement positive car $\alpha_1^{(q)}$ tend vers la plus petite valeur propre de la matrice $2\int x.x^T dQ(x)$ ■

2.3 Cas du mouvement brownien plan

On suppose ici que $(S_n)_n$ est valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et que W est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Comme en 2.1, nous noterons $\gamma(x, \mathcal{C}_t)$ le temps local d'intersection renormalisé du mouvement brownien W et $\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], \mathcal{C}_{[nt]})$ celui de $(S_n)_n$ (définitions 1.2.1 et 2.1.2). Enonçons notre principal résultat:

Théorème 2.3.1 *Sous H(2), la suite de processus* $(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], \mathcal{C}_{[nt]}))_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^2}$ *converge en loi vers le processus* $(\gamma(x, \mathcal{C}_t))_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^2}$.

Le lemme suivant, que nous montrerons après la preuve du théorème 2.3.1, est particulièrement important:

Lemme 2.3.2 *Supposons que H(2) est vérifié et donnons-nous un entier pair p. Il existe une constante c telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $s \leq t \leq T$ *et* $\lambda < 1$*:*

$$||\gamma^{(n)}(x, \mathcal{C}_{[nt]}) - \gamma^{(n)}(y, \mathcal{C}_{[ns]})||_{L^p} \leq c\Big(\big(\frac{|x-y|}{\sqrt{n}}\big)^\lambda + \frac{\sqrt{[nt]-[ns]}}{\sqrt{n}}\Big)$$
$$||\gamma^{(n)}(x, \mathcal{C}_{[nt]})||_{L^p} \leq c.$$

PREUVE DU THEOREME 2.3.1 : Dans ce qui suit, c désignera une constante positive qui pourra varier d'une ligne à l'autre. Donnons-nous une fonction f différentiable à support compact, de différentielle bornée et d'intégrale 1. Si $(\theta(n))_n$ est une suite tendant vers l'infini, désignons par $(f_{\theta(n)})_n$ la suite de fonctions : $f_{\theta(n)}(y) = \theta(n)^2 f(\theta(n)(y-x))$ (x étant un point de $\mathbb{R}^2$ fixé). Pour tout $t \leq T$, d'après le corollaire 1.2.3:

$$\int f_{\theta(n)}(y)\gamma(y, \mathcal{C}_t)dy \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(P)} \gamma(x, \mathcal{C}_t).$$

D'autre part, d'après la proposition 1.1.2 (on rappelle que, si $X \in L^1(P)$, $\overline{X} = X - E[X]$):

$$\int f_{\theta(n)}(y)\gamma(y, \mathcal{C}_t)dy = \int_{\mathcal{C}_t} \overline{f_{\theta(n)}}(W_v - W_u)dudv.$$

Soit (A, D) un couple qui vérifie $\Gamma = ADA^T$, D étant une matrice diagonale. Pour tout k, la variable aléatoire bi-dimensionnelle $\widetilde{X}_k$ égale à $A^T X_k$ a une matrice de covariance égale à D. Appelons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \widetilde{X}_k = A^T S_n$. Introduisons de même le mouvement brownien $\widetilde{W} = A^T W$. On a:

$$\pi\Big(\int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}(W_v - W_u)dudv, \int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}\Big(\frac{S_{[nv]} - S_{[nu]}}{\sqrt{n}}\Big)dudv\Big)$$

$$= \pi\Big(\int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}(A(\widetilde{W}_v - \widetilde{W}_u))dudv, \int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}\Big(A\frac{\widetilde{S}_{[nv]} - \widetilde{S}_{[nu]}}{\sqrt{n}}\Big)dudv\Big)$$

où π désigne une distance métrisant la convergence en loi des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons plonger le processus $(\widetilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq T}$ dans le mouvement brownien $(\widetilde{W}_t)_{t\leq T}$ selon la procédure du lemme 2.2.2. Reprenons des notations similaires à celles du lemme 2.2.3. Pour tout $t \leq T$, les variables

$$\int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}(A(\widetilde{W}_v - \widetilde{W}_u))dudv \text{ et } \int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}(A(\widetilde{W}_{T_{[nv]}} - \widetilde{W}_{T_{[nu]}}))dudv$$

ont même limite au sens $L^1(P)$ ce qui est une conséquence directe du lemme 2.2.3 et des hypothèses formulées pour f. Ceci est vrai lorsque, par exemple,

$$\theta(n) = \big(E[\sup_{t\leq T}|\widetilde{W}_{T_{[nt]}} - \widetilde{W}_t|] + E[\sup_{t\leq T}|\overline{\phi}_{[nt]}|] + n^{-1/2}\big)^{-1/6}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{C_t} \overline{f_{\theta(n)}}\Big(\frac{S_{[nv]} - S_{[nu]}}{\sqrt{n}}\Big)dudv &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{[nt]-1}\sum_{l=j+1}^{[nt]} \overline{f_{\theta(n)}}\Big(\frac{S_l - S_j}{\sqrt{n}}\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{y\in\mathbb{Z}^2} f_{\theta(n)}(\frac{y}{\sqrt{n}})\gamma^{(n)}(y, C_{[nt]}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\theta(n)}(\frac{[y\sqrt{n}]}{\sqrt{n}})\gamma^{(n)}([y\sqrt{n}], C_{[nt]})dy \\
&= \theta(n)^2 \int_{\mathbb{R}^2} f(\theta(n)(\frac{[y\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} - x))\gamma^{(n)}([y\sqrt{n}], C_{[nt]})dy.
\end{aligned}$$

Cette quantité est asymptotiquement égale, dans $L^1(P)$, à

$$\theta(n)^2 \int_{\mathbb{R}^2} f(\theta(n)(y - x))\gamma^{(n)}([y\sqrt{n}], C_{[nt]})dy$$

car $\theta(n)^2|\theta(n)([y\sqrt{n}]/\sqrt{n} - x) - \theta(n)(y - x)| \leq \theta(n)^3\sqrt{2}/\sqrt{n}$ qui tend vers 0 pour certaines suites $(\theta(n))_n$ - notamment pour celle indiquée plus haut - et, d'autre part, quelque soit z élément de $\mathbb{Z}^2$, d'après le lemme 2.3.2:

$$E[|\gamma^{(n)}(z, C_{[nt]})|] \leq c,$$

cette constante ne dépendant que de T. D'autre part:

$$E[|\int_{\mathbb{R}^2} f_{\theta(n)}(\frac{[y\sqrt{n}]}{\sqrt{n}})\gamma^{(n)}([y\sqrt{n}], C_{[nt]})dy - \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\gamma^{(n)}([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + x\sqrt{n}], C_{[nt]})dy|]$$

$$\leq c\,\frac{\theta(n)^3}{\sqrt{n}}.$$

Par suite, d'après notre choix pour $(\theta(n))_n$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y)\gamma^{(n)}([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + x\sqrt{n}], C_{[nt]})dy \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \gamma(x, \mathcal{C}_t).$$

Il reste à montrer que $\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]})$ et $\int f(y)\gamma^{(n)}([y\sqrt{n}/\theta(n)+x\sqrt{n}], C_{[nt]})dy$ ont même limite en loi. Nous avons, d'après le lemme 2.3.2:

$$E\left[\left(\int f(y)\gamma^{(n)}([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + x\sqrt{n}], C_{[nt]})dy - \gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]})\right)^2\right]$$

$$\leq c\int_{\mathrm{supp} f} E\left[\left(\gamma^{(n)}([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + x\sqrt{n}], C_{[nt]}) - \gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]})\right)^2\right] dy \leq \frac{c}{\theta(n)}.$$

Ceci montre finalement que nous avons obtenu, à t et x fixés, la convergence en loi:

$$\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \gamma(x, \mathcal{C}_t).$$

Il est clair que la méthode que nous venons d'exposer s'applique aussi bien à la convergence des répartitions fini-dimensionnelles de $(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^2}$ vers celles de $(\gamma(x, \mathcal{C}_t))_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^2}$. Il reste à obtenir un résultat de tension pour cette suite de processus. Nous n'allons montrer que la tension de la suite des lois de $(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{t\leq T}$ à x fixé. Pour la tension de la suite $(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^2}$, on procède de la même manière.

Prenons $t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$ et $n \geq 1$. En utilisant le lemme 2.3.2, on remarque que

$$E\left[\left(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}) - \gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt_1]})\right)^2 \left(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}) - \gamma^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt_2]})\right)^2\right]$$

$$\leq c\,\frac{[nt]-[nt_1]}{n}\,\frac{[nt_2]-[nt]}{n} \leq c\left(\frac{[nt_2]-[nt_1]}{n}\right)^2.$$

Deux cas se présentent:

- Si $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{n}$ alors $[nt_2] - [nt_1] \leq 2(nt_2 - nt_1)$

- Si $t_2 - t_1 < \frac{1}{n}$ alors, t_1 et t ou t_2 et t sont dans le même intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[$ et le membre de gauche est nul.

Globalement,

$$E\Big[(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}],C_{[nt]})-\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}],C_{[nt_1]}))^2(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}],C_{[nt]})-\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}],C_{[nt_2]}))^2\Big]$$
$$\leq c\,(t_2-t_1)^2$$

ce qui, d'après le théorème 15.6 de Billingsley [Bi], montre la tension de la suite des processus $(\gamma^{(n)}([x\sqrt{n}],C_{[nt]}))_{t\leq T}$, et termine la preuve du théorème 2.3.1 ∎

Il reste à montrer le lemme 2.3.2.

PREUVE DU LEMME 2.3.2 : Nous ne montrerons que la première inégalité. Il suffit de prouver que

$$\text{i) } \|\gamma^{(n)}(x,C_{[nt]})-\gamma^{(n)}(y,C_{[nt]})\|_{L^p}\leq c(\frac{|x-y|}{\sqrt{n}})^{\lambda}$$
$$\text{ii) } \|\gamma^{(n)}(x,C_{[nt]})-\gamma^{(n)}(x,C_{[ns]})\|_{L^p}\leq c\sqrt{\frac{[nt]-[ns]}{n}}.$$

Dans ce qui suit, c désignera une constante qui pourra varier de place en place.

i) La preuve qui suit est une version discrète de la preuve utilisée par Le Gall dans le cas brownien et exposée en 1.2. On introduit "l'équivalent" discret de la partition du paragraphe 1.2:

$$A^{\xi}_{\eta}=\{(j,l)\in C_{[nt]}\ :\ \exists j_0,l_0<2^{\kappa-\xi-1},\ j=\eta 2^{\kappa-\xi}+j_0,\ l=(\eta+\frac{1}{2})2^{\kappa-\xi}+l_0\},$$

où $\kappa=\min\{i\ :\ 2^i>[nt]\}$. Les A^{ξ}_{η} sont disjoints et

$$C_{[nt]}=\bigcup_{\xi=0}^{\kappa-1}\bigcup_{\eta=0}^{2^{\xi}-1}A^{\xi}_{\eta}\ \text{ donc }\ \gamma^{(n)}(x,C_{[nt]})=\sum_{\xi=0}^{\kappa-1}\sum_{\eta=0}^{2^{\xi}-1}\overline{\alpha}^{(n)}_2(x,A^{\xi}_{\eta}),$$

où comme d'habitude, $\overline{X}=X-E[X]$. D'autre part, les variables aléatoires $(\alpha^{(n)}_2(x,A^{\xi}_{\eta}))_{\eta}$ étant indépendantes, la partie i) sera une conséquence directe du lemme, figurant dans Westwater ([Wes], lemme 5):

Lemme 2.3.3 *Soit $(U_i)_i$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que pour tout entier i $\|U_i\|_{L^p}\leq k_2p^{k_1}$ où p est un entier pair quelconque. Alors,*

$$\|\sum_{i=1}^{n}\overline{U}_i\|_{L^p}\leq 2k_2p^{k_1+1/2}\sqrt{n}\ \textit{ pour tout } n.$$

Tenant compte du lemme 2.2.7, le lemme 2.3.3 nous donne:

$$\begin{aligned}||\gamma^{(n)}(x,C_{[nt]})-\gamma^{(n)}(y,C_{[nt]})||_{L^p} &\leq c\sum_{\xi=0}^{\kappa-1}||\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}(\overline{\alpha}_2^{(n)}(x,A_\eta^\xi)-\overline{\alpha}_2^{(n)}(y,A_\eta^\xi))||_{L^p}\\ &\leq c\frac{|x-y|^\lambda}{n}2^{\kappa(1-\lambda/2)}\leq c(\frac{|x-y|}{\sqrt{n}})^\lambda.\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}\gamma^{(n)}(x,C_{[nt]}) &= \gamma^{(n)}(x,C_{[ns]})+\overline{\alpha}_2^{(n)}(x,\{0,\cdots,[ns]-1\}\times\{[ns]+1,\cdots,[nt]\})\\ &+\frac{1}{n}\sum_{j=[ns]}^{[nt]-1}\sum_{l=j+1}^{[nt]}\overline{I_{\{S_l-S_j=x\}}}.\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2.2.7,

$$\begin{aligned}||\alpha_2^{(n)}(x,\{0,\cdots,[ns]-1\}\times\{[ns]+1,\cdots,[nt]\})||_{L^p} &\leq c\,\frac{\sqrt{[ns]([nt]-[ns])}}{n}\\ &\leq c\sqrt{\frac{[nt]-[ns]}{n}}.\end{aligned}$$

Réutilisons la partition $(A_\eta^\xi)_{\eta,\xi}$ avec $\kappa=\min\{i\ :\ 2^i>[nt]-[ns]\}$ et notons $P^{(n)}(\eta,\xi))=\{[ns]+\eta 2^{\kappa-\xi},\cdots,[ns]+\eta 2^{\kappa-\xi}+2^{\kappa-\xi-1}-1\}\times\{[ns]+\eta 2^{\kappa-\xi}+2^{\kappa-\xi-1},\cdots,[ns]+\eta 2^{\kappa-\xi}+2^{\kappa-\xi}-1\}$. Il vient,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=[ns]}^{[nt]-1}\sum_{l=j+1}^{[nt]}\overline{I_{\{S_l-S_j=x\}}} &= \frac{1}{n}\sum_{\xi=0}^{\kappa-1}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\sum_{(j,l)\in A_\eta^\xi}\overline{I_{\{S_{l+[ns]}-S_{j+[ns]}=x\}}}\\ &=\sum_{\xi=0}^{\kappa-1}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\overline{\alpha}_2^{(n)}(x,P^{(n)}(\eta,\xi)).\end{aligned}$$

Or,

$$||\alpha_2^{(n)}(x,P^{(n)}(\eta,\xi))||_{L^p}\leq c\,\frac{2^{\kappa-\xi}}{n}\leq c\,\frac{[nt]-[ns]}{n}2^{-\xi}.$$

Par indépendance des variables $(\overline{\alpha}_2^{(n)}(x,P^{(n)}(\eta,\xi)))_\eta$, le lemme 2.3.3 implique que

$$||\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\overline{\alpha}_2^{(n)}(x,P^{(n)}(\eta,\xi))||_{L^p}\leq c\,\frac{[nt]-[ns]}{n}2^{-\frac{\xi}{2}}.$$

Par suite

$$||\frac{1}{n}\sum_{j=[ns]}^{[nt]-1}\sum_{l=j+1}^{[nt]}\overline{I_{\{S_l-S_j=x\}}}||_{L^p}\leq c\,\frac{[nt]-[ns]}{n}\sum_{\xi=1}^{\kappa-1}2^{-\frac{\xi}{2}}\leq c\,\frac{[nt]-[ns]}{n},$$

d'où le ii) ■

Remarque Cette méthode permet d'estimer facilement la distance de Lévy-Prokhorov π entre $(\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}))_{t\leq T}$ et $(\gamma(0, \mathcal{C}_t))_{t\leq T}$. En utilisant la technique de plongement et l'inégalité exponentielle du lemme 1 de Haeusler [Ha], on obtient:

$$\pi((\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}))_{t\leq T}, (\gamma(0, \mathcal{C}_t))_{t\leq T}) = \mathcal{O}(n^{-1/25}).$$

2.4 Cas du mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$

Comme dans les parties précédentes, on notera $\alpha_d(x, .)$ le temps local d'intersection de W au point $x \in \mathbb{R}^d$, et $\alpha_d^{(n)}(x, .)$ celui de S_n au point $x \in \mathbb{Z}^d$ (voir définitions 1.1.4 et 2.1.1).

Le résultat principal de cette partie est le suivant:

Théorème 2.4.1 *On suppose que H(d) est vérifié dans chacune des trois assertions suivantes.*

i) $(\alpha_1^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{x\in\mathbb{R}, t\leq T} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\alpha_1(x, \mathcal{C}_t))_{x\in\mathbb{R}, t\leq T}$

ii) Si K est un compact de $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas l'origine :

$(\alpha_2^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{x\in K, t\leq T} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\alpha_2(x, \mathcal{C}_t))_{x\in K, t\leq T}$

iii) Si $x \neq 0$:

$(\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{t\leq T} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\alpha_3(x, \mathcal{C}_t))_{t\leq T}.$

Ce théorème repose pour beaucoup sur le lemme suivant, que nous montrerons après la preuve du théorème 2.4.1. Soit $(A_\eta^\xi(t))_{\eta,\xi}$ la partition de $C_{[nt]}$ introduite au cours de la preuve du lemme 2.3.2, avec $\kappa(t) = \min\{i \ : \ 2^i > [nt]\}$.

Lemme 2.4.2 *Soit $x \neq 0$. Sous H(d), on a:*

$$E[\sup_{t\leq T} \alpha_d^{(n)}([x\sqrt{n}], \bigcup_{\xi=p}^{\kappa(t)-1} \bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} A_\eta^\xi(t))] \leq a_{n,p} + b_n, \text{ avec } \sup_n a_{n,p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \text{ et } b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

PREUVE DU THEOREME 2.4.1 : Le i) s'obtient en utilisant la méthode de la preuve du théorème 2.3.1 puisque, notamment, $\alpha_1(0, \mathcal{C}_t) < \infty$ $P-ps$ pour tout $t \leq T$. Le ii) est une conséquence simple du théorème 2.3.1. Il nous suffit donc de montrer iii).

Réintroduisant la partition $(\mathcal{A}_\eta^\xi(t))_{\eta,\xi}$ de $\mathcal{C}_t$ définie en 1.2, on peut montrer comme dans la preuve du théorème 2.3.1 que pour tout $p \geq 1$:

$$(\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], A_\eta^\xi(t));\ \xi \leq p, \eta \leq 2^\xi - 1)_{t\leq T} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\alpha_3(x, \mathcal{A}_\eta^\xi(t));\ \xi \leq p, \eta \leq 2^\xi - 1)_{t\leq T}.$$

Par suite,

$$(\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], \bigcup_{\xi=0}^{p}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} A_\eta^\xi(t)))_{t\leq T} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\alpha_3(x, \bigcup_{\xi=0}^{p}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} \mathcal{A}_\eta^\xi(t)))_{t\leq T}.$$

Désignant par π la distance de Lévy-Prokhorov (voir I.1.3), on a

$$\begin{aligned}
&\pi((\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{t\leq T}, (\alpha_3(x, \mathcal{C}_t))_{t\leq T}) \\
&\leq \pi((\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_{t\leq T}, (\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], \bigcup_{\xi=p}^{\kappa(t)-1}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} A_\eta^\xi(t))_{t\leq T}) \\
&+ \pi((\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], \bigcup_{\xi=p}^{\kappa(t)-1}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} A_\eta^\xi(t))_{t\leq T}, (\alpha_3(x, \bigcup_{\xi=p}^{\kappa(t)-1}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} \mathcal{A}_\eta^\xi(t))_{t\leq T}) \\
&+ \pi((\alpha_3(x, \bigcup_{\xi=p}^{\kappa(t)-1}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} \mathcal{A}_\eta^\xi(t))_{t\leq T}, (\alpha_3(x, \mathcal{C}_t))_{t\leq T}).
\end{aligned}$$

On fait tendre n vers l'infini, puis p vers l'infini. Les deux premiers termes s'annulent d'après ce que nous venons de voir pour le deuxième terme, et d'après le lemme 2.4.2 et le lemme I.1.3.2 pour le premier terme. Le troisième terme lui aussi s'annulle si p tend vers l'infini, ce que l'on montre plus facilement que pour le lemme 2.4.2 ∎

Afin de montrer le lemme 2.4.2, nous devons rappeler quelques notions classiques sur les marches aléatoires.

Définition 2.4.3 *Soit $\mathcal{M}$ une probabilité sur un groupe additif R. On dit que la marche aléatoire engendrée par $\mathcal{M}$ et de distribution initiale δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est fortement apériodique sur R si, pour tout $x \in R$, le plus petit sous-groupe de R qui contient $x + \sum(\mathcal{M})$ est R.*

Nous allons nous servir du théorème central limite local. Rappelons dans un premier temps son énoncé (Spitzer [Sp], P7.10):

Lemme 2.4.4 *Soit $(S_n)_n$ $(S_0 = 0)$ une marche aléatoire fortement apériodique sur un groupe R, centrée, avec $\mathrm{cov}(S_1) = \Gamma$. On a pour tout $x \in R$:*

i) Si $x \neq 0$, $$P(S_n = x) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}}\frac{1}{\det\Gamma^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2n}x^T.\Gamma^{-1}.x) + \frac{1}{|x|^2}n^{1-d/2}E_1(n,x)$$

ii) $$P(S_n = x) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}}\frac{1}{\det\Gamma^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2n}x^T.\Gamma^{-1}.x) + n^{-d/2}E_2(n,x),$$

où les $E_i(n,x)$ sont tels que $\sup_x |E_i(n,x)| \longrightarrow 0$ si n tend vers l'infini.

Sous H(d), la marche aléatoire $(S_n)_n$ du paragraphe 2.1 n'est pas, en général, fortement apériodique sur $\mathbb{Z}^d$. Nous allons donc montrer le renforcement suivant:

Lemme 2.4.5 *Supposons que H(d) est vérifié et donnons-nous un $x \in \mathbb{Z}^d$. Il existe un entier $s \geq 1$ indépendant de x et un entier $l = l(x) \in \{0, \cdots, l-1\}$ avec:*

$$i)\ Si\ x \neq 0,\ P(S_{ns+l} = x) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} \frac{1}{\det\Gamma^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2n} x^T.\Gamma^{-1}.x) + \frac{1}{|x|^2} n^{1-d/2} E_1(n,x)$$

$$ii)\ P(S_{ns+l} = x) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} \frac{1}{\det\Gamma^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2n} x^T.\Gamma^{-1}.x) + n^{-d/2} E_2(n,x),$$

les restes $E_i(n,x)$ vérifiant $\sup_x |E_i(n,x)| \longrightarrow 0$ si n tend vers l'infini. D'autre part, si p n'est pas de la forme $ns+l$, $P(S_p = x) = 0$.

PREUVE : Sous H(d), on a $R^+(Q) = \mathbb{Z}^d$. En particulier, il existe un entier s (la période de $(S_n)_n$) tel que

$$s = \text{pgcd}\{n \ : \ Q^{*n}(0) > 0\}.$$

Deux cas se présentent : $s = 1$ ou $s > 1$. Si $s = 1$, nous allons voir que cela entraine l'apériodicité forte de la marche aléatoire $(S_n)_n$ sur $\mathbb{Z}^d$. Le lemme 2.4.5 est alors une conséquence directe du lemme 2.4.4. Montrons donc que $(S_n)_n$ est fortement apériodique (Spitzer [Sp], P5.1). On prend x et y dans $\mathbb{Z}^d$: il faut prouver que y est dans le groupe engendré par $x + \sum(Q)$. De $s = 1$, on tire que $Q^{*n}(0) > 0$ pour $n \geq N$. D'autre part, il existe m tel que $Q^{*m}(y) > 0$, et donc $Q^{*n}(y) > 0$ pour tout $n \geq m + N$. Alors, on peut trouver des nombres $\sigma_i \in \sum(Q)$, $i = 1, \cdots, 2n$ avec

$$y = \sigma_1 + \cdots \sigma_n \text{ et } 0 = -\sigma_{n+1} - \cdots - \sigma_{2n}.$$

Le nombre y peut donc se représenter comme

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x + \sigma_i) - \sum_{i=1}^{n} (x + \sigma_{i+n}),$$

et il est donc dans le groupe engendré par $x + \sum(Q)$.

On supposera désormais que $s \geq 2$. Introduisons les ensembles $R_l^+(Q)$ pour $l \in \{0, \cdots, s-1\}$ définis par

$$R_l^+(Q) = \{x \in \mathbb{Z}^d \ : \ \exists n \ Q^{*(ns+l)}(x) > 0\}.$$

Ces ensembles sont des copies distinctes telles que

$$\mathbb{Z}^d = R^+(Q) = \bigcup_{l=0}^{s-1} R_l^+(Q). \tag{27}$$

La relation (27) est classique et facile à retrouver. On montre maintenant que $(S_{ns})_n$ est fortement apériodique sur $R_0^+(Q)$. En premier lieu, nous allons voir que $R_0^+(Q)$ est un groupe. Soit $x \in \mathbb{R}_0^+(Q)$: il existe n tel que $Q^{*(ns)}(x) > 0$. Alors, si s ne divise pas p, $Q^{*p}(-x) = 0$ car $Q^{*(ns+p)}(0) \geq Q^{*p}(-x)Q^{*(ns)}(x)$. Par suite, $Q^{*p}(-x) > 0$ entraine que s divise p et on conclut de l'égalité $R^+(Q) = \mathbb{Z}^d$ que $-x \in R_0^+(Q)$: $R_0^+(Q)$ est un groupe. D'autre part, la marche aléatoire $(S_{ns})_n$ est la marche aléatoire engendrée par Q^{*s} de distribution initiale δ_0. En outre, sa période est

$$\text{pgcd}\{n \ : \ Q^{*(ns)}(0) > 0\} = 1,$$

et on est donc ramené au cas $s = 1$.

Lorsque $l \in \{1, \cdots, s-1\}$, on doit comprendre $(S_{ns+l})_n$ comme étant la marche aléatoire engendrée par Q^{*s} de distribution initiale Q^{*l}. Les ensembles $(R_l^+(Q))_l$ étant des copies distinctes, on en déduit que la marche aléatoire $(S_{ns+l})_n$ sur $R_l^+(Q)$ se comporte comme $(S_{ns})_n$ sur $R_0^+(Q)$. En particulier, elle est fortement apériodique sur $R_l^+(Q)$ et le lemme 2.4.5 est alors une conséquence de (27) et du lemme 2.4.4 ∎

PREUVE DU LEMME 2.4.2 : On a pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sup_{t\leq T}\sum_{\xi\geq p}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], A_\eta^\xi(t)) &\leq \sup_{t\leq T}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{[nt]-1}\sum_{j=i}^{[i+[nt]2^{-p}]} I_{\{S_j-S_i=[x\sqrt{n}]\}}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{[nT]-1}\sum_{j=i}^{[i+[nT]2^{-p}]} I_{\{S_j-S_i=[x\sqrt{n}]\}}.\end{aligned}$$

Donc, c désignant une constante qui pourra varier de place en place:

$$E[\sup_{t\leq T}\sum_{\xi\geq p}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\alpha_3^{(n)}([x\sqrt{n}], A_\eta^\xi(t))] \leq c\sqrt{n}\sum_{j=1}^{[[nT]2^{-p}]+1} P(S_j = [x\sqrt{n}]).$$

D'après le lemme 2.4.5 i), on doit estimer deux quantités. Tout d'abord, la première quantité est majorée par

$$b_n := \frac{\sqrt{n}}{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}\sum_{j=1}^{[nT]}\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_x |E_1(j,x)|.$$

Puisque

$$\sup_n \frac{\sqrt{n}}{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}\sum_{j=1}^{[nT]}\frac{1}{\sqrt{j}} < \infty \text{ et } \sup_x |E_1(j,x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

b_n vérifie bien la condition annoncée. La deuxième quantité qui apparaît est:

$$c\sqrt{n}\sum_{j=1}^{[[nT]2^{-p}]+1}\frac{1}{j^{3/2}}\exp(-\frac{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}{2j}).$$

La fonction

$$y \mapsto \frac{1}{y^{3/2}} \exp(-\frac{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}{2y})$$

est croissante sur $]0, [x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]/3]$. Par suite, en prenant un p assez grand, on a pour cette deuxième quantité la majoration:

$$\begin{aligned}
& c\sqrt{n} \int_0^{nT2^{-p}+1} \frac{1}{y^{3/2}} \exp(-\frac{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}{2y}) dy \\
\leq\ & c\frac{\sqrt{n}}{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]} \int_{\frac{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}{nT2^{-p}+1}}^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}} dy \\
\leq\ & c\frac{\sqrt{n}}{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]} \Big(\frac{nT2^{-p}+1}{[x\sqrt{n}]^T.\Gamma^{-1}.[x\sqrt{n}]}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

La suite $a_{n,p}$ du lemme 2.4.2 est celle qui apparaît dans la dernière inégalité, et elle vérifie la propriété annoncée ∎

Il reste encore un problème à propos de la convergence de la suite $(\alpha_d([x\sqrt{n}], C_{[nt]}))_t$. Comme nous l'avons dit en 1.1, $\alpha_3(0, \mathcal{C}_t) = +\infty$ $P-ps$. Or, contrairement à ce qui se passe en dimension 2, il n'existe pas en dimension 3 de méthode pour donner un sens à $\alpha_3(0, \mathcal{C}_t)$. Cependant, Yor [Y4] a montré que si $\Gamma = Id$

$$(\frac{2\pi}{|\log|x||}(\alpha_3(x, \mathcal{C}_t) - E[\alpha_3(x, \mathcal{C}_t)]))_t \xrightarrow[x\to 0]{\mathcal{L}} (\beta_t)_t,$$

où β désigne un mouvement brownien réel indépendant de W. On peut donc légitimement s'attendre à ce que la suite de processus

$$(\frac{1}{\log n}(\alpha_3^{(n)}(0, C_{[nt]}) - E[\alpha_3(0, C_{[nt]})]))_t$$

ait elle aussi un comportement asymptotique brownien. Nous n'avons pas réussi à montrer un tel résultat.

Il semble que la méthode naturelle pour y aboutir soit essentiellement basée sur le théorème de Lindeberg pour les tableaux triangulaires. On peut en effet montrer, comme Le Gall ([LG1], page 503) le fait avec le rang de la marche aléatoire, que l'objet en question se comporte en réalité comme une somme de variables aléatoires indépendantes. Le problème qui subsiste et que nous n'avons pas réussi à résoudre est l'estimation de la limite en n de la quantité

$$\frac{1}{\log n} \mathrm{var}(\alpha_3^{(n)}(0, C_{[nt]})).$$

2.5 Mesure de polymère associée au mouvement brownien plan

On considère ici que $(S_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et que W est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

On reprend les notations habituelles relatives aux temps locaux d'intersection et aux temps locaux d'intersection renormalisés pour $(S_n)_n$ et W. Nous avons vu dans le théorème 1.3.2 que la mesure de polymère associée au mouvement brownien plan s'écrit:

$$\mu(g,t)(d\omega) = \frac{1}{L_g}\exp(-g\gamma(0,\mathcal{C}_t))P(d\omega).$$

Compte tenu du théorème 2.3.1, on peut s'attendre à ce qu'une version discrète de cette mesure soit la mesure, dite de Domb-Joyce [DJ]:

$$\mu_n(g,t)(d\omega) = \frac{1}{L_g^{(n)}}\exp(-g\gamma^{(n)}(0,C_{[nt]}))P(d\omega).$$

Ce résultat va faire l'objet du théorème principal de ce paragraphe:

Théorème 2.5.1 *On suppose que H(2) est satisfait. Pour tout couple $(g,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mu_n(g,t)$ converge étroitement vers $\mu(g,t)$.*

Tout d'abord, nous avons un résultat d'uniforme intégrabilité:

Lemme 2.5.2 *On suppose que H(2) est satisfait. Pour tout couple $(g,t) \in \mathbb{R}_+^2$, il existe une constante $c(g,t)$ telle que*

$$\sup_n E[\exp(-g\gamma^{(n)}(0,C_{[nt]}))] \le c(g,t).$$

PREUVE DU THEOREME 2.5.1 : Soit A un ensemble de P-continuité. On a, d'après le théorème 2.3.1 et le lemme 2.5.2:

$$E[\exp(-g\gamma^{(n)}(0,C_{[nt]}))I_A] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} E[\exp(-g\gamma(0,\mathcal{C}_t))I_A],$$

ce qui prouve le théorème ∎

PREUVE DU LEMME 2.5.2 : Il s'agit en fait d'une version discrète de la méthode habituellement utilisée pour montrer que $\gamma(0,\mathcal{C}_t)$ admet des moments exponentiels (voir Varadhan [Va]).

On introduit encore la partition $(A_\eta^\xi)_{\eta,\xi}$ de $C_{[nt]}$, avec $\kappa = \min\{i \ : \ 2^i > [nt]\}$ (voir la preuve du lemme 2.3.2 i)). Notons pour $\xi \le \kappa - 1$, $\beta^{(n)}(\xi)$ la variable aléatoire

$$\beta^{(n)}(\xi) = \sum_{\eta=0}^{2^\xi-1} \alpha_2^{(n)}(0,A_\eta^\xi).$$

Pour une certaine constante c_1, on a d'après le lemme 2.2.7:

$$E[\beta^{(n)}(\xi)] \leq c_1 \sum_{\eta=0}^{2^\xi-1} \frac{2^{\kappa-\xi-1}}{n} \leq c_1 t.$$

Alors, pour tout $k \leq \kappa - 1$:

$$\begin{aligned} P(\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) \leq -2c_1 tk) &\leq P(\sum_{\xi=k}^{\kappa-1} \overline{\beta}^{(n)}(\xi) \leq -2c_1 tk + \sum_{\xi=0}^{k-1} E[\beta^{(n)}(\xi)]) \\ &\leq \frac{E[(\sum_{\xi=k}^{\kappa-1} \overline{\beta}^{(n)}(\xi))^2]}{(c_1 tk)^2} \leq \frac{(\sum_{\xi=k}^{\kappa-1} ||\overline{\beta}^{(n)}(\xi)||_{L^2})^2}{(c_1 tk)^2}. \end{aligned}$$

Or, puisque $||\alpha_2^{(n)}(0, A_\eta^\xi)||_{L^2} \leq c_1 t 2^{-\xi}$, le lemme 2.3.3 donne

$$||\overline{\beta}^{(n)}(\xi)||_{L^2} \leq c_2 t 2^{-\xi},$$

pour une certaine constante c_2. Ainsi,

$$P(\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) \leq -2c_1 tk) \leq \frac{c_2^2}{2^k k^2 (c_1(1-2^{-1/2}))^2}.$$

Posons $c_3 = c_2^2 (c_1(1-2^{-1/2}))^{-2}$. En utilisant le fait que

$$\Omega = \bigcup_{k\geq 1} \{-2c_1 t(k+1) < \gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) \leq -2c_1 tk\} \bigcup \{\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) > -2c_1 t\},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} E[\exp(-g\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}))] &\leq \exp(2gc_1 t)(1 + \sum_{k\geq 1} \exp(2gc_1 kt) P(\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) \leq -2c_1 tk)) \\ &\leq \exp(2gc_1 t)(1 + c_3 \sum_{k\geq 1} \frac{\exp(2gc_1 t - \log 2)k}{k^2}), \end{aligned}$$

et ce dernier terme est fini lorsque le couple (g, t) est tel que $gt \leq \log 2/(2c_1) = c_4$.

Etendons cette propriété à tout couple (g, t). Posons, pour $u \leq v$

$$\gamma_{u,v}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=[nu]}^{[nv]-1} \sum_{l=j+1}^{[nv]} \overline{I_{(S_l - S_j = 0)}}$$

(ce qui a été montré pour $\gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) = \gamma_{0,t}^{(n)}$ reste valable pour $\gamma_{u,v}^{(n)}$), et prenons un couple (g, t) tel que $gt/2 \leq c_4$. Nous avons

$$\begin{aligned} \gamma^{(n)}(0, C_{[nt]}) &= \gamma_{0,\frac{t}{2}}^{(n)} + \gamma_{\frac{t}{2},t}^{(n)} + \overline{\alpha}_2^{(n)}(0, \{0, \cdots, [\frac{nt}{2}] - 1\} \times \{[\frac{nt}{2}] + 1, \cdots, [nt]\}) \\ &\geq \gamma_{0,\frac{t}{2}}^{(n)} + \gamma_{\frac{t}{2},t}^{(n)} - E[\alpha_2^{(n)}(0, \{0, \cdots, [\frac{nt}{2}] - 1\} \times \{[\frac{nt}{2}] + 1, \cdots, [nt]\})], \end{aligned}$$

d'où

$$E[\exp(-g\gamma^{(n)}(0,C_{[nt]}))] \leq$$

$$E[\exp(-g\gamma^{(n)}_{0,\frac{t}{2}})]\, E[\exp(-g\gamma^{(n)}_{\frac{t}{2},t})]\exp(gE[\alpha_2^{(n)}(0,\{0,\cdots,[\frac{nt}{2}]-1\}\times\{[\frac{nt}{2}]+1,\cdots,[nt]\})])$$

qui est majoré par une constante indépendante de n car $gt/2 \leq c_4$. Ce procédé s'étend de façon évidente à tout couple (g,t) ■

REFERENCES

[BK] R.Bass, D.Khoshnevisan - *Intersection Local Times and Tanaka Formulas*, Ann. Inst. H.Poincaré, vol. 29 no 3, (1993), p.419-451.

[Bi] P.Billingsley - **Convergence of Probability Measure**, Wiley and Sons, New-York, (1968).

[Bor] A.N.Borodin - *On the Asymptotic Behavior of Local Times of recurrent Random Walks with finite variance*, Theory Prob. Appl., vol. XXVI no 4, (1981), p.758-772.

[DJ] C.Domb, G.S.Joyce - *Cluster Expansion for a Polymer Chain*, J.Phys. C5, (1975), p.956-976.

[DEK] A.Dvoretzky, P.Erdös, S.Kakutani - *Double points of paths of Brownian motion in n-space*, Acta Sci. Math. Szeged, vol. 12, (1950), p.75-81.

[Ed] S.F.Edwards - *The Statistical Mechanics of Polymers with excluded volume*, Proc. Phys. Sci., vol. 85, (1965), p.613-624.

[GHR] D.Geman, J.Horowitz, J.Rosen - *The Local Time of Intersection for Brownian paths in the plane*, Ann. Prob., vol. 12, (1984), p.86-107.

[Ha] E.Haeusler - *An exact rate of Convergence in the Functional Limit Theorem for special Martingale Difference array*, Z. Wahrs. verw Gebiete, vol. 65, (1984), p.523-534.

[Ku] S.Kusuoka - *Asymptotics of the Polymer Measure in one dimension*, Infinite Dimensional Analysis and Stochastic Processes, Albeverio (ed.), Boston, (1985), p.66-82.

[LG1] J.F.Le Gall - *Propriétés d'intersection des marches aléatoires : convergence vers le temps local d'intersection*, Comm. Math. Phys., vol. 104, (1986), p.471-507.

[LG2] J.F.Le Gall - *Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien*, Ann. Prob., vol. 14, (1986), p.1219-1244.

[LG3] J.F.Le Gall - *Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan, et la méthode de renormalisation de Varadhan*, Sém. Prob. XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, (1985), p.314-331.

[Pe] E.Perkins - *Weak Invariance Principles for Local Time*, Z. Wahrs. verw Gebiete, vol. 60, (1982), p.437-451.

[ReY] D.Revuz, M.Yor - **Continuous Martingales and Brownian motion**, Springer-Verlag, Berlin, (1991).

[R1] J.Rosen - *A Local Time approach to the self-intersection of Brownian motion paths in space*, Comm. Math. Phys., vol. 88, (1983), p.327-338.

[R2] J.Rosen - *A Renormalized Local Time for multiple intersection of planar Brownian motion*, Sém. Prob. XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer, Berlin, (1986), p.515-531.

[R3] J.Rosen - *Random Walks and Intersection Local Time*, Ann. Prob., vol. 18 no 3, (1990), p.959-977.

[R4] J.Rosen - *Tanaka's Formula for Multiple Intersection of Planar Brownian motion*, Stoch. Proc. Appl., vol. 23, (1986), p.131-141.

[RY] J.Rosen, M.Yor - *Tanaka Formulae and renormalization for triple intersection of Brownian motion in the plane*, Ann. Prob., vol. 19 no 1, (1991), p.142-159.

[Sp] F.Spitzer - **Principle of Random Walks**, Van Nostrand, Princeton, New-York, (1964).

[St] A.Stoll - *Invariance Principle for Brownian Intersection Local Time and Polymer Measures*, Math. Scand., vol. 64, (1989), p.133-160.

[Va] S.R.S.Varadhan - **Appendix to Euclidean Quantum Field Theory**, by K.Symanzik, in **Local Quantum Theory**, R.Jost (Ed.), Academic Press, New-York, (1969).

[Wei] S.Weinryb - *Asymptotic results for Independent Wiener Sausages. Application to generalized Intersection Local Times*, Stochastic, vol. 27, (1989), p.99-127.

[Wes] J.Westwater - *On Edward's Model for Long Polymer Chain*, Comm. Math. Phys, vol. 72, (1980), p.131-174.

[Y1] M.Yor - *Compléments aux formules de Tanaka-Rosen*, Sém. Prob. XIX, Lect. Notes in Math. vol. 1123, Springer, Berlin, (1985), p.332-349.

[Y2] M.Yor - *Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^2$, Sém. Prob. XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer, Berlin, (1986), p.532-542.

[Y3] M.Yor - *Sur la représentation comme intégrale stochastique du temps d'occupation du mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^d$, Sém. Prob. XX, Lect. Notes in math., vol. 1204, Springer, Berlin, (1986), p.543-552.

[Y4] M.Yor - *Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^3$, Sém. Prob. XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, (1985), p.350-365.