

RAYMOND VIARD

**Calcul de Malliavin et développement asymptotique de la densité
d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-48

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994__2_A10_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Calcul de Malliavin et développement asymptotique de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov

Raymond Viard

IRMAR, UNIVERSITE DE RENNES I, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES.

Résumé : On considère, une famille paramétrée de chaînes de Markov de paramètre ε , d - dimensionnelles admettant une probabilité invariante η^ε , telle que η^ε converge en loi vers la masse de Dirac en 0 lorsque ε tend vers 0. On donne au moyen du calcul de Malliavin, des conditions permettant un développement asymptotique de la densité f^ε de la probabilité invariante η^ε de la forme :

$$f^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-\frac{I(y)}{2\varepsilon^2}} \{c_0(y) + \varepsilon c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N c_N(y) + \varepsilon^{N+1} R(\varepsilon, y)\}.$$

Mots clés : Calcul de Malliavin, Chaîne de Markov, Grandes Déviations, équations aux différences aléatoire.

Malliavin calculus and asymptotic expanding for the density of a Markov chain invariant probability

Abstract : We consider a parametrized family of $\mathbb{R}^d$ -valued Markov chains with parameter ε , with an invariant probability η^ε . Suppose that η^ε converges in distribution to the Dirac measure if ε tends to 0. Using Malliavin calculus, we give sufficient conditions to obtain an asymptotic expansion for the density f^ε of the invariant probability η^ε , namely :

$$f^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-\frac{I(y)}{2\varepsilon^2}} \{c_0(y) + \varepsilon c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N c_N(y) + \varepsilon^{N+1} R(\varepsilon, y)\}.$$

Key words : Malliavin Calculus, Markov Chain, Large deviations, stochastic difference equations.

1. Introduction

1.1. Notations et résultats généraux

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On considère sur cet espace, une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^\beta$, de même loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance la matrice identité sur $\mathbb{R}^\beta$, notée $\lambda = \mathcal{N}(0, I_\beta)$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta \rightarrow \mathbb{R}^d$ mesurable. On considère la famille de chaînes de Markov $((X_n^\varepsilon)_{n \geq 0})_{\varepsilon > 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$(1) \quad \begin{cases} X_0^\varepsilon = x, \text{ où } x \in \mathbb{R}^d \\ \text{et, pour } n \geq 1 \\ X_n^\varepsilon = \varphi(X_{n-1}^\varepsilon, \varepsilon Z_n) = \varphi_n(x, \varepsilon Z_1, \dots, \varepsilon Z_n) \end{cases}$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}^\beta$ on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, z_1) := \varphi(x, z_1) \\ \text{et, pour } n \geq 2 \\ \varphi_n(x, z_1, \dots, z_n) := \varphi(\varphi_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}), z_n), \end{cases}$$

on notera $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov partant de 0.

Définition 1.1. Nous dirons que la famille de variable aléatoire $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, suit un principe de grande déviation (voir par exemple M.I.Freidlin et

A.D.Wentzell [4] ou D.W.Stroock [16] ou encore Y.Kifer [7]) de fonction d'action (ou fonction d'énergie) I si la fonction I vérifie les 2 propriétés suivantes :

1. $I : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction semi-continue inférieurement, telle que pour tout $a \geq 0$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : I(x) \leq a\}$ est compact dans $\mathbb{R}^d$.

2. I est telle que:

(a) Si O est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ alors :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log P[Y^\varepsilon \in O] \geq -\inf\{I(x) : x \in O\}.$$

(b) Si F est un fermé de $\mathbb{R}^d$ alors :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log P[Y^\varepsilon \in F] \leq -\inf\{I(x) : x \in F\}$$

Remarque :

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, lorsque φ est continue, la famille $(X_n^\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ suit un principe de grande déviation en ε , de fonction d'action $I_n/2$ définie, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, par :

$$(2) \quad I_n(y) = \inf_{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{\beta \times n}} \left\{ \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 : \varphi_n(0, z_1, \dots, z_n) = y \right\}$$

Notons, lorsqu'elle existe, η^ε la probabilité invariante associée à la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous donnons, au moyen du calcul de Malliavin et par des passages à la limite en loi, des conditions impliquant que la probabilité η^ε possède une densité f^ε que l'on peut développer en ε jusqu'à l'ordre N en un point y_0 du support de η^ε pour ε suffisamment proche de zéro.

On considère les hypothèses suivantes :

(H.1.(k)) On suppose que $\varphi(0, 0) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta, \\ \sup_{x, z} \|D_x \varphi(x, z)\| = \delta < 1 \\ \text{et } \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leq p + q \leq k, \text{ on ait} \\ \sup_{x, z} \|D_{x^p z^q}^{p+q} \varphi(x, z)\| < +\infty. \end{array} \right.$$

- (C) Sous l'hypothèse $(H_1(1))$ on suppose que $D_x\varphi$ est inversible sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta$ et qu'on a $\sup_{x,z} \|(D_x\varphi(x,z))^{-1}\| < +\infty$, on posera $b = \sup_{x,z} \|(D_x\varphi(x,z))^{-1}\|$ et $\gamma := 1/b$.

Soient y_0 un point de $\mathbb{R}^d$ et n_0 un entier

- (H.2) si pour $n \geq n_0$ $I_n(y_0)$ est fini alors il existe un unique point $(z_1^n, \dots, z_n^n)$ de $\mathbb{R}^{\beta \times n}$ vérifiant

$$\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n) = y \text{ et } I_n(y) = \sum_{i=1}^n \|z_i^n\|_\beta^2.$$

- (H.3) sous l'hypothèse (H.2) pour tout $n \geq n_0$ il existe un réel c_0 strictement positif tel que

$$|\det U_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)| \geq c_0$$

Remarque : Pour tout $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^\beta$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ on définit la matrice $d \times d$ de type positif $U_n(x, z_1, \dots, z_n)$ par:

$$\begin{aligned} U_n(x, z_1, \dots, z_n) &= D_{z_1, \dots, z_n} \varphi_n(x, z_1, \dots, z_n) (D_{z_1, \dots, z_n} \varphi_n(x, z_1, \dots, z_n))^T \\ &= D_z \varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \dots, z_{n-1}), z_n) (D_z \varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \dots, z_{n-1}), z_n))^T \\ &\quad + D_x \varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \dots, z_{n-1}), z_n) U_{n-1}(x, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ &\quad \cdot (D_x \varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \dots, z_{n-1}), z_n))^T \end{aligned}$$

(3)

Remarque : On notera

$$D\varphi_n(x, z_1, \dots, z_n) := D_{z_1, \dots, z_n} \varphi_n(x, z_1, \dots, z_n).$$

Si $(H.1.(1))$, est vérifiée ainsi que (C), on pose :

$$(4) \quad C(x, z) := (D_x \varphi(x, z))^{-1} \cdot D_z \varphi(x, z) \times (D_z \varphi(x, z))^T \cdot (D_x \varphi(x, z))^{-1, T},$$

(A^T : transposée de A).

Si, de plus (H.2) est vérifiée on pose, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$(5) \quad C_i^n(x, z) = C(x, z + z_i^n).$$

- (B.1) soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$, d'énergie $I(y_0) < r$, soit $n_1 \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe un entier $n_0 > n_1$ et une constante strictement positive c_1 , dépendants de y_0 , tels que :

$$\alpha_\varepsilon := \sup_{n \geq N_0} \sup_{0 \leq i \leq n - N_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T \cdot C_i^n(x, \varepsilon z) \cdot y \leq c_1 \|y\|^2\}) < 1.$$

(6)

En posant $z_0^n := 0$ pour tout $n \geq n_0$.

- (B.2) Il existe une constante c_2 strictement positive telle que, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^d$:

$$y^T \cdot U_1(x, 0) \cdot y \geq c_2 \|y\|^2.$$

Remarques :

1. L' hypothèse (H.1.(1)) entraîne l'existence, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, une probabilité invariante (voir l'annexe) notée η^ε .
2. L'hypothèse (H.1.(1)) entraîne l'unicité de la probabilité invariante η^ε pour la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, en considérant $X_n^\varepsilon(x) - X_n^\varepsilon$ (où $X_n^\varepsilon(x)$ est la chaîne de Markov, associée à (1), partant de x dans $\mathbb{R}^d$), on obtient, avec $\sup_{x,z} \|D_x \varphi(x, z)\| < 1$ que $X_n^\varepsilon(x)$ converge aussi en loi, quand $n \rightarrow +\infty$, vers X_∞^ε . D'où le résultat.
3. 0 est attracteur global pour le système dynamique $\varphi_n(., 0, 0, \dots, 0)$ associé à la famille de chaîne de Markov $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. En effet, sous l'hypothèse $\sup_{x,z} \|D_x \varphi(x, z)\| = \delta < 1$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|\varphi_n(x, 0, \dots, 0)\| \leq \delta^n \|x\|$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x, 0, \dots, 0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
4. $I(x)$ est limite décroissante des $I_n(x)$, donc si $I(x) < r$ alors il existe un entier $n_0(x)$ a partir duquel pour tout $n \geq n_0(x)$ on ait $I_n < r$.

En posant $I(x) = \inf_{n \geq 1} I_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Les remarques 1, 2 et 3 nous permettent d'énoncer un lemme analogue au théorème 4.3, chap 4, de M.I.Freidlin et A.D.Wendzell [4].

Lemme 1.2. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble régulier de frontière $\partial A (= \overline{A} - A)$ compacte . Nous avons :

$$(7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \eta^\varepsilon(A) = -\inf\{I(x), x \in A\}.$$

A est un ensemble régulier si $\inf\{I(x), x \in \overline{A}\} = \inf\{I(x), x \in \text{int}(A)\}$, où $\text{int}(A)$ désigne l'intérieur de A .

Théorème 1.3. Sous les hypothèses (H.1.(2)), (B.1), et (C) si $\alpha_\varepsilon < \gamma^{4d}$ alors la probabilité invariante η^ε possède une densité f^ε par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Preuve : voir le corollaire 7.5..

Remarque : Comme dans [3] ou [5] on peut obtenir des conditions entraînant l'existence, pour la probabilité invariante η^ε , d'une densité f^ε de classe C^p .

Théorème 1.4. *Sous les hypothèses (H.1.(2N+5)), (H.2), (B.1), (C) et si il existe un réel $\epsilon_N > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_N$ $\alpha_\epsilon < \gamma^{2d_{q_0}(N+2)}$ (où q_0 est défini dans la proposition 3.1.), alors :*

a) *la probabilité invariante η_ϵ admet une densité notée f_ϵ ,*

b) *et f_ϵ admet un développement asymptotique en ϵ , en tout point $y \in \mathbb{R}^d$ d'énergie $I(y) < r$ (r est défini dans la proposition 3.1.), jusqu'à l'ordre N de la forme :*

$$(8) \quad f_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon^d} \cdot e^{-\frac{I(y)}{2\epsilon^2}} \cdot (c_0(y) + \epsilon \cdot c_1(y) + \dots + \epsilon^N \cdot c_N(y) + \epsilon^{N+1} \cdot R_{N+1}(\epsilon, y))$$

, avec $R_{N+1}(\epsilon, y)$ borné en ϵ . $\square$

Preuve : voir le théorème 6.3. ainsi que les corollaires 7.5. et 7.6..

Proposition 1.5. *Les hypothèses (H.1.(1)), (H.2) et (C) ainsi que la condition (B.2) entraînent d'une part les hypothèses (H.3) et (B.1), d'autre part pour tout $p > 1$ il existe un réel $\epsilon_p > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_p$ on ait $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dp}$ (où α_ϵ est défini dans l'hypothèse (B.1)).*

Preuve : 1) La condition (B.2) implique l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in B(0, \eta)$ (où $B(0, \eta)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon η) et tout $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$y^T \cdot U_1(x, z) \cdot y \geq c_2 \|y\|^2 / 2.$$

D'autre part si $I(y) < r$ alors il existe un entier $n_0(y)$ tel que pour tout $n \geq n_0(y)$ $I_n(y) = \sum_{i=1}^n \|z_i^n\|^2 < r$, donc il existe au plus $K(< [r/\eta^2]$, où $[.]$ désigne la partie entière d'un nombre réel) points (z_i^n) à l'extérieure de $B(0, \eta)$. Dans le pire des cas, d'après l'expression de la matrice de Malliavin déterministe (cf l'égalité 3), on obtient pour tout $n \geq \sup(n_0(y), K)$

$$\|U_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)\| \geq c_0 \quad \text{avec, } c_0 := \gamma^{K-1} c_2 / 2.$$

D'où l'hypothèse (H.3).

2) D'après la proposition 2.2. pour tout $n \geq n_0$ il existe une unique constante $\lambda_n \in \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$2 \cdot z_i^n = -\lambda_n^T \cdot D_x \varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n) \cdots D_x \varphi(\varphi_{i+1}^n, z_{i+1}^n) D_z \varphi(0, z_i^n) = 0.$$

D'où $\|z_i^n\| \leq \|\lambda_n\| \delta^{n-i} K / 2$ où $K := \sup_{x, z} \|D_z \varphi(x, z)\| < +\infty$, de plus la remarque fondamentale 25 nous dit que $\|\lambda_n\| \leq 2\sqrt{r/c_0}$.

Ainsi il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n - n_1$ $\|z_i^n\| \leq \eta/2$ il suffit de prendre $n_1 > \log(\eta\sqrt{c_0}/2K\sqrt{r})/\log \delta$.

Sous les hypothèses (H.2) et (C) posons :

$$\alpha_\epsilon := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{y \in \mathbb{R}^d / \{0\}} \sup_{n \geq n_0} \sup_{1 \leq i \leq n - n_1} \lambda(\{Z : y^T C_i^n(x, \epsilon Z + z_i^n) y \leq c_1 \|y\|^2\}),$$

où $c_1 < \gamma^2 c/2$.

D'après ce qui précède $\alpha_\epsilon \leq P[\|\epsilon Z\| \geq \eta/2] \leq \exp(-\eta^2/8\epsilon^2)$. Donc $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dp}$ (voir le théorème 1.4.) dès que $\epsilon < \sqrt{\eta^2/16dp \ln(b)}$.

Corollaire 1.6. *Lorsque les hypothèses (H.1.(2n + 5)), (H.2), (C) et (B.2) sont vérifiées alors pour ϵ suffisamment proche de 0 :*

a) *la probabilité invariante η^ϵ possède une densité notée f^ϵ ,*

b) *de plus f^ϵ admet un développement asymptotique en ϵ , en tout point $y \in \mathbb{R}^d$ d'énergie $I(y) < r$ (avec r défini dans la proposition 3.1.), jusqu'à l'ordre N de la forme :*

$$(9) \quad f_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon^d} \cdot e^{-\frac{I(y)}{2\epsilon^2}} \cdot (c_0(y) + \epsilon \cdot c_1(y) + \cdots + \epsilon^N \cdot c_N(y) + \epsilon^{N+1} \cdot R_{N+1}(\epsilon, y))$$

, avec $R_{N+1}(\epsilon, y)$ borné en ϵ . $\square$

1.2. Applications :

1.2.1. Equations aux différences aléatoires :

On considère le cas particulier de (1) suivant.

$$\varphi(x, z) = A(z)x + B(z),$$

avec $A : \mathbb{R}^\beta \rightarrow M(d)$, $B : \mathbb{R}^\beta \rightarrow \mathbb{R}^d$ et A, B mesurables.

[$M(d)$ désigne l'espace des matrices $d \times d$ à coefficients réels].

(1) s'écrit alors , pour tout $\epsilon > 0$:

$$(10) \quad \begin{cases} X_0^\epsilon = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1 \\ X_n^\epsilon = A(\epsilon Z_n) X_{n-1}^\epsilon + B(\epsilon Z_n) \end{cases}$$

(10) est une "équation aux différences aléatoires" et il s'agit du cas où il y a indépendance : la suite de variables aléatoires, à valeurs dans $M(d) \times \mathbb{R}^d$,

$(A(\varepsilon Z_n), B(\varepsilon Z_n))_{n \geq 1}$ est formée, pour chaque $\varepsilon > 0$, de termes indépendants (et de même loi). (pour une étude plus détaillée de (10), voir A.K.Grintsevicius [6] et W.Versaat [14]; voir E.Le Page [9] par exemple dans le cas général).

Considérons les hypothèses suivantes : $(H'.1.(k))$ On suppose que $B(0) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} A, B \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^\beta \text{ avec,} \\ \sup_z \|A(z)\| = \delta < 1 \\ \text{et } \forall p \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leq p \leq k, \text{ on ait} \\ \sup_z \|D_{z^p}^p A(z)\| < +\infty \\ \sup_{x,z} \|D_{z^p}^p A(z).x + D_{z^p}^p B(z)\| < +\infty. \end{array} \right.$$

La condition (C) devient ici :

(C) $A(z)$ est inversible en tout point z de $\mathbb{R}^\beta$. Et on a :

$$\sup_z \|A(z)^{-1}\| = b < +\infty. \text{ On notera aussi } \gamma := 1/b \leq \delta < 1.$$

$$C(x, z) := A(z)^{-1}(D_z A(z).x + D_z B(z))(D_z A(z).x + D_z B(z))^T A(z)^{-1,T}.$$

$(B'.2)$ On a : $D_z A(0) = 0$ et $D_z B(0).D_z^T B(0) \neq 0$.

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.7. *Sous les hypothèses $(H'.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(B'.2)$, et (C) pour $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, la probabilité invariante η^ε a une densité f^ε admettant un développement asymptotique en ε , en un point y d'énergie $I(y) < r$, jusqu'à l'ordre N de la forme suivante:*

$$(11) \quad f^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot e^{-\frac{I(y)}{2\varepsilon^2}} \cdot (c_0(y) + \varepsilon \cdot c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N \cdot c_N(y) + \varepsilon^{N+1} \cdot R_{N+1}(\varepsilon, y)),$$

avec $R_{N+1}(\varepsilon, y)$ borné en ε .

1.2.2. Application à certains processus de sauts.

On se donne une famille de processus Markovien de sauts $(Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, admettant une probabilité invariante η^ε , pour tout $\varepsilon > 0$, solution d'une équation stochastique de la forme :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_0^\varepsilon = x \\ \text{et, pour } t > 0, \\ Y_t^\varepsilon = x + (c(Y_-^\varepsilon) * \mu^\varepsilon)_t \end{array} \right.$$

avec $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta \rightarrow \mathbb{R}^d$, et avec $(\mu^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ famille de mesures de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^\beta$ de compensateur $\nu^\varepsilon(dt \times dz) = \varepsilon dt \times \lambda(\frac{dz}{\varepsilon})$ où,

$$\lambda(dz) = (\sqrt{2\pi})^d e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} dz.$$

Si on lui associe l'application :

$$\varphi(x, z) = x + c(x, z)$$

on alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.8. *Sous les hypothèses (H.1(2N+5)), (H.2), (B.1), et (C) pour $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, η^ε possède une densité f^ε admettant un développement asymptotique en ε , en un point y_0 d'énergie $I(y_0) < r$, jusqu'à l'ordre N de la forme suivante:*

$$(13) \quad f^\varepsilon(y_0) = \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot e^{-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2}} \cdot (c_0 + \varepsilon \cdot c_1 + \dots + \varepsilon^N \cdot c_N + \varepsilon^{N+1} \cdot R_{N+1}(\varepsilon)),$$

avec $R_{N+1}(\varepsilon)$ borné en ε

Preuve :

On associe au processus de sauts Y^ε la chaîne de Markov X^ε solution de (1) et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $X_n^\varepsilon = Y_{T_n^\varepsilon}^\varepsilon$, où T_n^ε est le n-ième temps de saut de μ^ε . Il est alors facile de voir que η^ε est aussi la probabilité invariante de la chaîne de Markov X^ε . D'où le résultat demandé. ■

1.3. Rappels sur le calcul de Malliavin:

Pour commencer rappelons deux résultats classiques qui sont à la base de l'étude de la régularité de la densité des lois étudiées par la calcul de Malliavin (Voir ; 1) ii) s'obtient au moyen de la transformation de Fourier, 2) et 1) i) par la théorie des distributions).

Lemme 1.9. *Soit $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d}$ une variable d - dimensionnelle. On a d'une part :*

1. si $n \geq 1$ et s'il existe $C_n > 0$ tel que, pour toute $f \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$, tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq n$, on ait :

$$(14) \quad |\mathbb{E}[D_{x^\alpha}^\alpha f(\Phi)]| \leq C_n \cdot \|f\|_\infty,$$

alors:

(i) si $n = 1$, la loi de Φ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$,

(ii) si $n \geq d + 1$, la loi de Φ a une densité de classe C^{n-d-1} .

D'autre part on a :

2. si $n \geq 1$ et si, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq n$, il existe une variable aléatoire réelle $\Psi_\alpha \in \mathbb{L}^{d+\varepsilon}(P)$ pour un $\varepsilon > 0$, telle que, pour toute $f \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$, on ait :

$$(15) \quad \mathbb{E}[D_x^\alpha f(\Phi)] = \mathbb{E}[f(\Phi) \cdot \Psi_\alpha],$$

alors la loi de Φ a une densité de classe C^{n-1} .

□

On note, pour $i \geq 1$ et $n \geq 1$, $\mathcal{R}_i(n)$ la classe des variables aléatoires réelles Φ de la forme $\Phi = F(Z_1, \dots, Z_n)$ avec $F : \mathbb{R}^{\beta \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}_b^i$ (ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}_b^i$ bornée ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre i). On définit également $\mathcal{R}_i$ par $\mathcal{R}_i = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}_i(n)$.

$\mathcal{R}_i$ est stable par $\mathcal{C}_p^i$ (l'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^i$ à croissance polynômiale ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre i). Sous l'hypothèse $(H_1(2))$, $X_n^{\varepsilon, j}$, j -ième composante de X_n^ε , est un élément de $\mathcal{R}_2$ (pour tout $j = 1, \dots, d$). On définit l'opérateur L par la formule :

$$(16) \quad L(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta_{z_i} F(Z_1, \dots, Z_n) + (D_{z_i} F(Z_1, \dots, Z_n))^T,$$

où $\Phi = F(Z_1, \dots, Z_n)$ ($\Delta_{z_i} F$ désigne le Laplacien de l'application $Z_i \rightarrow F(Z_1, \dots, Z_n)$).

On définit de même sur $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1$ l'opérateur bilinéaire associé :

$$(17) \quad \Gamma(\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^n D_{z_i} F(Z_1, \dots, Z_n) (D_{z_i} G(Z_1, \dots, Z_n))^T,$$

où $\Phi = F(Z_1, \dots, Z_n)$ et $\Psi = G(Z_1, \dots, Z_n)$. Γ est appelé "l'opérateur carré du champ" associé à L . On a alors, si L est l'opérateur linéaire introduit précédemment (sur $\mathcal{R}_2$) et si Γ est son opérateur carré du champ, la formule d'intégration par parties suivante :

$$(18) \quad \begin{cases} \text{Si } \Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (\mathcal{R}_2)^d, \Psi \in \mathcal{R}_1 \text{ et } f \in C_p^1(\mathbb{R}^d), \text{ on a,} \\ \text{pour } j = 1, \dots, d : \\ \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi) \cdot \Gamma(\Phi^i, \Phi^j)) \cdot \Psi] = -\mathbb{E}[f(\Phi) \cdot \{2\Psi \cdot L\Phi^j + \Gamma(\Psi, \Phi^j)\}] \end{cases}$$

En notant, pour $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (\mathcal{R}_2)^d$, $U(\Phi) = (\Gamma(\Phi^i, \Phi^j))_{i, j \leq d} = \Gamma(\Phi, \Phi)$, on obtient alors le résultat suivant :

Proposition 1.10. Si $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (\mathcal{R}_2)^d$, $\Theta_n \in \mathcal{R}_1(n)$ et $f \in \mathcal{C}_p^1(\mathbb{R}^d)$, on a, pour $i = 1, \dots, d$ et l entier ≥ 0 :

$$(19) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi) \cdot (\det(U(\Phi)))^{l+2} \cdot \Theta_n \right] \\ &= \mathbb{E} [f(\Phi) \cdot (\det(U(\Phi)))^l \cdot H^i(U(\Phi), L(\Phi), \Gamma(U(\Phi), \Phi), \Gamma(\Theta_n, \Phi))]. \end{aligned}$$

Avec $H^i : M(d) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}_3(d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C_p^∞ . ($\det(M)$ désigne le déterminant de la matrice carrée M et $\mathcal{T}_3(d)$ l'ensemble des tableaux à trois indices $T = (t_{i,j,k})_{i,j,k \leq d}$. $M(d)$ désigne l'ensemble des matrices $d \times d$ à coefficients réels

Notons, pour tout $\varepsilon \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_1^n(\varepsilon) = \int_0^1 D\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n) dt.$$

Remarque :

1. Pour $\varepsilon = 0$, la matrice de Malliavin $\Gamma(R_1^n(0), R_1^n(0))$ est déterministe et vaut :

$$(20) \quad \Gamma(R_1^n(0), R_1^n(0)) = \Gamma((R_1^n(0))^i, (R_1^n(0))^j) = U_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)$$

On la notera U_n , avec $U_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)$ définie page 4. De plus, sous l'hypothèse (B1) avec $I(y_0) < r$, pour n suffisamment grand cette matrice est inversible.

2. Pour $\varepsilon > 0$ la matrice de Malliavin vaut :

$$\Gamma(R_1^n(\varepsilon), R_1^n(\varepsilon)) = U_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \varepsilon Z_2 + z_2^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n).$$

On la notera $U_n(\varepsilon)$. De plus, si l'on note, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$U_i^{n,\varepsilon} := U_i(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \varepsilon Z_2 + z_2^n, \dots, \varepsilon Z_i + z_i^n)$$

en particulier $U_n^{n,\varepsilon} = U_n(\varepsilon)$ et l'on a :

$$(21) \quad \begin{aligned} U_i^{n,\varepsilon} &= D_z \varphi(\varphi_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i + z_i^n) (D_z \varphi(\varphi_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i + z_i^n))^T \\ &+ D_x \varphi(\varphi_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i + z_i^n) U_{i-1}^n(x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) (D_x \varphi(\varphi_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i + z_i^n))^T \end{aligned}$$

, avec $\varphi_i^{n,\varepsilon} = \varphi_i(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \varepsilon Z_2 + z_2^n, \dots, \varepsilon Z_i + z_i^n)$, pour $i \geq 1$ et $\varphi_0^{n,\varepsilon} = 0$ pour $i = 0$.

2. Présentation du problème :

A partir de maintenant nous considérons la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ partant de 0. Nous allons, avant de développer formellement la densité f^ε au point y_0 , dans un premier temps faire apparaître les termes $1/\varepsilon^d$ et $\exp(-I_n(y_0)/2\varepsilon^2)$. Rappelons, tout d'abord, que si η^ε admet une densité f^ε nous avons alors sous l'hypothèse (H.1.(1)) l'égalité suivante (voir le lemme A1. de l'annexe) :

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(y_0) &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g_\nu(X_n^\varepsilon - y_0)] \\ (22) \quad &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} g_\nu(x - y_0) \cdot \eta^\varepsilon(dx) \end{aligned}$$

où $(g_\nu)_{\nu \geq 0}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$) convergent vers la masse de Dirac en zéro au sens des distributions.

Remarques :

- 1) On peut aussi considérer la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon(x))_{n \geq 0}$ partant de $x \in \mathbb{R}^d$.
- 2) Dans l'annexe on montre, sous l'hypothèse (H.1.(1)), en utilisant le théorème de Inonescu-Tulcea-Marinescu, outre l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante l'égalité suivante (voir le lemme A.1) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n^\varepsilon)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \eta^\varepsilon(dx),$$

ceci pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Soit g une fonction appartenant à $\mathcal{C}_K^\infty$ allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, posons

$g_\nu(x) = \nu^d g(x/\nu)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout réel $\nu > 0$. Alors la famille de fonctions $(g_\nu)_{\nu > 0}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}_K^\infty$ et vérifie $\lim_{\nu \rightarrow 0} g_\nu = \delta_0$ au sens des distributions.

Recentrons la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ autour du point extrémal de l'hypothèse (H.2).

Proposition 2.1. *Pour toute fonction g mesurable on a l'égalité suivante :*

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] = e^{-\frac{I_n(y_0)}{2\varepsilon^2}} \cdot \mathbb{E}[g(\frac{\varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n) - y_0}{\varepsilon})] \cdot \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n Z_i^T \cdot z_i^n)]$$

Démonstration : En effet, $\mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] =$

$$\int_{\mathbf{R}^{\beta \times n}} g\left(\frac{\varphi_n(0, \varepsilon z_1, \dots, \varepsilon z_n) - y_0}{\varepsilon}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2\right) \cdot dz_1 \cdots dz_n$$

En posant pour tout $1 \leq i \leq n$, $z'_i = z_i - \frac{z_i^n}{\varepsilon}$ on obtient :

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] = \int_{\mathbf{R}^{\beta \times n}} g\left(\frac{\varphi_n(0, \varepsilon z'_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon z'_n + z_n^n) - y_0}{\varepsilon}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \|z'_i + \frac{z_i^n}{\varepsilon}\|^2\right) \cdot dz'_1 \cdots dz'_n$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] &= e^{-\frac{I_n(y_0)}{2\varepsilon^2}} \int_{\mathbf{R}^{\beta \times n}} g\left(\frac{\varphi_n(0, \varepsilon z'_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon z'_n + z_n^n) - y_0}{\varepsilon}\right) \\ &\quad \exp\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{\|z'_i\|^2}{2} + \frac{z_i'^T \cdot z_i^n}{\varepsilon}\right)\right) \cdot dz'_1 \cdots dz'_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lors de cette transformation de Girsanov, il apparait une terme de dérive en $1/\varepsilon$ que nous devons transformer pour pouvoir le contrôler lorsque l'on fait tendre ε vers 0.

Proposition 2.2. *Si l'on suppose que $I_{n_0}(y_0) < r$. Alors, sous les hypothèses (H.1.(1)),*

(H.2) et (H.3), pour tout $n \geq n_0$, il existe une constante $\lambda_n \in \mathbb{R}^d$, fonction du point extremal $(z_1^n, \dots, z_n^n)$, telle que :

$$(23) \quad \sum_{i=1}^n Z_i^T \cdot z_i^n = -\frac{1}{2} \lambda_n^T \cdot D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n),$$

où $D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n) =$

$$D_z \varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n)(Z_n) + \cdots + D_x \varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n) \cdots D_x \varphi(\varphi_2^n, z_2^n) D_z \varphi(0, z_1^n),$$

si l'on note, pour tout entier $1 \leq i \leq n$ $\varphi_i^n := \varphi_i(0, z_1^n, \dots, z_i^n)$.

Démonstration : Le calcul du point extremal $(z_1^n, \dots, z_n^n)$ est un problème d'extrema liés. On est amené à minimiser le Lagrangien suivant :

$$(24) \quad \mathcal{L}_n((z_1, \dots, z_n), \lambda_0, \lambda_n) = \lambda_0 \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 + \lambda_n^T \cdot (\varphi_n(0, z_1, \dots, z_n) - y_0).$$

Comme, pour $n \geq n_0$, $\det[(D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n))^T D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)]$ est différent de 0, on peut poser $\lambda_0 = 1$, de plus λ_n est unique. (voir l'hypothèse (H.3)).

Pour que $(z_1^n, \dots, z_n^n)$ soit un point extremal on a pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial z_i}((z_1^n, \dots, z_n^n), 1, \lambda_n) = 0$$

C'est à dire,

$$2 \cdot z_n^n + \lambda_n^T \cdot D_z \varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n) = 0.$$

.

.

.

$$2 \cdot z_1^n + \lambda_n^T \cdot D_x \varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n) \cdots D_x \varphi(\varphi_2^n, z_2^n) D_z \varphi(0, z_1^n) = 0.$$

D'où, le résultat. ■

Remarque fondamentale : D'après la démonstration précédente, pour $n \geq n_0$, on a:

$$4 \sum_{i=1}^n \|z_i^n\|^2 = (\lambda_n)^T (D\varphi_n(O, z_1^n, \dots, z_n^n))^T D_n \varphi(O, z_1^n, \dots, z_n^n) \lambda_n.$$

On en déduit, d'après les hypothèses (B), (C) et l'expression de $D\varphi_n$ en fonction de $D_x \varphi$ et de $D_z \varphi$:

$$(25) \quad r > I_n(y_0) = \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \geq \frac{c\gamma^2}{4} \|\lambda_n\|^2,$$

Lorsque $I_n(y_0) < r$.

On montre ainsi que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ est bornée en norme dans $\mathbb{R}^d$. On peut donc trouver une sous suite $(\theta_0(n))_{n \geq 0}$ telle que $\lambda_{\theta_0(n)}$ converge dans $\mathbb{R}^d$ lorsque n tend vers l'infini.

Proposition 2.3. *Pour $n \geq N(y_0)$, sous les hypothèses précédentes on a l'égalité suivante :*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[g_\nu(X_n^\varepsilon - y_0)] = \frac{1}{\varepsilon^d} \exp\left(-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2}\right)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[g_\nu(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0) \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon^2} \lambda_n^T \cdot (\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n))\right)]$$

où, $\varphi_n^{n,\varepsilon} = \varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n)$.

Démonstration : Pour approcher la fonction δ_0 , on peut prendre une suite de fonctions $(g_\nu)_{\nu > 0}$ telle que g_ν soit C_b^∞ à support dans $B(0, r_\nu) \subset \mathbb{R}^d$, avec r_ν tendant vers 0 lorsque ν tend vers 0. Ainsi, en considérant l'ensemble A des ω de Ω vérifiant $\|\varphi_n^{n,\varepsilon}(\omega) - y_0\| \leq r_\nu$ (de probabilité 1), le terme ajouté est de l'ordre $\exp(-r_\nu \cdot \|\lambda_n\|/\varepsilon^2)$, il disparaît lorsque n tend vers l'infini puis ν vers 0. ■

Proposition 2.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, si y_0 est un point du support de η^ε , nous avons :*

$$(26) \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[g_\nu(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0) e^{\lambda_n^T R_2^n(\varepsilon)/2}] = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^d} \mathbb{E}[g_\nu(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon}) e^{\lambda_n^T R_2^n(\varepsilon)/2}],$$

en posant $R_2^n(\varepsilon) := (\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n))/\varepsilon^2$.

Démonstration : immédiate. ■

Nous pouvons maintenant effectuer un développement limité en ε jusqu'à l'ordre N , avec un reste intégral, du terme:

$$\mathbb{E}[g(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon}) \cdot \exp(\frac{-1}{2\varepsilon^2} \lambda_n^T (\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n)))].$$

Nous aurons besoin pour cela de quelques notations.

Notations 2.5. *On pose $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice de $\mathbb{R}^d$.*

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et $D_{x^\alpha}^\alpha g(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} g(x_1, \dots, x_d)$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^{|\alpha|}$ allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

2.6. *On note pour tout l (avec $1 \leq l \leq n$) et tout $\varepsilon \geq 0$:*

$$(27) \quad \begin{cases} D_l^0(n, \varepsilon) := \varphi_l(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_k + z_k^n), \\ D_l^1(n, \varepsilon) := D\varphi_l(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_l + z_l^n)(Z_1, \dots, Z_l) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{et, pour } k \geq 2 : \\ D_l^k(n, \varepsilon) := D^k \varphi_l(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_l + z_l^n)(Z_1, \dots, Z_l)^k \end{cases}$$

2.7. *Pour $\varepsilon \geq 0$, et tout l (avec $1 \leq l \leq n$) on note :*

$$(28) \quad \begin{cases} R_0^n(\varepsilon, l) := D_l^0(n, \varepsilon), \\ \text{et, pour } k \geq 1 : \\ R_k^n(\varepsilon, l) := \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D_l^k(n, \varepsilon t) dt. \end{cases}$$

2.8. Avec, en particulier pour $l = n$:

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} R_0^n(\varepsilon) := \varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n), \\ R_1^n(\varepsilon) := \int_0^1 D\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n) dt \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{et, pour } k \geq 2 : \\ R_k^n(\varepsilon) := \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D^k \varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n)^k dt, \end{array} \right.$$

et pour $\varepsilon = 0$:

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} R_0^n := y_0 \\ \dots \\ R_1^n := D\varphi_n(0, Z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n) \\ \text{et, pour } k \geq 2 : \\ R_k^n := \frac{1}{k!} D^k \varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n)^k. \end{array} \right.$$

Pour $k \geq 1$ les variables R_k^n sont des formes k -linéaires en $(Z_1, \dots, Z_n)$ donc de classe C^∞ en ces variables, de plus R_1^n est une variable aléatoire Gaussienne.

2.9. Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, et l ($1 \leq l \leq n$) on définit les ensembles suivants:

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_0^{k,\varepsilon}(n, l) := \left\{ \Gamma((R_1^n(\varepsilon, l))^{i_0}, (R_1^n(\varepsilon, l))^{i_1}); (R_2^n(\varepsilon, l))^{i_2}, \dots, (R_k^n(\varepsilon, l))^{i_k}, \right. \\ \quad \left. \text{avec } i_1, i_k \in \{1, \dots, d\} \right\}. \\ \mathcal{C}_1^{k,\varepsilon}(n, l) := \left\{ L(R_1^i(\varepsilon, l)), \Gamma((R_1^n(\varepsilon, l))^j, \Psi), \Psi \in \mathcal{C}_0^{k,\varepsilon}(n, l), i, j \in \{1, \dots, d\} \right\} \\ \cup \mathcal{C}_0^{k,\varepsilon}(n). \\ \text{et, pour } p \geq 2 : \\ \mathcal{C}_p^{k,\varepsilon}(n, l) := \left\{ L(R_1^i(\varepsilon)), \Gamma((R_1^n(\varepsilon, l))^j, \Psi), \Psi \in \mathcal{C}_{p-1}^{k,\varepsilon}(n, l), i, j \in \{1, \dots, d\} \right\} \\ \cup \mathcal{C}_{p-1}^{k,\varepsilon}(n, l). \end{array} \right.$$

2.10. Si $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n, l)$ est bien définie, on note $W_l^{\varepsilon,n}(k, j)$ la variable multidimensionnelle dont les composantes sont toutes les variables aléatoires réelles qui constituent $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n, l)$.

2.11. Lorsque $l = n$ on note $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n)$ l'espace correspondant et $W_n^{\varepsilon}(k, j)$ la variable multidimensionnelle (à valeurs dans un espace de dimension indépendante de n , notée $d(k, j)$) dont les composantes sont des éléments de $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n)$.

2.12. Enfin, les $P_{\alpha,j}^k$, pour $j \leq k$, seront des fonctions polynômiales, en les variables $W_n^{\varepsilon}(r, 0)$ et λ_n , à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

1) Sous les hypothèses (H.1.(N + 1)) et (H.2) on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n) = y_0 + \varepsilon R_1^n + \dots + \varepsilon^N R_N^n + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^n(\varepsilon).$$

2) Par construction $\mathcal{C}_i^{k,\varepsilon}(n) \subseteq \mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n)$ dès que $i \leq j$.

Proposition 2.13. *Sous l'hypothèse (H₁(N + 3)) on a, pour toute fonction g appartenant à $C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[g \left(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \left[\frac{-1}{2\varepsilon^2} \lambda_n^T \cdot (\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n)) \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[g(R_1^n(\varepsilon)) \cdot \exp \left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n(\varepsilon)}{2} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[g(R_1^n) \cdot \exp \left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2} \right) \right] + \varepsilon \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2} \right) \left\{ g(R_1^n) P_0^1(W_n(3, 0), \lambda_n) \right. \right. \\ (32) &+ \sum_{|\alpha|=1} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha,1}^1(W_n(2, 0), \lambda_n) \left. \right\} \right] + \dots + \\ & \frac{\varepsilon^N}{N!} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2} \right) \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha,k}^N(W_n(N+2-k, 0), \lambda_n) \right. \right. \\ &+ \sum_{k=\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor+1}^N \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha,k}^N(W_n(k+1, 0), \lambda_n) \left. \right\} \right] + \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!} R^{N+1}(n, \varepsilon), \end{aligned}$$

où, $R^{N+1}(n, \varepsilon)$ est le reste intégral du développement limité et vaut :

$$\begin{aligned} & R^{N+1}(n, \varepsilon) = \\ & \int_0^1 (1-t)^N \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^{n,\varepsilon t}}{2} \right) \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n,\varepsilon t}) P_{\alpha,k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(N+3-k, 0), \lambda_n) \right. \right. \\ &+ \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n,\varepsilon t}) P_{\alpha,k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(k+1, 0), \lambda_n) \left. \right\} \right] dt \\ (33) \end{aligned}$$

Démonstration : On effectue un développement limité, avec reste intégral, en ε , jusqu'à l'ordre N de la quantité :

$$g \left(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \left[\frac{-1}{2\varepsilon^2} \lambda_n^T \cdot (\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \dots, z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n)) \right].$$

Puis, on passe à l'espérance en permutant les deux intégrales au niveau du reste. ■

Pour pouvoir justifier le passage à la limite en n puis en ν , nous avons besoin de contrôler les termes intervenant dans le développement limité et dans le reste intégral.

3. contrôle

Commençons par contrôler le terme exponentiel.

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses (H.1.(3)), (H.2), (H.3), et (C) avec $I(y_0) < r$ (où $r = \frac{c\gamma^2}{\beta^2(K')^2(1+K')^4}$, où $K' = \frac{K}{1-\delta}$ avec*

$$K = \sup_{x,z} (||D_z\varphi(x,z)||, ||D_{z^2}^2\varphi(x,z)||, ||D_{x^2}^2\varphi(x,z)||, ||D_{x,z}^2\varphi(x,z)||) < \infty,$$

et $\delta = \sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)|| < 1$) alors il existe un entier $n(y_0) \geq n_0$, dépendant de y_0 , et un réel $p_0 > 1$ tel que:

$$(34) \quad \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \sup_{n \geq n(y_0)} \mathbb{E}[\exp(-\frac{p_0}{2} \lambda_n^T \cdot R_2^n(\varepsilon))] < \infty$$

Nous noterons q_0 le réel vérifiant $1/q_0 + 1/p_0 = 1$.

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(-\frac{p_0}{2} \lambda_n^T \cdot R_2^n(\varepsilon))] &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}[(\frac{p_0}{2} \lambda_n^T \cdot R_2^n(\varepsilon))^k] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{p_0 ||\lambda_n||}{2})^k \mathbb{E}[||R_2^n(\varepsilon)||^k] \end{aligned}$$

Il nous reste à majorer convenablement $\mathbb{E}[||R_2^n(\varepsilon)||^k]$.

Lorsque $\varepsilon \geq 0$:

$$R_2^n(\varepsilon) = \int_0^1 (1-t) D^2\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon t Z_n + z_n^n) (Z_1, \dots, Z_n)^2 dt.$$

d'où,

$$||R_2^n(\varepsilon)||_{\mathbf{L}^k} \leq \frac{1}{2} \cdot \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} ||D^2\varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n) (Z_1, \dots, Z_n)^2||_{\mathbf{L}^k}.$$

Comme,

$$\begin{aligned}
D_n^2(n, \varepsilon) &= D^2\varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n)^2 = D_{z^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)^2 \\
&+ D_{x^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_n + z_n^n)(D\varphi_{n-1}(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1, \dots, Z_{n-1}))^2 \\
&+ 2D_{x,z}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n) D\varphi_{n-1}(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1, \dots, Z_{n-1}) \\
&+ D_x\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, z_n^n)D^2\varphi_{n-1}(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1, \dots, Z_{n-1})^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur les normes, on est ramené à majorer les quatre termes de droite de l'égalité ci-dessus.

Etudions tout d'abord la quantité

$$\begin{aligned}
D_{n-1}^1(n, \varepsilon) &= D\varphi_{n-1}(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1, \dots, Z_{n-1}) \\
&= D_z\varphi(\varphi_{n-2}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_{n-1}) + D_x\varphi(\varphi_{n-2}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)D_{n-2}^1(n, \varepsilon),
\end{aligned}$$

on a alors :

$$\mathbb{E}[|D_{n-1}^1(n, \varepsilon)|^k]^{\frac{1}{k}} \leq K\|Z_{n-1}\|_{\mathbb{L}^k} + \delta\|D_{n-2}^1(n, \varepsilon)\|,$$

les variables aléatoires Z_i sont identiquement distribuées on en déduit, par récurrence sur n :

$$\mathbb{E}[|D_{n-1}^1(n, \varepsilon)|^k]^{\frac{1}{k}} \leq \frac{K}{1-\delta}\|Z_1\|_{\mathbb{L}^k}.$$

D'où,

$$\|D_{x^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_n + z_n^n)(D_{n-1}^1(n, \varepsilon))^2\|_{\mathbb{L}^k} \leq K \cdot \frac{K^2}{(1-\delta)^2}\|Z_1\|_{\mathbb{L}^k}^2$$

et

$$\|D_{x,z}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)D_{n-1}^1(n, \varepsilon)\|_{\mathbb{L}^k} \leq K\|Z_1\|_{\mathbb{L}^k} \frac{K}{1-\delta}\|Z_1\|_{\mathbb{L}^k}.$$

Enfin, $\|D_{z^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon}, \varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)^2\| \leq K\|(Z_1)^2\|_{\mathbb{L}^k}$ avec $\|(Z_1)^2\|_{\mathbb{L}^k} := \mathbb{E}[|Z_1|^{2k}]^{\frac{1}{k}}$.

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire pour les normes $\mathbb{L}^k$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|D_n^2(n, \varepsilon)\|_{\mathbb{L}^k} &\leq K\|(Z_1)^2\|_{\mathbb{L}^k} + \frac{K^3}{(1-\delta)^2}\|Z_1\|_{\mathbb{L}^k}^2 \\
&+ \frac{2K^2}{1-\delta}\|Z_n\|_{\mathbb{L}^k}\|Z_1\|_{\mathbb{L}^k} + \delta\|D_{n-1}^2(n, \varepsilon)\|_{\mathbb{L}^k}, \\
&\leq K(1 + \frac{2K}{1-\delta} + \frac{K^2}{(1-\delta)^2})\|(Z_1)^2\|_{\mathbb{L}^k} + \delta\|D_{n-1}^2(n, \varepsilon)\|_{\mathbb{L}^k}.
\end{aligned}$$

D'où, par récurrence sur n :

$$\|D_n^2(n, \varepsilon)\|_{\mathbb{L}^k} \leq K'(1 + K')^2\mathbb{E}[|Z_1|^{2k}]^{\frac{1}{k}},$$

en posant $K' = \frac{K}{1-\delta}$.

Calculons $\mathbb{E}[||Z_1||^{2k}]^{\frac{1}{k}}$ avec $Z_1 = (Z_1^1, \dots, Z_1^\beta)$, où les Z_1^i sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||Z_1||^{2k}]^{\frac{1}{k}} &= \mathbb{E}[(||Z_1^1||^2 + \dots + ||Z_1^\beta||^2)^k]^{\frac{1}{k}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\beta} \mathbb{E}[||Z_1^i||^{2k}]^{\frac{1}{k}} = \beta \mathbb{E}[||Z_1^1||^{2k}]^{\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

Le moment d'ordre $2k$ d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ valant $\frac{(2k)!}{2^k k!}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(-\frac{p_0}{2} \lambda_n^T \cdot R_2^n(\varepsilon))] &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{p_0 ||\lambda_n||}{4} \cdot K'(1 + K')^2 \beta \right)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_0 ||\lambda_n||}{8} \cdot K'(1 + K')^2 \beta \right)^k C_{2k}^k.\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k C_{2k}^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, pour $|x| < \frac{1}{4}$.

On doit donc avoir, $p_0 ||\lambda_n|| \cdot K'(1 + K')^2 \beta < 2$.

Donc pour que $p_0 > 1$, il suffit que pour $n \geq n_0$, $||\lambda_n||^2 < \left(\frac{2}{\beta K'(1 + K')^2} \right)^2$.

D'autre part en supposant que $I(y_0) < r$ on peut trouver un entier $n(y_0) \geq n_0$, dépendant de y_0 tel que pour tout entier $n \geq N(y_0)$ on ait aussi $I_n(y_0) < r$. On a alors, d'après la remarque fondamentale de l'introduction (voir l'inégalité (25)), pour tout $n \geq n(y_0)$:

$$||\lambda_n||^2 \frac{c\gamma^2}{4} \leq I_n(y_0) < r$$

Donc pour avoir $p_0 > 1$, il suffit de choisir :

$$(35) \quad r = \frac{c\gamma^2}{\beta^2 (K')^2 (1 + K')^4}.$$

Finalement, en prenant $n \geq n(y_0) \geq n_0$ et $I(y_0) < r$ on obtient l'existence d'un réel $p_0 > 1$ tel que :

$$\sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{n \geq n(y_0)} \mathbb{E}[\exp(-\frac{p_0}{2} \lambda_n^T \cdot R_2^n(\varepsilon))] < \infty.$$

■

Proposition 3.2. *Sous l'hypothèse (H.1.(2N + 4)) on a le résultat suivant : Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$:*

1. Pour tout $1 \leq k \leq N + 3$, et tout $1 \leq p < \infty$:

$$(36) \quad \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \sup_{n \geq 0} \|R_k^n(\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^p} < \infty$$

2. Pour tout k ($1 \leq k \leq N + 3$), r ($0 \leq r + k \leq 2N + 4$ et $0 \leq r \leq k$), et tout p ($1 \leq p < \infty$)

$$(37) \quad \sup_{n \geq 0} \|W_n(k, r)\|_{\mathbf{L}^p} < \infty$$

3. Pour tout k ($1 \leq k \leq N + 3$), r ($0 \leq r + k \leq 2N + 4$ et $0 \leq r \leq k$), et tout p ($1 \leq p < \infty$) :

$$(38) \quad \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \sup_{n \geq 0} \|W_n^\varepsilon(k, r)\|_{\mathbf{L}^p} < \infty$$

Démonstration :

1. Montrons que 1) est vraie.

- Pour $k = 1$:

$$R_1^n(\varepsilon) = \int_0^1 D_n^1(n, \varepsilon t) dt = \int_0^1 D\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \dots, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_1, \dots, Z_n) dt.$$

D'où:

$$\|R_1^n(\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^p} \leq \frac{K}{1 - \delta} \|Z_1\|_{\mathbf{L}^p} < \infty,$$

puisque la variable Z_1 a des moments de tous ordres.

- Pour $k \geq 1$: supposons que $\sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{n \geq 1} \|R_k^n(\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^p} < \infty$ jusqu'au rang k . Comme

$$R_{k+1}^n(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D_n^{k+1}(n, \varepsilon t) dt$$

avec,

$$D_n^{k+1}(n, \varepsilon t) = D_{z^{k+1}}^{k+1} \varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon t}, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_n)^{k+1} + D_x \varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon t}, \varepsilon t Z_n + z_n^n) D_{n-1}^{k+1}(n, \varepsilon t)$$

$$+ P_k \left((D_{x^s z^u}^{s+u} \varphi(\varphi_{n-1}^{n, \varepsilon t}, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_n)^t \cdot D_{n-1}^s(n, \varepsilon))_{\{(s,u) \in \mathbf{N}^2 : u \leq k, 2 \leq s+u \leq k\}} \right),$$

où P_k est un polynôme en les variables ci-dessus de degré au plus k . D'où, par hypothèse de récurrence sur les variables $(D_n^l(n, \varepsilon))_{l \leq k}$ on a:

$$\|D_n^{k+1}(n, \varepsilon)\|_{\mathbf{L}^p} \leq (K(k, p) + \delta \|D_{n-1}^{k+1}(n, \varepsilon)\|_{\mathbf{L}^p})$$

où $K(k, p)$ est une constante dépendant uniquement de k et de p . Ainsi, on obtient

$$\|D_n^{k+1}(n, \varepsilon)\|_{\mathbf{L}^p} \leq \frac{K(k, p)}{(1 - \delta)} < +\infty, \text{ d'où}$$

$$\|R_{k+1}^n(\varepsilon)\| \leq \frac{K(k, p)}{(1 - \delta)(k + 1)!} < +\infty.$$

2. Etudions maintenant les processus dérivés $W_n(k, r)$ issus de R_k^n . Comme R_k^n est une forme k-linéaire en les variables $(Z_1, \dots, Z_n)$, les variables aléatoires $W_n(k, r)$ sont bien définies sous l'hypothèse $(H.1.(k))$.

D'après 1) on a :

$$\sup_n \|W_n(k, 0)\|_{L_p} < +\infty, \text{ pour tout } p \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq N + 3.$$

Supposons que l'on ait pour $r \geq 0$, pour tout k et pour tout $p \geq 1$:

$$\sup_n \|W_n(k, r)\|_{L_p} < +\infty.$$

Montrons cette propriété pour $r + 1$. On raisonne comme précédemment et l'on obtient, en faisant une récurrence sur k , la relation de récurrence suivante :

$$\|W_n(k, r + 1)\|_{L^p} \leq K(k, r + 1, p) + \delta \|W_{n-1}^n(k, r + 1)\|_{L^p}.$$

Où $K(k, r + 1, p)$ est une constante dépendant de processus déjà contrôlé. Ce qui nous donne :

$$\sup_n \|W_n(k, r)\|_{L^p} < +\infty.$$

3. il nous reste, enfin, à contrôler les processus dérivés $W_n^\varepsilon(k, r)$ issus des variables $R_k^n(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. Sous l'hypothèse $(H.1.(2N + 4))$ ces processus sont bien définis avec $1 \leq k \leq N + 3$, $0 \leq r + k \leq 2N + 4$, et $0 \leq r \leq k$. Comme ε est borné on est ramené à l'étude de variables semblables à celles étudiées dans 1) et 2) ■

4. Convergence en loi

Lemme 4.1. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $C^0([0, 1], \mathbb{R}^d)$, muni de la norme uniforme (notée $\|\cdot\|_\infty$) est tendue si et seulement si :*

1. *pour tout $\eta > 0$, il existe un réel a tel que, pour tout $n \geq 1$:*

$$P[\|X_n(0)\|_\infty > a] \leq \eta.$$

2. *pour tout $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel δ avec $0 < \delta < 1$, tel que :*

$$p\left[\sup_{0 \leq t, t' \leq 1, |t-t'| \leq \delta} \|X_n(t) - X_n(t')\|_\infty \geq \varepsilon\right] \leq \eta,$$

ceci pour tout $n \geq 1$.

■

Remarque : Sous les hypothèses (H.1.(2)), (H.2), et (H.3) en supposant que $I(y_0) < r$. On a montré l'existence d'une sous suite $(\lambda_{\theta_0(n)})_{n \geq 1}$, on notera $\lambda_\infty \in$ sa limite.

Proposition 4.2. *Sous les hypothèses (H.1.(2N + 5)), (H.2), et (H.3), , il existe une suite d'entiers $(\theta(n))_{n \geq 1}$ telle que :*

1. La suite $(\lambda_{\theta(n)})_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}^d$.
2. La suite de processus $(W_{\theta(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2))_{n \geq 1}$ (de paramètre ϵ à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{d(N+2, N+2)}, \|\cdot\|_\infty)$) converge en loi vers un processus, à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{d(N+2, N+2)}, \|\cdot\|_\infty)$, que l'on notera $(W_\infty^\epsilon(N + 2, N + 2))$ ■

Démonstration : Pour montrer cette proposition, il nous suffit, d'après la remarque précédente, de prouver, en utilisant le lemme (4.1.) que la suite

$(W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2))_{n \geq 1}$ est tendue.

1. D'après la proposition 3.2., on a :

$$\sup_{0 \leq \epsilon \leq 1} \sup_{n \geq 1} \|W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2)\|_{\mathbf{L}^1} < \infty.$$

Comme,

$$\sup_n P[\|W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 3, N + 1)\| \geq a] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[\|W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2)\|]$$

on en déduit le (1) du lemme 4.1., en prenant a suffisamment grand.

2. D'après le théorème des accroissements finis nous avons, pour tout $s, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \sup_{n \geq 1} \|W_{\theta_0(n)}^s(N + 2, N + 2) - W_{\theta_0(n)}^t(N + 2, N + 2)\|_{\mathbf{L}^1} \\ & \leq \sup_{n, \epsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial t} W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2) \right\|_{\mathbf{L}^1} |t - s|. \end{aligned}$$

Si $\sup_{n, \epsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial t} W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2) \right\|_{\mathbf{L}^1} < +\infty$ alors la deuxième partie du lemme sera démontrée.

Or, sous l'hypothèse (H.1.(2N + 5)) le processus $\frac{\partial}{\partial t} W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 3, N + 1)$ est bien défini, en utilisant un raisonnement par récurrence analogue à celui de la preuve de la proposition (3.2.) nous obtenons :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2) \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq K(N + 2, N + 2, 1) + \delta \left\| \frac{\partial}{\partial t} W_{\theta_0(n)}^\epsilon(N + 2, N + 2) \right\|_{\mathbf{L}^1}$$

ainsi :

$$\sup_{n,\varepsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial t} W_{\theta_0(n)}^\varepsilon(N+2, N+2) \right\|_{L^1} < +\infty,$$

d'où le résultat.

Lemme 4.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé soit Ψ une variable aléatoire P -intégrable, soit ϕ une variable aléatoire d -dimensionnelle, vérifiant pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ bornée et à dérivé bornée, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$:*

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(\phi) \Psi \right] \right| \leq c \|g\|_\infty$$

Posons $\bar{P} = \Psi P$ (elle est bien définie puisque Ψ est P -intégrable) et appelons $\bar{\mu}_\phi$ la mesure image sur $\mathbb{R}^d$ de $\bar{P}$ par ϕ . Alors $\lim_{g \rightarrow \delta_0} \mathbb{E}[g(\phi)\Psi]$ (limite au sens des distributions) a un sens c'est à dire que $\bar{\mu}_\phi$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration : On a:

$$\mathbb{E}[g(\phi)\Psi] = \mathbb{E}_{\bar{P}}[g(\phi)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \bar{\mu}_\phi(dx).$$

Il reste à montrer que la mesure $\bar{\mu}_\phi$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Appelons $\hat{\mu}_\phi$ la transformée de Fourier de $\bar{\mu}_\phi$:

$$\hat{\mu}_\phi(u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i \langle u, x \rangle) \bar{\mu}_\phi(dx),$$

$u \in \mathbb{R}^d$. Alors, pour $f_u(x) = \exp(-i \langle u, x \rangle)$, pour $j \in \{1, \dots, d\}$ en utilisant l'égalité du lemme on obtient :

$$|u^j| |\hat{\mu}_\phi(u)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j} f_u(x) \bar{\mu}_\phi(dx) \right| \leq \frac{K}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}},$$

K est une constante positive qui change de ligne en ligne.

Or, comme

$$|\hat{\mu}_\phi(u)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\mu}_\phi(dx) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathbb{E}(|\Psi|) \leq \frac{K}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} < +\infty.$$

On en déduit

$$|\hat{\mu}_\phi(u)| \leq \frac{K}{1 + |u^1| + \dots + |u^d|} \leq \frac{K}{1 + |u|}$$

ainsi, $\hat{\mu}_\phi$ est dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d)$ donc sa transformée de Fourier inverse existe et est exactement la densité de ϕ par rapport à la mesure ΨdP . ■

Lemme 4.4. Soient $(A_n)_{n \geq 1}, (B_n)_{n \geq 1}, (C_n)_{n \geq 1}$ trois suites de variables aléatoires à valeurs réelles, soient $P_0 > 1$ et $\eta > 0$ deux réels tels que l'on ait :

1. $\sup_{n \geq 1} \|A_n\|_{L^{P_0}} < +\infty.$
2. $\sup_{n \geq 1} \|B_n\|_{L^{q_0+\eta}} < +\infty, \text{ avec } \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1.$
3. $\sup_{n \geq 1} \|C_n\|_{L^p} < +\infty, \text{ pour tout } p \geq 1.$

Alors la suite de variables $(A_n.B_n.C_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

Si de plus la suite $(A_n.B_n.C_n)_{n \geq 1}$ converge en loi sa limite est dans $\mathbb{L}^1$ ■

Preuve : Pour montrer l'uniforme intégrabilité de la suite $(A_n.B_n.C_n)_{n \geq 1}$ il nous suffit de montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n.B_n.C_n\|_{L^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

L'inégalité de Holder nous donne :

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|A_n.B_n.C_n|^{1+\varepsilon}] \leq \mathbb{E}[|A_n|^{P_0}]^{\frac{1}{p}} . \mathbb{E}[|B_n.C_n|^{q(1+\varepsilon)}]^{\frac{1}{q}}$$

avec $1 < 1 + \varepsilon < p_0$, $1 < p = p_0/(1 + \varepsilon)$ et $1/p + 1/q = 1$, ce qui est possible en prenant ε assez petit. Comme $\sup_{n \geq 1} \|A_n\|_{L^{P_0}} < +\infty$ il ne nous reste plus qu'à contrôler $\mathbb{E}[|B_n.C_n|^{q(1+\varepsilon)}]$ avec $q = p_0/(p_0 - 1 - \varepsilon)$.

En réutilisant l'inégalité de Holder on obtient :

$$\mathbb{E}[|B_n.C_n|^{q(1+\varepsilon)}] \leq \mathbb{E}[|B_n|^{q_0+\eta}]^{\frac{1}{p_1}} . \mathbb{E}[|C_n|^{q(1+\varepsilon)q_1}]^{\frac{1}{q_1}}$$

avec $0 < \varepsilon < \eta(\frac{p_0-1}{p_0^2})$ on a $1 < p_1 < \frac{q_0+\eta}{q(1+\varepsilon)}$ et on pose $q_1 = \frac{p_1}{p_1-1}$.

D'où l'uniforme intégrabilité de la suite $(A_n.B_n.C_n)_{n \geq 1}$, en utilisant les propriétés de $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$.

D'autre part, si cette suite à une limite on voit clairement qu'elle appartient à $\mathbb{L}^1$. ■

A partir de maintenant nous allons scinder l'étude du développement asymptotique en deux parties. Nous étudierons séparément le développement limité proprement dit, et le reste.

5. Etude du développement limité :

On intègre par parties les termes du développement limité, afin de faire disparaître les dérivées de la fonction $g_m \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, puis on passe à la limite en n . On a alors :

Proposition 5.1. *Sous les hypothèses (H.1.(N+2)), (H.2) et (H.3), avec $n \geq n_0$ et $I(y_0) < r$, on a*

pour tout k ($1 \leq k \leq N$) :

a)

1. pour tout k_1 ($1 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}]$)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2}\right) \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha, k_1}^k(W_n(k+2-k_1, 0), \lambda_n) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2}\right) g(R_1^n) \frac{1}{\det(U_n)^{2k_1}} \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha, k_1, k_1}^k(W_n(k+2-k_1, k_1), \lambda_n) \right\} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

2. pour tout k_2 ($[\frac{k+1}{2}] + 1 \leq k_2 \leq k$)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2}\right) \left\{ \sum_{|\alpha|=k_2} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha, k_1}^k(W_n(k_1+1, 0), \lambda_n) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2}\right) g(R_1^n) \frac{1}{\det(U_n)^{2k_2}} \left\{ \sum_{|\alpha|=k_2} H_{\alpha, k_2, k_2}^k(W_n(k_2+1, k_2), \lambda_n) \right\} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

où les H_{α, k_i, k_i}^k sont, pour $i = 1, 2$, d'après la proposition (1.5), des fonctions polynomiales.

De plus, en prenant se restreignant à la sous suite $(\theta(n))_{n \geq 1}$ définie dans la proposition (4.2.) on a :

b)

1. pour tout k_1 ($1 \leq k_1 \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^\infty}{2}\right) \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^\infty) P_{\alpha, k_1}^k(W_\infty(k+2-k_1, 0), \lambda_\infty) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^\infty}{2}\right) g_m(R_1^\infty) \frac{1}{\det(U_\infty)^{2k_1}} \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha, k_1, k_1}^k(W_\infty(k+2-k_1, k_1), \lambda_\infty) \right\} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

2. pour tout k_2 ($\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 \leq k_2 \leq k$)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^\infty}{2}\right) \left\{ \sum_{|\alpha|=k_2} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^\infty) P_{\alpha, k_1}^k(W_\infty(k_2+1, 0), \lambda_\infty) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^\infty}{2}\right) g(R_1^\infty) \frac{1}{\det(U_\infty)^{2k_2}} \left\{ \sum_{|\alpha|=k_2} H_{\alpha, k_2, k_2}^k(W_\infty(k_2+1, k_2), \lambda_\infty) \right\} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Démonstration :

a) L'hypothèse (H.3) nous permet, en utilisant la proposition 1.10. au plus N fois, d'intégrer par parties les expressions de gauche des équations (39) et (40), d'où le résultat .

b) Nous traiterons le cas où k_1 ($0 \leq k_1 \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$), il en va de même pour k_2 ($\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 \leq k_2 \leq k$). Notons pour $n \geq N(y_0)$:

$$A_n := \exp\left(-\frac{\langle \lambda_n, R_2^n \rangle}{2}\right)$$

$$B_n(k_1) := \frac{1}{\det(U_n)^{2k_1}}$$

$$C_n(k_1) := \sum_{|\alpha|=k_1} D_{x^\alpha}^\alpha g_m(R_1^n) P_{\alpha, k_1}^N(W_n(k+2-k_1, 0), \lambda_n)$$

$$C'_n(k_1) := \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha, k_1, k_1}^k(W_n(k+2-k_1, k_1), \lambda_n)$$

$A_{\theta(n)}(k_1), B_{\theta(n)}(k_1), C_{\theta(n)}(k_1)$ et $C'_{\theta(n)}(k_1)$ sont des fonctions continues en des va-

riables $W_{\theta(n)}(N+3, N+2)$ et $\lambda_{\theta(n)}$ qui convergent respectivement en loi (voir la proposition (4.2.)) et dans $\mathbb{R}^d$.

De plus, pour tout k_1 , les propositions (3.2.) et (3.1.) ainsi que la remarque concernant λ_n page 14 nous permettent de montrer que :

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n(k_1)\|_{L^{p_0}} < +\infty$$

$$\sup_{n \geq 1} \|B_n(k_1)\|_{L^{q_0+n}} < +\infty$$

(d'après l'hypothèse (H.3))

$$\sup_{n \geq 1} \|C_n(k_1)\|_{L^p} < +\infty$$

$$\sup_{n \geq 1} \|C'_n(k_1)\|_{L^p} < +\infty$$

avec $p_0 > 1$ (défini dans la proposition 3.1.), $q_0 = p_0/(p_0 - 1)$ et pour tout $p \geq 1$.

Le lemme (4.4.) nous montre que les suites $(A_n.C_n)_{n \geq 1}$ et $(A_n.B_n.C'_n)_{n \geq 1}$ sont uniformément bornées, ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[A_{\theta(n)}.C_{\theta(n)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[A_{\theta(n)}.B_{\theta(n)}.C'_{\theta(n)}]$$

de plus, la variable $A_\infty.B_\infty.C'_\infty \in \mathbb{L}^1$ ■

Pour conclure il nous reste à vers tendre ν vers 0.

Proposition 5.2. *sous les hypothèses (H.1.(N+2)), (H₂) et (H.3) (avec $I(y_0) < r$) avec la sous suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ on a, pour tout k ($0 \leq k \leq N$) :*

1. Pour k_1 ($0 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}]$)

$$(43) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2}\right) g_\nu(R_1^\infty) \frac{1}{\det(U_\infty)^{2k_1}} \right. \\ \left. \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha,k_1,k_1}^k(W_\infty(k+2-k_1, k_1), \lambda_\infty) \right\} \right]$$

a un sens.

2. Pour k_2 ($[\frac{k+1}{2}] + 1 \leq k_2 \leq k$)

$$(44) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2}\right) g_\nu(R_1^\infty) \frac{1}{\det(U_\infty)^{2k_2}} \right. \\ \left. \left\{ \sum_{|\alpha|=k_2} H_{\alpha,k_2,k_2}^k(W_\infty(k_2+1, k_2), \lambda_\infty) \right\} \right]$$

a un sens ■

Démonstration :

Etudions le cas où k_1 ($0 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}]$), il en va de même pour k_2 ($[\frac{k+1}{2}] + 1 \leq k_2 \leq k$).
Notons pour $n \geq N(y_0)$

$$\Psi_{k_1}^n = \exp(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2}) \frac{1}{\det(U_n)^{2k_1}} \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha, k_1, k_1}^k(W_n(k+2-k_1, k_1), \lambda_n) \right\}$$

D'après la proposition (5.1.) la suite $(\Psi_{k_1}^{\theta(n)})_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable appartenant à $\mathbb{L}^1$, notée $\Psi_{k_1}^\infty$.

La limite $\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbb{E}[g_\nu(R_1^\infty) \Psi_{k_1}^\infty]$ a un sens si, d'après le lemme (4.3.), pour toute fonctions g de classe $\mathcal{C}^1$ bornée à dérivée bornée, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| \mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty) \Psi_{k_1}^\infty] \right| \leq c(k_1) \|g\|_\infty.$$

Or,

$$\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty) \Psi_{k_1}^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^{\theta(n)}) \Psi_{k_1}^{\theta(n)}]$$

Sous l'hypothèse (H.1.($N+2$)), pour $n \geq n_0$ on peut effectuer une intégration par parties (voir la proposition (1.10.)) qui nous donne :

$$\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^n) \Psi_{k_1}^n] = \mathbb{E}[g(R_1^n) \Psi_{(k_1, j)}^n],$$

où

$$\Psi_{(k_1, j)}^n = \exp(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^n}{2}) \frac{1}{\det(U_n)^{2(k_1+1)}} \left\{ \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha, k_1, k_1, j}^k(W_n(k+2-k_1, k_1+1), \lambda_n) \right\}.$$

On pose, comme dans la proposition 5.1., pour $n \geq N(y_0)$:

$$A_n(k_1) = \exp(-\frac{\langle \lambda_n, R_2^n \rangle}{2})$$

$$B_n(k-1, j) = \frac{1}{\det(U_n)^{2(k_1+1)}}$$

$$C_n(k_1, j) = \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha, k_1, k_1, j}^k(W_n(k+2-k_1, k_1+1), \lambda_n).$$

On a alors :

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n(k_1)\|_{\mathbb{L}^{p_0}} < +\infty$$

$$\sup_{n \geq 1} \|B_n(k_1)\|_{\mathbb{L}^{q_0+\eta}} < +\infty$$

$$\sup_{n \geq 1} \|C_n(k_1)\|_{\mathbb{L}^p} < +\infty \text{ pour tout } p \geq 1.$$

En appliquant le lemme (4.4.) on montre d'une part que

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty)\Psi_{k_1}^\infty\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[g(R_1^{\theta(n)})\Psi_{(k_1,j)}^{\theta(n)}],$$

d'autre part, si l'on note $\Psi_{(k_1,j)}^\infty$ la limite de la suite $(\Psi_{(k_1,j)}^{\theta(n)})_{n \geq 1}$ (qui existe d'après la proposition 4.2.) alors $\Psi_{(k_1,j)}^\infty \in \mathbb{L}^1$ et l'on a

$$\left|\mathbb{E}\left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty)\Psi_{k_1}^\infty\right]\right| \leq c(k_1)\|g\|_\infty.$$

D'où le résultat par le lemme 4.3.. ■

Ainsi l'égalité (32) page 17 devient, formellement, sous les hypothèses déjà citées, après passage à la limite en n puis en ν :

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(y_0) &= \frac{1}{\varepsilon^d} \exp\left(-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2}\right) \lim_{g \rightarrow \delta_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[g(R_1^{n,\varepsilon}) \cdot \exp\left(\frac{\langle \lambda_n, R_2^{n,\varepsilon} \rangle}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \exp\left(-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2}\right) (c_0(y_0) + \varepsilon c_1(y_0) + \dots + \varepsilon^N c_N(y_0) + \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!} \lim_{g \rightarrow \delta_0} \lim_{n \rightarrow \infty} R^N(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Nous introduisons à ce niveau deux hypothèses supplémentaires :

(H.4) La probabilité invariante η^ε a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

(H.5)(p) sous les hypothèses (H.1.(1)) et (H.2), nous supposons l'existence d'un réel $\varepsilon_p > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_p[$ la limite en loi de la suite de matrices de Malliavin $(U_{\theta(n)}(\varepsilon))_{n \geq 0}$ (la suite $(\theta(n))_{n \geq 0}$ étant celle de la proposition 4.2.), notée $U_\infty(\varepsilon)$, vérifie la propriété suivante :

$$(\det(U_\infty(\varepsilon)))^{-1} \in \mathbb{L}^p.$$

Etudions maintenant le comportement limite de $R^{N+1}(\varepsilon)$ sous l'hypothèse

(H.5)($2q_0(N+2) + \eta$), avec $\eta > 0$ aussi petit que l'on veut, et q_0 défini dans la proposition 3.1..

Remarque : Si la constante α_ε intervenant dans la condition (B.1) vérifie, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_p$, l'inégalité $\alpha_\varepsilon < \gamma^{4dq_0(N+2)}$ (où γ est défini dans l'hypothèse (C)) alors les hypothèses (H.4) et (H.5)($2q_0(N+2) + \eta$) (pour au moins un $\eta > 0$) sont vérifiées. Pour plus de précision voir respectivement les corollaires 7.5. et 7.6..

6. Convergence du reste :

Proposition 6.1. *Sous les hypothèses (H.1.(N + 3)), (H.2), (H.3) avec $I(y_0) < r$ pour toute fonction g de $C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.*

a) Nous pouvons permuter dans le reste $R^{N+1}(n, \varepsilon)$ l'intégrale en t et la limite en n .

b) posons alors :

$$R^{N+1}(\infty, \varepsilon) = \int_0^1 (1-t)^N \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\exp(-\frac{\lambda_{\theta(n)}^T \cdot R_2^{\theta(n), \varepsilon t}}{2}) \cdot T^{N+1}(\theta(n), \varepsilon t)] dt.$$

Où,

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} T^{N+1}(n, \varepsilon t) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} + 1 \rfloor} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n, \varepsilon t}) P_{\alpha, k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(N+2-k, 0), \lambda_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n, \varepsilon t}) P_{\alpha, k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(k+1, 0), \lambda_n) \right\} \end{aligned} \right.$$

avec la suite $(\theta(n))_{n \geq 1}$ définie dans la proposition 4.2. et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ avec toutes ses dérivées bornées.

Démonstration :

a) Commençons par justifier la permutation entre la limite en n et l'intégrale en t .

Le terme exponentiel est, d'après la proposition 3.1., uniformément borné en εt et en n dans $\mathbb{L}^{p_0}$, avec $p_0 > 1$. La fonction g étant de classe C^∞ avec toutes ses dérivées bornées, les termes de la forme $D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{\infty, \varepsilon t})$ sont donc eux aussi uniformément bornés en εt et en n . Enfin, les variables $W_n^{\varepsilon t}(j, 0)$ (avec $0 \leq j \leq N+2$) (respectivement λ_n) étant majoré uniformément en εt et en n dans tout les espaces $\mathbb{L}^p$ (respectivement en norme dans $\mathbb{R}^d$) (pour plus de précision voir la proposition 3.2. page 20) on en déduit que les fonctions polynomiales $P_{\alpha, k}^N$ sont uniformément bornées en εt et n . Ainsi le reste $R^N(n, \varepsilon)$ est majoré par une constante indépendante de ε et n . Cette majoration du reste nous permet de permuter l'intégrale en t et la limite en n .

b) Posons :

$$A_n(\varepsilon t) = \exp(-\frac{\lambda_{\theta(n)}^T \cdot R_2^{\theta(n), \varepsilon t}}{2})$$

$$C_n(\varepsilon t) = T^{n+1}(n, \varepsilon t)$$

D'après a) on a :

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n(\varepsilon t)\|_{\mathbb{L}^{p_0}} < +\infty$$

et

$$\sup_{n \geq 1} \|C_n(\varepsilon t)\|_{L_p} < +\infty.$$

En utilisant la proposition 4.2. ainsi que le lemme 4.4., on voit que $R^{N+1}(\infty, \varepsilon)$ a un sens. ■

Remarque : On obtient, pour $n \geq N(y_0)$, en posant $Q_n(\varepsilon) = \det(U_n(\varepsilon))$:

$$(46) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(R_0^n(\varepsilon)) Q_n^2(\varepsilon) F(W_n^\varepsilon(k, l), \lambda_n) \exp\left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^{n, \varepsilon}}{2}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[f(R_0^n(\varepsilon)) H^i(W_n^\varepsilon(k, l+1), \lambda_n) \exp\left(-\frac{\lambda_n^T \cdot R_2^{n, \varepsilon}}{2}\right)] \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, d$, $2 \leq k \leq r$ et $0 \leq l \leq r$, sous $(H.1.(r+1))$, avec f vérifiant les hypothèses de la proposition 1.10. et F étant C_p^∞ en les variables $W_n^\varepsilon(k, l)$ et λ_n .

Les propositions 3.2. et 4.2., nous permettent, en prenant la sous suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$, de faire tendre n vers $+\infty$ dans (46). On prendra $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ et $F \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{d(k,l)} \times \mathbb{R}^d)$, on obtient si $Q_\infty(\varepsilon) = \det(U_n(\varepsilon))$:

$$(47) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(R_0^\infty(\varepsilon)) Q_\infty^2(\varepsilon) F(W_\infty^\varepsilon(k, l), \lambda_\infty) e^{-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^{\infty, \varepsilon}}{2}}\right] \\ &= \mathbb{E}[f(R_0^\infty(\varepsilon)) H^i(W_\infty^\varepsilon(k, l+1), \lambda_\infty) e^{-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^{\infty, \varepsilon}}{2}}], \end{aligned}$$

où $H^i \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{d(k,l+1)} \times \mathbb{R}^d)$.

En utilisant le lemme 4.3. on va montrer le résultat suivant :

Proposition 6.2. *Sous les hypothèses $(H.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(H.3)$, avec $I(y_0) < r$, avec les hypothèses supplémentaires $(H.4)$ et $(H.5)(2q_0(N+2) + \eta)$ et en restreignant à la sous suite $(\theta(n))_{n \geq 1}$ définie dans la proposition 4.2. on peut permuter l'intégrale en t et la limite en ν , de plus la limite lorsque ν tend vers 0 a un sens c'est à dire plus précisément :*

$$(48) \quad \begin{aligned} & \lim_{\nu \rightarrow 0} R^N(\infty, \varepsilon) \text{ existe et vaut} \\ & \lim_{\nu \rightarrow 0} R^N(\infty, \varepsilon) = \int_0^1 (1-t)^N \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^{\infty, \varepsilon t}}{2}\right)\right. \\ & \quad \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g_\nu(R_1^{\infty, \varepsilon t}) P_{\alpha, k}^{N+1}(W_\infty^{\varepsilon t}(N+2-k, 0), \lambda_\infty) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g_\nu(R_1^{\infty, \varepsilon t}) P_{\alpha, k}^{N+1}(W_\infty^{\varepsilon t}(k+1, 0), \lambda_\infty) \right\} dt \end{aligned}$$

Démonstration :

1. De (47) et de l'expression explicite de H^i donnée dans la proposition 1.10. en prenant

$$F_r(W_\infty^\varepsilon(k, l), \lambda_\infty) = F(W_\infty^\varepsilon(k, l), \lambda_\infty) \cdot \Psi(r \cdot Q_\infty(\varepsilon)) \cdot Q_\infty(\varepsilon)^{-\beta-2}$$

a la place de F ., avec $\Psi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi(u) = 0$ si $|u| \leq \frac{1}{2}$ et $\Psi(u) = 1$ si $|u| \geq 1$, on en déduit :

$$(49) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}[\frac{\partial}{\partial x_i} f(R_0^{\infty, \varepsilon}) \cdot e^{-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_0^{\infty, \varepsilon}}{2}} \cdot Q_\infty(\varepsilon)^{-\beta} \cdot F(W_\infty^\varepsilon(k, l), \lambda_\infty)] \\ &= \mathbb{E}[f(R_0^{\infty, \varepsilon}) \cdot e^{-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_0^{\infty, \varepsilon}}{2}} \cdot Q_\infty(\varepsilon)^{-\beta-2} \cdot H_{F, \beta}^i(W_\infty^\varepsilon(k, l+1), \lambda_\infty)] \end{aligned}$$

pour $2 \leq k \leq N+3$, $0 \leq l \leq N+1$, $0 \leq \beta \leq 2N$, $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $F \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^{d(k, l)} \times \mathbb{R}^d)$, avec $H_{F, \beta}^i \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^{d(k, l+1)} \times \mathbb{R}^d)$.

Pour prouver l'égalité (49) on se limite à la sous suite définie dans la proposition 4.2., on fait tendre n vers $+\infty$ (l'hypothèse (H.5)($2(N+2)+\eta$) ainsi que la proposition 3.2. nous permettent de montrer, en utilisant le lemme 4.4., que la suite des espérances convergent), enfin pour conclure on passe à la limite en r . (pour plus de précision voir la preuve du lemme (4.14) de K.Bitcheleer, J.B.Gravereaux et J.Jacod [2] qui ne repose que sur la formule (49))

2. Permutation entre la limite en n et l'intégrale en t :

en appliquant (49), au plus $N+2$ fois sur le reste d'ordre $N+1$. On obtient :

$$R^{N+1}(\infty, \varepsilon) = \int_0^1 (1-t)^N \mathbb{E}[\exp(-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^{\infty, \varepsilon t}}{2}) \cdot G_m(R_1^{\infty, \varepsilon t}) F^{N+1}(\varepsilon t)] dt$$

avec,

$$\left\{ \begin{aligned} F^{N+1}(\varepsilon) &= \left\{ \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]+1} \sum_{|\alpha|=k} (Q_\infty(\varepsilon))^{-2(k+1)} H_{\alpha, k}^\alpha(W_\infty^\varepsilon(N+2-k, k+1), \lambda_\infty) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=[\frac{N}{2}]+2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} (Q_\infty(\varepsilon))^{-2(k+1)} H_{\alpha, k}^\alpha(W_\infty^\varepsilon(k+1, k+1), \lambda_\infty) \right\} \end{aligned} \right.$$

Où G_m est une fonction allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\partial G_m / \partial x_1 = g_m$ (où $(g_m)_{m \geq 0}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact tendant vers la masse de Dirac en zéro) et tel que ces fonctions soient bornées par une constante K indépendante de m .

Il nous reste a majorer uniformément la limite $R^{N+1}(\infty, \varepsilon)$, en εt et m . Nous avons :

$$|R^{N+1}(\infty, \varepsilon)| \leq K \cdot \int_0^1 (1-t)^N \mathbb{E}[|e^{-\frac{\lambda_\infty^T \cdot R_2^{\infty, \varepsilon t}}{2}} \cdot F^{N+1}(\varepsilon t)|] dt$$

Le lemme 4.4. nous permet, grâce à l'hypothèse $(H_4(2q_0(N+2) + \eta))$ et à la proposition 3.2., de montrer que :

$$\sup_{0 \leq \epsilon \leq 1} \|F^{N+1}(\epsilon t)\|_{L^{q_0}} < +\infty.$$

Cette majoration nous permet de permuter la limite et l'intégrale.

3. L'existence de $\lim_{m \rightarrow \infty} R^{N+1}(\infty, \epsilon)$:

d'après ce qui précède on a l'égalité (48). Pour conclure on fait un raisonnement analogue à celui de la proposition 5.2.

■

Théorème 6.3. *Sous les hypothèses $(H.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(H.3)$, (C) avec $I(y_0) < r$, et les hypothèses supplémentaires $(H.4)$ et $(H.5)(2q_0(N+2) + \eta)$ on a l'égalité suivante*

$$f^\epsilon(y_0) = \frac{1}{\epsilon^d} \exp\left(-\frac{I(y_0)}{2\epsilon^2}\right) (c_0(y_0) + \epsilon c_1(y_0) + \dots + c_N(y_0)\epsilon^N + \epsilon^{N+1}.R_{N+1}(\epsilon, y_0)),$$

avec $|R_{N+1}(\epsilon, y_0)|$ borné en ϵ (où $0 < \epsilon < \epsilon_p$) ■

Démonstration : L'hypothèse $(H.4)$ nous dit que la probabilité invariante η^ϵ possède une densité f^ϵ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Cette densité donne un sens aux termes du développement asymptotique lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. On conclut en utilisant les propositions 5.2. et 6.2..

7. Etude de l'intégrabilité de $(\det U_\infty^\epsilon)^{-q}$ et applications

7.1. Introduction et résultat général

Soient n_0 un entier assez grand, i un entier compris entre 1 et n et ϵ un nombre strictement positif. La suite $(U_i^{n,\epsilon})_{n \geq n_0}$ est à valeurs dans $M(d)_s$ et vérifie, une équation aux différences aléatoire de la forme suivante, voir 21 :

$$(50) \quad \begin{cases} U_0^{n,\epsilon} = 0 \\ \text{et, pour } 1 \leq i \leq n \\ U_i^{n,\epsilon} = D_i^n(X_{i-1}^{n,\epsilon}, \epsilon Z_i) U_{i-1}^{n,\epsilon} (D_i^n(X_{i-1}^{n,\epsilon}, \epsilon Z_i))^T + B_i^{n,\epsilon}(X_{i-1}^{n,\epsilon}, \epsilon Z_i) \\ \text{avec } D_i^n : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta \rightarrow M(d) \\ \text{et } B_i^n : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta \rightarrow M(d)_s. \end{cases}$$

On suppose de plus que pour $1 \leq i \leq n$:

$$(51) \quad X_i^{n,\varepsilon} = \varphi_i^n(\varepsilon Z_1, \dots, \varepsilon Z_i)$$

et $X_0^{n,\varepsilon} = 0$, où φ_i^n est une fonction mesurable en les variables $(Z_1, \dots, Z_i)$, ces variables sont indépendantes et de même loi λ .

Posons :

$$(52) \quad A^{(j,k)(l,m)}(x, z) = (D_i^n)^{(j,l)}(x, z) \cdot (D_i^n)^{(k,m)}(x, z).$$

On a alors, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$(53) \quad U_i^{n,\varepsilon} = A_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i) \cdot U_{i-1}^{n,\varepsilon} + B_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i),$$

en notant $A.U = D.U.D^T$.

On pose également :

$$(54) \quad C_i^n(x, z) = \begin{cases} (A_i^n(x, z))^{-1} \cdot B_i^n(x, z) \\ \text{si } \det(D_i^n(x, z)) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et on considère si $d > 1$ les conditions *I*, *II*, *III*, et *IV* suivantes.

I

$$(55) \quad \begin{cases} \text{(i) on a :} \\ \sup_{n \geq n_0} \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta} \|B_i^n(x, z)\| < \infty \\ \text{(ii) } \sup_{n \geq n_0} \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta} \|D_i^n(x, z)\| = \delta < 1 \end{cases}$$

II Il existe des constantes c_ε , c et un entier n_1 appartenant respectivement à $]0, 1[$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\{1, 2, \dots, n_0\}$ tels que pour presque tout x de $\mathbb{R}^d$ et pour tout y de S_{d-1} il existe des ouverts :

$$(56) \quad E_i^{n,\varepsilon}(x, y) \subset \{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T \cdot C_i^n(x, \varepsilon z) \cdot y \geq c \|y\|^2\}$$

avec $n \geq n_0$, $1 \leq i \leq n - n_1$ et :

$$(57) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \inf_{y \in S_{d-1}} \lambda(E_i^{n,\varepsilon}(x, y)) \geq c_\varepsilon.$$

III Il existe $\xi \in]0, 1[$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et pour λ -presque tout $z \in \mathbb{R}^\beta$ on ait :

$$(58) \quad \inf_{n \geq n_0} \inf_{1 \leq i \leq n} \|D_i^n(x, z)(y)\| \geq \xi \|y\|.$$

IV_q Les constantes de *I*, *II*, et *III* sont telles que : $\frac{1 - c_\varepsilon}{\xi^{2dq}} < 1$.

En sachant déjà, grâce à la proposition (4.2), qu'il existe une sous suite $(\theta^\varepsilon(n))_{n \geq 1}$ telle que U_n^ε converge en loi lorsque n tend vers l'infini. On a alors, lorsque $d > 1$, le résultat suivant :

Théorème 7.1. *Si l'on suppose I, II, III, et IV_q sont vérifiées, alors $(\det(U_\infty^\varepsilon))^{-q} \in \mathbb{L}^1(P)$.*

Remarques :

1. Si $d = 1$, l'étude est plus facile. $E_i^{n,\varepsilon}(x)$ remplace les ensembles $E_i^{n,\varepsilon}(x, y)$ et III devient :

$$\inf_{n \geq n_0} \inf_{1 \leq i \leq n} \|D_i^n(x, z)\| \geq \xi,$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et λ presque tout $z \in \mathbb{R}^\beta$.

2. La condition III entraîne que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et λ presque tout $z \in \mathbb{R}^\beta$:

$$\inf_{n \geq n_0} \inf_{1 \leq i \leq n} |\det(D_i^n(x, z))| \geq \xi^d.$$

(Considérer $(D_i^n(x, z))^T \cdot D_i^n(x, z)$ et utiliser le fait que, pour une matrice symétrique réelle U , $y^T \cdot U \cdot y \geq K \|y\|^2$ pour tout y de $\mathbb{R}^d$ entraîne que $\det(U) \geq K^d$.)

Le paragraphe suivant est consacré à la démonstration de ce théorème.

7.2. Preuve du théorème (7.1)

7.2.1. Notations et compléments.

Posons $D_i^{n,\varepsilon} = D_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$, $B_i^{n,\varepsilon} = B_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$, $C_i^{n,\varepsilon} = C_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$,

et $A_i^{n,\varepsilon} = A_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$.

On a :

$$(59) \quad \begin{cases} U_0^{n,\varepsilon} = 0 \\ \text{et, pour } 1 \leq i \leq n \\ U_i^{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{i-1} A_i^{n,\varepsilon} \cdots A_{i-k}^{n,\varepsilon} \cdot C_{i-k}^{n,\varepsilon} \end{cases}$$

(On a : $U_i^{n,\varepsilon} = A_i^{n,\varepsilon} \cdot [U_{i-1}^{n,\varepsilon} + C_i^{n,\varepsilon}]$ pour $1 \leq i \leq n$, d'où le résultat par récurrence sur i).

Posons, pour $1 < i < n$, $k = 0, 1, \dots, i-1$ et $y \in \mathbb{R}^d$:

$$(60) \quad Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y) = (D_{i-k}^{n,\varepsilon})^T \cdots (D_i^{n,\varepsilon})^T \cdot y.$$

On a alors pour tout $1 < i < n$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$:

$$(61) \quad y^T \cdot U_i^{n,\varepsilon} \cdot y = \sum_{k=0}^{i-1} (Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y))^T \cdot C_{i-k}^{n,\varepsilon} \cdot Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y) \text{ et aussi :}$$

$$(62) \quad y^T \cdot U_i^{n,\varepsilon} \cdot y = \sum_{j=0}^{k-1} (Y_{i,j}^{n,\varepsilon}(y))^T \cdot C_{i-j}^{n,\varepsilon} \cdot Y_{i,j}^{n,\varepsilon}(y) + (Y_{i,k-1}^{n,\varepsilon}(y))^T \cdot U_{i-1}^{n,\varepsilon} \cdot Y_{i,k-1}^{n,\varepsilon}(y)$$

(pour obtenir la dernière égalité on applique k fois l'égalité $U_i^{n,\varepsilon} = A_i^{n,\varepsilon} \cdot [U_{i-1}^{n,\varepsilon} + C_i^{n,\varepsilon}]$).

On considère les applications $T_i^{n,\varepsilon}$ de $\Omega \times \mathbb{R}^d$ dans $\overline{\mathbb{N}}$ suivantes :

$$(63) \quad \begin{cases} T_0^{n,\varepsilon}(\omega, y) = +\infty \\ \text{et, pour } 1 \leq i \leq n, \\ T_i^{n,\varepsilon}(\omega, y) = \inf \{k = 0, \dots, i-1 : Z_{i-k}(\omega) \in E_{i-k}^{n,\varepsilon}(X_{i-k-1}^{n,\varepsilon}(\omega), Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y)(\omega))\} \\ (= +\infty \text{ si } \{-\} =). \end{cases}$$

(Les ensembles $E_i^{n,\varepsilon}$ ont été introduits dans la condition II).

On a alors pour $1 \leq r \leq n$:

$$(64) \quad T_n^{n,\varepsilon}(\omega, y) = r \text{ équivaut à } \begin{cases} T_{n-1}^{n,\varepsilon}(\omega, Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(y)(\omega)) = r-1 \\ Z_n \notin E_n^{n,\varepsilon}(X_{n-1}^{n,\varepsilon}(\omega), Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(y)(\omega)) \end{cases}$$

(car $U_n^{n,\varepsilon} = A_n^{n,\varepsilon} \cdot [U_{n-1}^{n,\varepsilon} + C_n^{n,\varepsilon}]$).

D'autre part on a :

$$(65) \quad T_n^{n,\varepsilon}(\omega, y) = r \text{ implique } T_{n-r}^{n,\varepsilon}(\omega, Y_{n,r}^{n,\varepsilon}(\omega)) = 0$$

Rappelons maintenant un résultat classique (Lemme 7,29, page 92 de K.Bitcheler, J.B.Gravereaux et J.Jacod [2]).

Proposition 7.2. Si U est une matrice $d \times d$ symétrique définie positive, alors on a :

$$(66) \quad \frac{\Gamma(q)^d}{(\det(U))^q} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot dy.$$

($\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et Γ désigne la fonction gamma usuelle).

On va utiliser cette proposition et les fonctions φ_u suivantes pour obtenir l'intégrabilité de $(\det(U_\infty^\varepsilon))^{-q}$.

Pour $u > 0$ et $U \in M(d)_s$, ensemble des matrices symétriques de type positif (non nécessairement inversibles) on pose :

$$(67) \quad \varphi_u(U) = \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot f\left(\frac{y^T \cdot U \cdot y}{u \cdot \|y\|^2}\right) dy (< +\infty)$$

$$(68) \quad \text{où } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour chaque $u > 0$, φ_u est continue et bornée (par $\int \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-u\|y\|^2} dy$). On aura donc convergence de $\mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{\varepsilon})]$ vers $\mathbb{E}[\varphi_u(U_\infty^\varepsilon)]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

7.2.2. Etude des $\mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{\varepsilon})]$.

On cherche à majorer uniformément en $n \in \mathbb{N}^*$ les quantités positives $\mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{\varepsilon})]$. pour cela on commence par poser, pour $u > 0$:

$$(69) \quad \Psi_u(U) = \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{y^T \cdot U \cdot y \geq u\|y\|^2\}}(y) dy.$$

On a alors, pour tout $u > 0$ et pour toute $U \in M(d)_s$:

$$(70) \quad \varphi_u(U) \leq \Psi_{\frac{u}{2}}(U).$$

Il suffit donc de considérer les quantités positives $\mathbb{E}[\Psi_u(U_n^{\varepsilon})]$. Notant :

$$(71) \quad H^{n,\varepsilon}(u) = \{(\omega, y) \in \Omega \times (\mathbb{R}^d - \{0\}) : y^T \cdot U_n^{\varepsilon}(\omega) \cdot y \geq \frac{u}{2}\|y\|^2\},$$

on a l'inclusion évidente suivante pour tout $n \geq 1$:

$$(72) \quad H^{n,\varepsilon}(u) \subset \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \{T_n^{\varepsilon} = k\} \right) \cup (H^{n,\varepsilon}(u) \cap \{T_n^{\varepsilon} = +\infty\}).$$

On obtient alors :

$$(73) \quad \begin{cases} \mathbb{E}[\Psi_u(U_n^{\varepsilon})] \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{\varepsilon} = k\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega) \\ \quad + \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{\varepsilon} = +\infty\} \cap H^{n,\varepsilon}(u)}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega). \end{cases}$$

On va étudier les termes de droite dans la proposition suivante.

Proposition 7.3. a) *L'application $(\omega, y) \rightarrow \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{\varepsilon} = k\}}(\omega, y)$ est, pour tout $n \geq n_0$ et tout $k = 0, 1, \dots, n-1$, $P \times \Lambda$ -intégrable (Λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$) et on a*

i) *pour $0 \leq k \leq n_1$:*

$$(74) \quad \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{\varepsilon} = k\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega) \leq L \cdot \left(\frac{1}{\xi^{2dqk}} \right)$$

$$\text{avec } L = \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq} c^{dq}} < +\infty.$$

ii) pour $n_1 + 1 \leq k \leq n - 1$:

$$(75) \quad \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{n,\epsilon} = k\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega) \leq L \cdot \frac{1}{\xi^{2dq n_1}} \cdot \left(\frac{1 - c_\epsilon}{\xi^{2dq}}\right)^{k - n_1}$$

$$\text{avec } L' = \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq(n_1+1)} c^{dq}} < +\infty.$$

b) Pour tout $u > 0$ on a :

$$(76) \quad \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{n,\epsilon} = +\infty\}} \cap H^{n,\epsilon}(u)}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega) \leq K\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \frac{1}{\xi^{2dq n_1}} \cdot \left(\frac{1 - c_\epsilon}{\xi^{2dq}}\right)^{n - n_1}$$

avec

$$K(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-u\|y\|^2} \cdot dy = \frac{\Gamma(dq)}{u^{dq}}.$$

Démonstration :

$$\text{a) Posons } I_k = \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{n,\epsilon} = k\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega).$$

1) Montrons d'abord le a) pour I_0 .

$$\{T_n^{n,\epsilon}(\omega, y) = 0\} = \{Z_n(\omega) \in E_n^{n,\epsilon}[X_{n-1}^{n,\epsilon}(\omega), Y_{n,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y)]\}.$$

$$\text{On a : } y^T \cdot U_n^{n,\epsilon}(\omega) \cdot y \geq (Y_{n,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y))^T \cdot C_n^n(X_{n-1}^{n,\epsilon}(\omega), \epsilon Z_n(\omega)) \cdot Y_{n,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y).$$

Par la suite, en faisant le changement de variable $y \rightarrow w = Y_{n,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y)$ pour ω fixé dans un ensemble de probabilité 1 ($y \rightarrow w(\omega)$ est une transformation linéaire bijective de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ pour P -p-s tout ω), on obtient, par la condition III après intégration par rapport à P :

$$(\|y\| \text{ est majoré par } \frac{1}{\xi} \|w\| \text{ et } |\det(D_n^n(X_{n-1}^{n,\epsilon}, \epsilon Z_n))| \text{ est minoré par } \xi^d).$$

$$I_0 \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2dq} \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|w\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-w^T \cdot C_n^n(X_{n-1}^{n,\epsilon}, \epsilon Z_n) \cdot w} \cdot 1_{\{Z_n \in E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon}, w)\}}(\omega, w) \cdot dw \cdot P(d\omega)$$

Or l'intégrale de droite s'écrit encore :

$$\int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|w\|^{d(2q-1)} \left(\int_{E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon}, w)} e^{-w^T \cdot C_n^n(X_{n-1}^{n,\epsilon}, \epsilon z) \cdot w} \cdot \lambda(dz) \right) \cdot dw \cdot P(d\omega)$$

(car Z_n a pour loi λ) d'où le résultat pour $k = 0$.

(On pose $w = r \cdot v$ avec $r > 0$ et $v \in S_{d-1}$ on utilise le fait que

$$\int_0^{+\infty} r^{d(2q-1)} \cdot e^{-r^2 \cdot v^T \cdot c(x, \epsilon z) \cdot v} \cdot dr = \frac{\Gamma(dq)}{(v^T \cdot c(x, \epsilon z) \cdot v)^{dq}}$$

puis la condition II).

On trouve donc :

$$I_0 \leq \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq} c^{dq}}$$

2) Montrons a) pour $1 \leq k \leq n_1$:

on a :

$$I_k = \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U_{n-1}^{n,\epsilon} \cdot y} \cdot 1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega)$$

par le même changement de variable $y \rightarrow w = Y_{n,0}(\omega)(y)$ on obtient :

$$I_k \leq \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|w\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-w^T \cdot U_{n-1}^{n,\epsilon} \cdot w} \cdot 1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\} \cap \{Z_n \notin E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon}, w)\}} \cdot dw \cdot P(dw)$$

(on a minoré $y^T \cdot U_{n-1}^{n,\epsilon} \cdot y$ par $w^T \cdot U_{n-1}^{n,\epsilon} \cdot w$).

On en déduit que le terme de gauche est majoré par :

$$\frac{1}{\xi^{2dq}} \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|w\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-w^T \cdot U_{n-1}^{n,\epsilon} \cdot w} \cdot 1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\}} \cdot dw \cdot P(dw).$$

En effet les variables aléatoires $U_{n-1}^{n,\epsilon}$ et $1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\}}$ sont $\sigma(Z_1, \dots, Z_{n-1})$ -mesurables, ce qui donne le résultat en conditionnant $e^{-w^T \cdot U_{n-1}^{n,\epsilon} \cdot w} 1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\} \cap \{Z_n \notin E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon}, w)\}}$ par rapport à $\sigma(Z_1, \dots, Z_{n-1})$ pour w fixé et en utilisant la condition II. D'où le résultat après k changements de variables.

3) Montrons a) pour $n_1 + 1 \leq k \leq n$: on a :

$$I_k = \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U_n^{n,\epsilon} \cdot y} \cdot 1_{\{T_n^{n,\epsilon}=k\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega).$$

D'après la partie 2) de la démonstration, en effectuant n_1 changement de variables on obtient :

$$I_k \leq \frac{1}{\xi^{2dq_{n_1}}} \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U_{n-n_1}^{n,\epsilon} \cdot y} \cdot 1_{\{T_{n-n_1}^{n,\epsilon}=k-n_1\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(dw).$$

Puis, par le même changement de variable $y \rightarrow w = Y_{n-n_1,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y)$ on obtient :

$$I_k \leq \frac{1}{\xi^{2dq_{n_1}}} \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|w\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-w^T \cdot U_{n-n_1-1}^{n,\epsilon} \cdot w} \cdot$$

$$1_{\{T_{n-n_1-1}^{n,\epsilon}=k-n_1-1\} \cap \{Z_{n-n_1} \notin E_{n-n_1}^{n,\epsilon}(X_{n-n_1-1}^{n,\epsilon}, w)\}} dw \cdot P(dw)$$

(on a minoré $y^T \cdot U_{n-n_1}^{n,\epsilon} \cdot y$ par $w^T \cdot U_{n-n_1-1}^{n,\epsilon} \cdot w$).

On en déduit comme précédemment que le terme de gauche est majoré par :

$$\frac{1 - c_\epsilon}{\xi^{2dq(n_1+1)}} \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|w\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-w^T U_{n-n_1-1}^{n,\epsilon} w} \cdot 1_{\{T_{n-n_1-1}^{n,\epsilon} = k-n_1-1\}} \cdot dw \cdot P(dw),$$

en utilisant la condition II $\lambda(E_{n-n_1-1}^{n,\epsilon}) \geq c_\epsilon$. D'où le a) ii) en itérant.

4) Montrons enfin le b) pour tout $n \geq n_0$: Dans un premier temps on montre que :

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-\frac{u}{2}\|y\|^2} \cdot 1_{\{T_n^{n,\epsilon} = +\infty\}}(\omega, y) \cdot dy \cdot P(d\omega) \leq \\ & \left(\frac{1}{\xi^{2dq}}\right) \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-\frac{u}{2}\|y\|^2} \cdot 1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon} = +\infty\}} dy P(d\omega). \end{aligned}$$

(On a posé $T_0^{n,\epsilon} = +\infty$).

Pour prouver cette inégalité on effectue le même changement de variable que dans 1) : $y \rightarrow w = Y_{n,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y)$; on minore $\|y\|$ par $\|w\|$ en utilisant la condition I et on conditionne par rapport à $\sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1})$.

Puis on itère le procédé en utilisant les parties 1) et 2). D'où le b).

■

On en déduit immédiatement de la proposition que l'on a, pour tout $n \geq n_0$ et tout $u > 0$:

$$(77) \quad \mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{n,\epsilon})] \leq K(n_1) + L' \cdot \sum_{k=n_1+1}^{n-1} \left(\frac{1 - c_\epsilon}{\xi^{2dq}}\right)^{k-n_1} + K\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \frac{1}{\xi^{2dq n_1}} \cdot \left(\frac{1 - c_\epsilon}{\xi^{2dq}}\right)^{n-n_1},$$

en posant $K(n_1) = L' \cdot \left(\sum_{k=0}^{n_1} 1/\xi^{2dqk}\right)$.

7.2.3. Passages à la limite (en $n \rightarrow +\infty$ puis en $u \rightarrow 0$)

On sait déjà que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{n,\epsilon})] = \mathbb{E}[\varphi_u(U_\infty^\epsilon)]$.

Sous la condition IV_q , on obtient , en faisant tendre n vers $+\infty$

$$(78) \quad \mathbb{E}[\varphi_u(U_\infty^\epsilon)] \leq K(n_1) + L' \left(\sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \left(\frac{1 - c_\epsilon}{\xi^{2dq}}\right)^k \right) < +\infty.$$

Comme l'expression de droite est indépendante de u , on en déduit, puisque pour toute matrice $d \times d$ symétrique définie positive U on a : $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi_u(U) = \varphi(U)$ avec

$$(79) \quad \varphi(U) = \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{y^T \cdot U \cdot y > 0\}} dy,$$

que

$$(80) \quad \mathbb{E}[\varphi(U_\infty^\varepsilon)] \leq L \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - c_\varepsilon}{\xi^{2dq}} \right)^k \right) < +\infty.$$

Or on a

$$\mathbb{R}^d \times \{\omega : \det(U_\infty^\varepsilon) \neq 0\} \subseteq \{(\omega, y) : y^T \cdot U_\infty^\varepsilon \cdot y > 0\}.$$

On obtient donc que :

$$\mathbb{E}[\det(U_\infty^\varepsilon)^{-q}] = \mathbb{E}[\det(U_\infty^\varepsilon)^{-q} 1_{\det(U_\infty^\varepsilon) \neq 0}] \leq \frac{1}{\Gamma(q)^d} \mathbb{E}[\varphi(U_\infty^\varepsilon)] < +\infty$$

D'où le théorème ■

7.3. Applications du théorème 7.1

Commençons par montrer le corollaire suivant :

Corollaire 7.4. *Sous les hypothèses (H.1.(2)), (H.2), (B.1) et (C) avec $I(y_0) < r$ et $\alpha_\varepsilon < \gamma^{2dq}$ on a :*

$$(\det(U_\infty(\varepsilon)))^{-q} \in \mathbb{L}^1(P),$$

où $U_\infty(\varepsilon)$ est définie dans la proposition 4.2., ne se limitant à la sous suite $(U_{\theta(n)}(\varepsilon))_{n \geq 0}$.

Preuve : On pose $D_i^n(x, z) = D_x \varphi(x, z + z_i^n)$, $B_i^n(x, z) = D_z \varphi(x, z + z_i^n)$ ($D_z \varphi(x, z + z_i^n)$) et $C_i^n(x, z) = C(x, z + z_i^n)$, où $(z_1^n, \dots, z_n^n)$ est le point extrémal associé à l'énergie I_n au point $y_0 \in \mathbb{R}^d$, I est donc vérifié.

D'autre part on a III avec $\xi = \gamma$. (car (C) est équivalent à : pour tous $(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta$ et tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, on a : $\|D_x \varphi(x, z)(y)\| \geq \gamma \|y\|$).

On a, sous l'hypothèse (B.1) :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T C(x, \varepsilon z + z_i^n) y \geq c \|y\|^2\}) \geq 1 - \alpha_\varepsilon,$$

pour tout $n \geq n_0$ et $1 \leq i \leq n - n_1$.

Ce qui entraîne II avec $c_\varepsilon = 1 - \alpha_\varepsilon$ et

$$E_i^n(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T C(x, \varepsilon z + z_i^n) y \geq c \|y\|^2\}.$$

La condition IV_q devient ici : $\frac{\alpha_\varepsilon}{\gamma^{2dq}} < 1$. □

Corollaire 7.5. *Sous les hypothèses (H.1.(2)), (B.1), (C) avec $\alpha_\varepsilon < \gamma^{4d}$ l'hypothèse (H₄) est vérifiée.*

Démonstration : Tout d'abord l'hypothèse $(H.1.(1))$ permet de montrer, pour chaque $0 < \varepsilon \leq 1$, existence et unicité de la probabilité invariante η^ε (voir le lemme A1.de l'annexe).

Nous procédons comme dans l'article A.Coquio et J.B.Gravereaux [3]. Nous sommes donc ramené à montrer, sous la loi $\tilde{P}^\varepsilon = P \times \eta^\varepsilon$:

$$(\varepsilon^2 \det \tilde{V}_n^\varepsilon)^{-2} \in \mathbb{L}^1(\tilde{P}^\varepsilon)$$

avec, pour tout entier n $\tilde{V}_n^\varepsilon(x, \omega) := U_n(x, \varepsilon Z_1(\omega), \dots, \varepsilon Z_n(\omega))$.

D'après A.Coquio et J.B.Gravereaux [3] ou J.B.Gravereaux [5], la propriété ci-dessus est vérifiée, pour chaque $\varepsilon > 0$ sous les hypothèses $(H_1(2))$, (B_ε) et (C) dès que $\alpha'_\varepsilon < \gamma^{4d}$ où α'_ε est défini dans l'hypothèse (B_ε) suivante :

(B_ε) Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\alpha'_\varepsilon := \sup_{x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in \mathbb{R}^d : y^T \cdot C(x, \varepsilon z) \cdot y \leq c \|y\|^2\}) < 1.$$

Or, l'hypothèse $(B.1)$ entraîne clairement $\alpha_\varepsilon \leq \alpha'_\varepsilon$. ■

Enfin, le théorème (7.1) nous permet de montrer ce dernier corollaire.

Corollaire 7.6. *Sous les hypothèses $(H_1(1))$, (H_2) , $(B.1)$, (C) avec $I(y_0) < r$ et un réel $\varepsilon_N > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_N[$ $\alpha_\varepsilon < \gamma^{2dq_0(2N+5)}$ alors l'hypothèse $(H.5(2q_0(N+2) + \eta))$ est vérifiée.*

Démonstration : Nous appliquons le corollaire en prenant $q = 2q_0(N+2) + \eta$ ■

A existence de la probabilité invariante :

Montrons, par deux méthodes, sous l'hypothèse $(H_1(1))$, l'existence d'au moins une probabilité invariante η^ε , pour chaque $\varepsilon \in]0, 1]$, associée à la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon(x))_{n \geq 1}$.

A1. Méthode utilisant des conditions de Foster :

D'après le théorème 2 de R.L.Tweedie [13], si la chaîne est "faiblement fellerienne" (c'est à dire si $f \in \mathcal{C}_b$ entraîne $f \in \mathcal{C}_b$, désignant la probabilité de transition de la chaîne) et si on a les "conditions de Foster" (F_1) et (F_3) suivantes, avec A compact, alors la chaîne admet au moins une probabilité invariante.

(F_1) Il existe un ensemble A de $\mathbb{R}^d$, une fonction mesurable positive g et un $\mu > 0$ tels que : pour tout $x \in A^c$ on ait $\int_{A^c} (x, dy)g(y) \leq g(x) - \mu$.

(F_3) $\sup_{x \in A} (\int_{A^c} (x, dy)g(y)) < +\infty$.

Sous l'hypothèse ($H_1(1)$) posons :

$$K = \sup_{x,z} \|D_z \varphi(x, z)\| < +\infty, \quad \delta = \sup_{x,z} \|D_x \varphi(x, z)\| < 1.$$

Soit enfin $M = K \int_{\mathbb{R}^\beta} \|z\| \lambda(dz) < +\infty$.

($H_1(1)$) entraîne (F_1) et (F_3) avec $g(y) = \|y\|$ et avec A la boule fermée de centre 0 et de rayon a si $a > \frac{M}{1-\delta}$.

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{A^c} \Pi^\varepsilon(x, dy)g(y) &= \int_{\{z: \|\varphi(x, \varepsilon z)\| > a\}} \|\varphi(x, \varepsilon z)\| \lambda(dz) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^\beta} \|\varphi(x, \varepsilon z)\| \lambda(dz) \\ &\leq \delta \|x\| + \int_{\mathbb{R}^\beta} \|\varphi(0, \varepsilon z)\| \lambda(dz) \\ &\leq \delta \|x\| + K \int_{\mathbb{R}^\beta} \|z\| \lambda(dz) \quad (\text{car } \varphi(0, 0) = 0) \\ &\leq \|x\| - \mu \end{aligned}$$

si $a = \frac{M + \mu}{1 - \delta}$ avec $\|x\| > a$ et $\int_{A^c} \Pi^\varepsilon(x, dy)g(y) \leq M + \delta a$ si $\|x\| \leq a$.

Remarque :

Les résultats de R.L.Tweedie [13] permettent également de montrer que ($H_1(1)$) entraîne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^q \eta^\varepsilon(dx) < +\infty,$$

ceci pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et pour tout $q \geq 1$.

A2. Méthode utilisant le théorème de Ionescu- Tulcea- Marinescu :

On note, pour $\beta > 0$,

$$B_\beta = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \|f\|_\beta < +\infty\}$$

où

$$\|f\|_\beta = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{1 + \|x\|^{1+\beta}} : x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

$(B_\beta, \|\cdot\|_\beta)$ est un espace de Banach.

On pose également, pour $\beta > 0$,

$$L_\beta = \{f \in B_\beta : m(f) < +\infty\}$$

où

$$m(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} : x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \right\}.$$

On pose, pour $f \in L_\beta$, $|f|_\beta = \|f\|_\beta + m(f)$. $(L_\beta, |\cdot|_\beta)$ est un espace de Banach.

En prenant $\beta = 1$, on voit facilement que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, si $f \in B_1$, alors $\Pi^\varepsilon f \in B_1$ et comme

$$\Pi^\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(x, \varepsilon z)) \lambda(dz)$$

on a :

$$\begin{aligned} \|\Pi^\varepsilon f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|f(\varphi(x, \varepsilon z))\|}{1 + \|x\|^2} \lambda(dz) \\ &\leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 + \|\varphi(x, \varepsilon z)\|^2}{1 + \|x\|^2} \lambda(dz) \end{aligned}$$

par le théorème des accroissements finis on obtient :

$$\|\Pi^\varepsilon f\|_1 \leq \|f\|_1 (1 + M'),$$

avec $M' = 2K^2 \int_{\mathbb{R}^d} \|z\|^2 \lambda(dz)$.

D'autre part, si $f \in L_1$, on obtient $\Pi^\varepsilon f \in L_1$ et

$$|\Pi^\varepsilon f|_1 \leq (1 + M') \|f\|_1 + \delta m(f) = \varphi \|f\|_1 + (1 + M' - \delta) \|f\|_1,$$

avec $\delta = \sup_{x,z} \|D_x \varphi(x, z)\|$.

On en déduit facilement qu'on peut appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu à B_1, L_1 et Π^ε ; voir J.P.Leguesdron [8] pour une approche plus détaillée avec des conditions similaires. On obtient par cette méthode de décomposition spectrale de l'opérateur Π^ε sur L_1 l'existence et l'unicité de la probabilité invariante η^ε ainsi que l'existence de $\rho \in]0, 1[$ et de $K > 0$ tels que :

$$|\Pi^{\varepsilon, n} f - \eta^\varepsilon(f)|_1 \leq K \rho^n,$$

pour tout n et tout $f \in L_1$.

Remarque :

On obtient simultanément, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ fixé :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\| \eta^\varepsilon(dx) < +\infty.$$

En considérant $\beta > 1$, $B_{\beta-1}$ et $L_{\beta-1}$ à la place de B_1 et L_1 on voit que $(H_1(1))$ entraîne $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{\beta+1} \eta^\varepsilon(dx) < +\infty$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.

Cette méthode nous permet également d'obtenir le résultat suivant :

Lemme A1. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact) on a l'égalité suivante :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n^\varepsilon(0))] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \eta^\varepsilon(dx).$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, si l'on définit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ comme étant $F = (f, 0, \dots, 0)$, alors $F \in L_1$. On a donc

$$|\Pi^{\varepsilon,n} F - \eta^\varepsilon(F)|_1 \leq K \cdot \rho^n.$$

Donc si l'on définit

$$L'_1 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) : \|f\| < +\infty \text{ et } m(f) < +\infty\}$$

où

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{1 + \|x\|^2}; x \in \mathbb{R}^d\right\}$$

et

$$m(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}; x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y\right\},$$

on a, si $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset L'_1$:

$$\|\Pi^{\varepsilon,n} f - \eta^\varepsilon(f)\|_1 \leq K \cdot \rho^n.$$

Enfin, comme

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n^\varepsilon(0))] - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \eta^\varepsilon(dx)| &= |(\Pi^{\varepsilon,n} f)(0) - \eta^\varepsilon(f)| \\ &\leq |(\Pi^{\varepsilon,n} f) - \eta^\varepsilon(f)|_{L'_1} \\ &\leq K \cdot \rho^n \end{aligned}$$

d'où le résultat.

References

- [1] G.Ben-Arous, Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus, *Ann. Sci. E.N.S.*, **21**, n° 2, 307–331, (1988).
- [2] K.Bitcheler, J.B.Gravereaux et J.Jacod, *Malliavin Calculus for Process with Jumps*, Gordon and Breach Publishers LTD, (1987).
- [3] A.Coquio et J.B.Gravereaux, Calcul de Malliavin et régularité de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **28**, n° 4, 431–478, (1992).
- [4] M.I.Freidlin et A.D.Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, (1984).
- [5] J.B.Gravereaux, Calcul de Malliavin et probabilité invariante d'une chaîne de Markov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **24**, n° 2, 159–188, (1988).
- [6] A.K.Grintsevicius, On the Continuity of Sum of Dependent Variables Connected with Independent Walks on Lines, *Theory Prob. Appl.*, **19**, 163–168, (1974).
- [7] Y.Kifer, A Discrete-time version of the Wenzell-Freidlin Theory, *Ann. Prob.*, **18**, n° 4, 1676–1692, (1990).
- [8] J.P.Leguesdron, Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec chocs élastiques en zéro, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **24**, n° 2, 159–188, (1988).
- [9] E.Le Page, Théoremes de renouvellement pour des produits de matrices aléatoires. Equations aux différences aléatoires, *Séminaires de Probabilités*, Rennes-I, (1983).
- [10] P.Malliavin, Stochastic Calculus of Variations and Hypoelliptic Operators, *Proc. Int. 1. Conf. on Stoch. Diff. Equa. Kyoto*, 195–263, (1976).
- [11] F.Norman, *Markov processes and learning models*, Academic Press. New York. 1972.
- [12] L.Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, (1966).
- [13] R.L.Tweedie, Invariant measures for Markov chains with on irreducibility asumptions, *J. Appl. Probab.* Special vol. 25A. Applied Probability. Trust, 1988.
- [14] W.Vervaat, On a Stochastic Difference Equation and Representation of Non-Negative Infinitely Divisible Random Variables, *Adv. Appl. Prob.*, **11**, 750–783, (1979).
- [15] M.Zakai, The Malliavin Calculus, *Acta Applicandae Math.*, **3-2**, 175–207, (1985).

- [16] D.W.Stroock, *An introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer-Verlag, (1984).