

JEANNE GUIET

L'algorithme de la division est-il un algorithme ?

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques », , p. 97-102

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993__3_97_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ALGORITHME DE LA DIVISION EST-IL UN ALGORITHME ?

Jeanne GUIET
Laboratoire PSYDEE — Paris

Résumé :

Doing a division calculation is a target which meets obstacles linked with the meaning of the operational technique itself. This research aims to determine the origins and the nature of the most frequent mistakes in order to analyse the procedures used by pupils when they have to divide. We will examine how the pupils interpret the learning of this operation, how the meanings are related themselves, and how they evolve. Our objective is to determine how the choice of the different divisions makes it possible to check the mental processes of the pupils, and to understand the sense that they give to these calculations. The exploration of the areas to which the mathematical concepts belong will be done according to the classification and the reflection on the sense that the children give to their knowledge of the algorithm.

L'étude de la division est réputée difficile. Son enseignement s'étend sur plusieurs années : abordé dès l'école élémentaire, on la retrouve dans les programmes du premier cycle. Cette opération donne bien des soucis aux instituteurs : les difficultés de compréhension éprouvées par les enfants les inquiètent et ne laissent pas les parents indifférents. Les performances des élèves ne sont pas fameuses et on s'étonne des erreurs qu'ils commettent en effectuant des divisions. Dans l'élaboration de leurs savoir-faire et de leurs savoirs mathématiques, les enfants saisissent d'abord certaines situations et relations simples qui jouent le rôle de modèles primitifs. A partir de ces premières conceptualisations, ils abordent des situations plus complexes, qui leur permettent d'enrichir le sens de leurs connaissances. C'est le cheminement que nous allons observer ici à travers les conduites des enfants dans 28 divisions.

L'étude de la division à l'Ecole Elémentaire se réduit trop souvent à la mise en place d'une technique opératoire. La connaissance d'un sujet individuel est fondamentalement un répertoire de schèmes, ou "organisations invariantes de la conduite dans une classe de situations données" (VERGNAUD, 1990). Celui-ci est en général très grand et beaucoup d'entre eux ont un domaine d'application restreint. Ils se développent et se transforment au cours de l'expérience et de la maturation, à cause de la résistance qu'opposent les situations nouvelles à leur traitement par les schèmes existants. Le développement cognitif s'analyse comme un enrichissement adaptatif par filiations et ruptures des invariants opératoires, des règles d'action, et des systèmes d'exécution et de contrôle des productions du sujet. Ce processus d'adaptation des schèmes consiste principalement en découvertes, combinaisons, décombinaisons et recombinaisons. Devant une difficulté imprévue, les élèves inventent et tentent de réparer leur procédure défaillante (VAN LEHN, 1990). Prenons l'exemple d'une division comportant un zéro intercalaire au quotient. Ce n'est pas le même schème qui génère les erreurs entre deux divisions dont la structure est similaire, et la réparation apportée par le sujet n'est pas la même.

Nous allons voir notamment que l'algorithme reste un schème d'efficacité locale, et n'a donc pas les propriétés de généralité et d'effectivité de l'algorithme enseigné. La connaissance est une adaptation. Ce qui nous intéresse est de comprendre comment "l'algorithme" révèle ses insuffisances

lorsque la complexité de la division s'accroît. Le travail sur le signifiant est décisif; l'élève ne peut conduire une division jusqu'au bout sans traces écrites. Ce sont aussi celles-ci qui permettent d'analyser les erreurs. Les schèmes des élèves n'en sont pas moins implicites, même quand ils s'appliquent à des signifiants. La construction de l'algorithme de la division offre un exemple d'analyse en termes de schème et de concept. Ce qui nous intéresse ici en dernier ressort, c'est l'identification et l'analyse des invariants sous-jacents au fonctionnement des schèmes. Chaque pas de l'algorithme de la division représente en fait une nouvelle situation de calcul, et c'est la mise en relation des différentes étapes qui permet de comprendre les procédures des élèves et leurs failles. Par exemple, "le schème partager/distribuer, fonctionne pour l'élève à condition que le dividende contienne le diviseur"; (" J. BRUN, F.CONNE, 1991).

L'objet de notre étude des comportements des élèves résolvant les situations de division, est de comprendre les ruptures principales qu'on peut prévoir. Nous envisageons les erreurs comme le résultat de conceptions qui, bien que fausses, persistent au cours de l'apprentissage. L'obstacle résulte d'une connaissance, d'une conception, et non pas seulement d'un manque de connaissance. L'existence de ces obstacles pose des problèmes didactiques : Comment éviter les obstacles? Doit-on le faire.? Peut-on tous les éviter ?

La division fait alterner plusieurs types de traitement (multiplications, soustractions), ce qui peut engendrer des risques de confusion. Ce qui est en jeu dans ces distinctions, c'est la signification des transformations effectuées. Les représentations des élèves, qu'elles soient spontanées ou qu'elles résultent d'un apprentissage, sont attachées aux conditions matérielles ou didactiques et aux techniques de calcul dont ils disposent. Notre but est de mettre en évidence les procédures effectives qui sont à la source des erreurs; celle-ci ne peut être vraiment atteinte si l'on en reste aux aspects syntaxiques de l'algorithme; il nous faut faire le lien entre les erreurs observées et les aspects conceptuels en jeu dans la procédure utilisée. Les catégories d'erreurs correspondent à divers contrôles des rapports entre dividende, diviseur, quotient et reste. Des travaux sont effectués, depuis quelques années, qui considèrent l'erreur comme un élément essentiel du processus didactique.

A l'enseignant un double problème se pose:

- Comment interpréter les erreurs des élèves ? Sur quoi nous renseignent-elles : sur le travail de l'élève, sur ses conceptions par rapport à la connaissance visée, sur la perception qu'il a des attentes du maître ?
- Quel comportement peut-on adopter face à ses erreurs ?

Présentation de l'épreuve

C'est une étude dont les épreuves sont données dans différentes classes, du Cours Moyen 1ère année, à la 5ème. L'expérimentation se déroule dans plusieurs établissements. La population étudiée est de 200 enfants âgés de 8 ans à 13 ans, dont 50 élèves de chaque niveau. La typologie des critères retenus pour les 28 divisions est la suivante : un seul chiffre au diviseur; reste nul ou non; quotient décimal ou non; cas du dividende inférieur au diviseur; zéro intercalaire au quotient; répétitivité du reste dans le dividende partiel; nombre de chiffres au dividende supérieur ou égal au diviseur pour le

calcul du premier chiffre du quotient. Les mêmes caractéristiques sont étudiées pour les divisions à 2 chiffres et plus, au diviseur.

Les principales difficultés envisagées lors de la construction du protocole sont ainsi relatives :

- à la longueur du nombre du diviseur, du dividende et du quotient,
- au zéro terminal ou intercalaire dans ces nombres,
- au nombre de chiffres à prendre en considération au dividende, en fonction du nombre de chiffres du diviseur, du zéro au quotient quand le dividende est inférieur au diviseur,
- au placement correct de la virgule au quotient si celui-ci est décimal,
- à la justesse du calcul.

Nous avons classé les erreurs des sujets et établi un codage qui permet d'en faire plusieurs analyses. Les résultats montrent que plusieurs difficultés indépendantes interviennent dans les erreurs, et que certaines d'entre elles entraînent des confusions dont l'analyse nous éclaire sur les conceptions des élèves. Elles appellent donc une attention didactique particulière.

Traitement des données de la recherche

Le codage concerne les 28 divisions. Les erreurs peuvent se produire à plusieurs niveaux et dans plusieurs occasions selon les caractéristiques du dividende, du diviseur et du quotient.

- Problème du calcul : La première question est celle de l'ordre de grandeur des différents chiffres du quotient. Puis, au cours de l'exécution de la tâche, on considère le calcul du dividende partiel avec les difficultés spécifiques que posent la multiplication et la soustraction.

- Problème de la virgule : La consigne était de faire la division au centième près. Coder une absence de virgule n'apparaît pas pertinent pour les classes de C.M.1 n'ayant pas reçu d'enseignements sur ce point. Nous codons si la virgule est bien placée ou non, nous identifions le mauvais placement, qui peut être dû à une mauvaise évaluation de l'ordre de grandeur du résultat, ou bien à une erreur dans la technique opératoire. Il est intéressant d'identifier à quel moment cette erreur apparaît et pourquoi.

- Problème du zéro

- soit un zéro est présent au dividende, au diviseur ou au quotient :

- Le zéro terminal du dividende n'est pas pris en compte : il n'est pas reporté au quotient.
- Le zéro intercalaire du diviseur n'est pas pris en compte : la multiplication par ce chiffre n'est pas effectuée; il en reste qu'on peut prédire dès le départ un mauvais ordre de grandeur au quotient.
- Le zéro terminal du quotient n'est pas écrit : par exemple, le zéro terminal du dividende n'a pas été reporté.

- soit le zéro n'est pas présent dans les nombres impliqués :

Le seul cas est celui du zéro à abaisser au dividende pour continuer l'opération : le zéro n'est alors pas pris en compte.

Après un tri à plat effectué pour chacune des 218 variables, un tri est effectué à partir des critères d'échec, afin de sélectionner les variables que nous retenons pour les analyses ultérieures.

Deux méthodes d'analyse statistique sont retenues :

- Classification hiérarchique (selon I. C. LERMAN),

Quelques résultats

Au C.M.1, la nature algorithmique représentée par les divisions longues est similaire à celle rencontrée quand le dividende possède un zéro intercalaire. La présence du zéro terminal est une difficulté similaire à une division qui requiert une certaine longueur de calcul. L'échec est donc lié au zéro. De plus, l'ordre de grandeur initial n'est pas maîtrisé : les autres difficultés s'ajoutent ainsi à ce problème. Dès le départ, l'apprentissage de la division se heurte au problème primordial du sens initial requis pour le calcul; c'est à dire l'évaluation du premier chiffre du quotient.

Au C.M.2, les premiers obstacles concernent les divisions comportant des diviseurs à trois chiffres et celles où les dividendes sont inférieurs aux diviseurs. Le problème de l'évaluation de l'ordre de grandeur initial reste considérable, ainsi que celui du calcul du zéro intercaire dans la partie décimale du quotient. Dans la catégorie des divisions les plus réussies, on relève celles qui possèdent des zéros intercalaires et terminaux au quotient. Les principaux mécanismes sont tout de même mieux installés que dans les autres niveaux de classe étudiés. Il n'en est pas de même en sixième, car ces divisions sont échouées de façon plus massive. Les divisions les plus réussies sont composées d'un chiffre au diviseur seulement. On retrouve aussi des problèmes liés au positionnement de la virgule au quotient, ainsi que ceux relatifs aux divisions dont le dividende est inférieur au diviseur. L'échec, globalement plus important en classe de sixième, offre des résultats très contrastés par rapport à ceux que l'on obtient en classe de C.M.2. Les enfants issus de la classe de C.M.2, ont des performances limitées à cette période d'acquisition. Ce phénomène demeure éphémère, dans la mesure où, un an après, les taux d'échec sont brutalement accrus pour les mêmes divisions. La division ne se réduit pas à un simple algorithme dont l'apprentissage serait facilité par la répétition des tâches associées. Pour les élèves de C.M.2, période à laquelle l'apprentissage se centre sur l'introduction des décimaux, le choix de la position de la virgule n'a pas de cohérence avec l'ordre de grandeur requis du quotient. Pour ceux qui sont en classe de sixième, le positionnement de la virgule juste avant, ou juste après le zéro, semble être le critère commun des similarités d'échec observées. Le problème de la virgule engendre d'une façon plus globale des ruptures dans l'ordre des difficultés du protocole considéré. En général, le mécanisme initial consistant à évaluer l'ordre de grandeur du dividende par rapport au diviseur est une difficulté qui vient se rajouter à d'autres caractéristiques d'échec, et ceci pour nos quatre niveaux de classe considérés.

Notre étude nous permet de souligner par ailleurs les différences de réussite selon le sexe des élèves, ou la soustraction posée ou non posée sous le dividende partiel. Les garçons possèderaient une plus grande maîtrise et une plus grande rapidité d'exécution pour les divisions les plus complexes. Par ailleurs, les filles réussiraient davantage certaines particularités comme le zéro au quotient entre autres. Le fait de poser la soustraction favorise la réussite aux divisions d'une façon générale. Seuls, les enfants qui maîtrisent l'algorithme sont capables d'effectuer une soustraction mentale qui suppose des capacités d'abstraction importantes.

Nos résultats montrent que la suite d'opérations que comporte une division est effectuée sans que le sujet comprenne les raisons de ce qu'il fait. Avec une répétition fréquente cependant, on arrive à comprendre certaines choses, les conditions d'une vraie automatisation étant non réunies. L'algorithme de la division, s'il se raffine de conditions particulières, comme les zéros au quotient, par exemple, va engendrer des actions spécifiques. L'idée d'obtenir des choses qui vont se dégénérer dans l'usage, est la preuve que l'algorithme n'est pas acquis, le schème quant à lui, est celui qui réussit. L'ensemble des classes d'erreurs (et des relations dissymétriques entre elles) de l'algorithme de la division écrite, recueillies grâce aux méthodes d'analyse de données telles l'analyse hiérarchique, l'analyse implicite et l'analyse factorielle de données, donne des résultats qui s'étayent et s'affermissent dans une perspective d'enrichissement didactique.

PROTOCOLE DES 28 DIVISIONS

$\begin{array}{r} 6 \overline{) 1} \\ 0 \end{array}$ DIV.1	$\begin{array}{r} 6 \overline{) 2} \\ 0 \end{array}$ DIV.2	$\begin{array}{r} 5 \overline{) 4} \\ 10 \end{array}$ DIV.3	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 8} \\ 30 \end{array}$ DIV.4	$\begin{array}{r} 365 \overline{) 5} \\ 15 \end{array}$ DIV.5
$\begin{array}{r} 2121 \overline{) 7} \\ 02 \end{array}$ DIV.6	$\begin{array}{r} 604 \overline{) 3} \\ 4 \end{array}$ DIV.7	$\begin{array}{r} 817 \overline{) 6} \\ 21 \end{array}$ DIV.8		
$\begin{array}{r} 1627 \overline{) 7} \\ 22 \end{array}$ DIV.9	$\begin{array}{r} 315 \overline{) 24} \\ 75 \end{array}$ DIV.10	$\begin{array}{r} 418 \overline{) 69} \\ 0400 \end{array}$ DIV.11		
$\begin{array}{r} 860 \overline{) 43} \\ 0 \end{array}$ DIV.12	$\begin{array}{r} 64 \overline{) 74} \\ 640 \end{array}$ DIV.13	$\begin{array}{r} 617 \overline{) 5} \\ 11 \end{array}$ DIV.14	$\begin{array}{r} 540 \overline{) 10} \\ 0 \end{array}$ DIV.15	

1363 40 163 34,075 0300	504 10 040 50,4 0	22100 85 510 260 0
200 0	DIV.17	DIV.18
DIV.16	13500 45 0 300 DIV.19	2625 25 125 105 0
54027 24 060 2251,125 122 027 30 60 120 0	121 243 1210 0,497 2380 1930 229	7020 202 0960 34,752 1520 1060 0500 096
DIV.21	DIV.22	DIV.23
4600 60 400 76,66 400 400 40	2416 45 166 310 400 400 40	53,688
DIV.24	DIV.25	
3180 7845 31800 0,40535 042000 27750 41150 1925	163604 5843 46744 28 0	403191 327 0761 1233 1079 0981 0
DIV.27	DIV.28	DIV.26

BIBLIOGRAPHIE

- AG ALMOULOU, S., L'ordinateur, outil d'apprentissage de la démonstration et de traitement de données didactiques, , Rennes I , Novembre 1992.
- BACHELARD, G., *La formation de l'esprit scientifique*, VRIN, 1938.
- BROUSSEAU, G., Eléments pour l'étude du sens de la division, *Article occasionnel n°6*, Tirage IREM, Bordeaux, 1989.
- BROUSSEAU, G., Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4.2., La Pensée Sauvage, Grenoble ,1983.
- BROUSSEAU, G., Représentation et didactique du sens de la division, *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, *Recherche en didactique des mathématiques*, Actes du colloque de Sèvres, P.47-64, Mai 1987.
- CONNE, F., Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.9, 1988.
- GRAS, R., Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques, *Thèse d'Etat* , Rennes I, 1979.
- LAHRER, A., Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique, *Thèse de l'Université de Rennes I*, Février 1991.
- VAN LEHN, K., *Muid bugs, the origins of procedural misconceptions*, The MIT Press, 1990.
- VERGNAUD, G., La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3, pp. 133-170, 1990.