

HARRISSON RATSIMBA-RAJOHN

**Hierarchies implicatives, niveaux significatifs et contributions Aide
à l'étude de problèmes de didactique des mathématiques**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques », , p. 103-139

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993__3_103_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HIERARCHIES IMPLICATIVES , NIVEAUX SIGNIFICATIFS ET CONTRIBUTIONS AIDE A L'ETUDE DE PROBLEMES DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Harrisson RATSIMBA - RAJOHN
Université de Bordeaux

Cet exposé est construit à partir de certains éléments d'une recherche constituant une thèse d'Université en Mathématiques et Applications, soutenue le 7 décembre 1992 à Rennes I : "Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative, Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions".

0. Introduction.

La spécificité de la plupart des objets d'étude de la didactique des mathématiques nécessite la construction d'une méthodologie statistique appropriée.

Actuellement il s'avère de plus en plus que cette spécificité est caractérisée par une certaine dissymétrie inhérente entre les différents objets, états ou processus qu'étudie la didactique. Cette dissymétrie joue alors un rôle déterminant dans les processus d'enseignement ou d'appropriation des connaissances.

Déjà, en 1981, nous avons établi le rôle dissymétrique que joue une stratégie par rapport à une autre : l'une, la commensuration, étant une bonne stratégie de base pour l'autre, le fractionnement de l'unité¹. Cette qualité de stratégie de base est constituée en grande partie d'obstacles; certains obstacles, s'ils sont mal gérés, transforment cette stratégie, plutôt, en savoir-obstacle au lieu qu'elle soit, par son rejet, l'élément déterminant du processus qui génère la signification de la nouvelle stratégie.

Plusieurs autres études ont porté sur des phénomènes de dépendances dissymétriques Gérard Vinrich en 1978, Danièle Coquin en 1982, Londeix en 1985, et toutes celles menées à Rennes ou depuis Rennes.

Il est vrai que, depuis longtemps, les analyses de données se basant sur des proximités ou des distances ont été nos outils privilégiés, bien qu'elles ne fassent apparaître que des rapports symétriques entre les événements. Mais ces symétries découlent normalement du caractère symétrique des distances et des proximités adoptées. Ces méthodes d'analyses (Analyse hiérarchique de similarité, analyse en composantes principales, corrélation, et en grande partie l'analyse factorielle des correspondances) ont été pertinentes et restent pertinentes pour dégager une première approche des structures globales des variables considérées; Mais elles s'avèrent insuffisantes pour mettre en relief des processus

¹ Ratsimba-Rajohn Harrisson, Doctorat de Troisième cycle en Mathématiques (Didactiques des mathématiques). Université de Bordeaux I. : *Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue d'une élaboration de situations didactiques.*, Juin 1981.

pertinemment dissymétriques, en soustrayant de nos investigations l'accès facile (car visuel) à ces processus, accès qu'offre par contre l'analyse implicative.

L'analyse implicative, à l'aide de son module analyse hiérarchique des cohésions implicatives a déjà fait un pas de plus dans la visualisation d'une forme de conceptualisation. C'est possible, grâce à sa capacité d'élaborer des classes de variables et de trouver des implications entre ces classes. Mais la pratique nous montre que le foisonnement des sous-classes et des classes de l'arbre hiérarchique des implications oblige à monter d'un degré "les conceptualisations", il suffit de se donner la possibilité de repérer certains niveaux où les regroupements devraient être plus intéressants car porteurs d'une signification plus pertinente que d'autres regroupements, en un mot repérer les niveaux "significatifs".

C'est cette première fonctionnalité d'aide à l'exploitation de l'analyse implicative que, entre autres, nous avons développée dans notre recherche menée avec le Professeur Régis Gras et dont nous rendrons compte en partie dans cet exposé.

Mais ces classes d'implications et ces niveaux significatifs sont d'utilité limitée si le chercheur n'arrive pas facilement à déterminer la caractéristique commune des items qui constituent une classe surtout si elle est significative. Notre deuxième apport consiste à doter l'analyse implicative de cette fonctionnalité qui permet d'obtenir la réponse à la question "qui ou quel sous-groupe de la population étudiée a contribué le plus à l'élaboration d'une classe d'implications donnée". La connaissance d'une caractéristique du sous-groupe d'individus facilitera la caractérisation des classes d'implications formées ou inversement la caractérisation de la structure des classes d'implications permettra de qualifier les groupes qui y ont contribué le plus.

Nous avons informatisé puis exploité ces fonctionnalités dans l'étude que nous avons menée à propos de l'ostension et des macles de contradictions.

En didactique avec Le professeur Guy Brousseau, nous avons développé la notion d'ostension. Nous l'avons introduite en 1977². L'ostension est la première méthode familière d'introduction. Mais il semble qu'elle perdure en se déguisant plus ou moins et en s'immisçant dans toutes les phases de l'enseignement d'une notion mathématique. A la limite, elle joue plutôt le rôle d'obstacle didactique, si nous nous référons, entre autres études, à la recherche très récente menée par Marie Hélène Salin et René Berthelot portant sur l'enseignement de l'espace et de la géométrie³. Ils ont distingué deux formes intéressantes de l'ostension, l'ostension assumée et l'ostension

² Ratsimba-Rajohn, D.E.A. de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux I:

-*Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, 1977

³ Salin M.H. et Berthelot R. L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse d'université, Bordeaux, 1992

déguisée, mais ils n'ont pas mentionné d'une façon explicite la raison de sa résistance. Pour notre part, à l'aide de la considération de ce que nous appelons macles de contradictions, nous avons avancé des propositions qui montrent pourquoi cette résistance perdure.

D'autre part, grâce à l'exploitation des fonctionnalités de l'analyse implicative que nous avons développées, nous avons vu des structures d'arbres hiérarchiques d'implications. Celles-ci reflètent des phénomènes d'obsolescence et certaines conséquences de l'ostension dont l'utilisation a été repérée durant le déroulement d'une séance didactique dont nous avons établi l'ingénierie.

Cet exposé, en raison du temps limité qui nous est imparti, sera centré sur certains points.

Ainsi nous évoquerons rapidement les bases théoriques de la procédure de repérage des niveaux significatifs. Nous parlerons ensuite des raisons des choix des concepts sur lesquels s'appuie le calcul des contributions des individus et celui de la détermination du groupe optimal pour une classe d'implications.

Nous montrerons après, arbres hiérarchiques d'implications à l'appui, pourquoi nous avons conjecturé l'existence d'obsolescence lors de la reproduction de la situation didactique.

1. Les niveaux significatifs

Etant donné un arbre hiérarchique de cohésions implicatives, (Graphique 1), dans ce foisonnement de classes et de sous classes, nous désirons faire ressortir rapidement lesquelles sont susceptibles d'être à considérer en premier lieu. Plus précisément, lesquelles sont plus porteuses de significations. Mais qu'entendons nous par "porteuse de signification"?

Repérage des niveaux significatifs

Le principe de repérage de niveaux significatifs dans un arbre de cohésions implicatives a été inspiré des travaux de I.C Lerman relatifs aux arbres hiérarchiques de similarité. Nous nous contenterons dans cet exposé de montrer, à partir d'un exemple, les étapes dans la procédure de repérage de ces niveaux significatifs où les classes formées sont "porteuses de signification" dans un arbre hiérarchique de cohésion implicative.

Ainsi, considérons 5 items : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec 104 individus de 4 classes de CM2, on a le tableau des occurrences

variables	a_j :	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
occurrence	n_j :	59	43	55	32	51

Nous possédons également le tableau des valeurs de cohésions implicatives suivant.

a5	0,998931		0,995453		
a4	0,977930	0,988733	0,999988		0,990077
a3	0,994702				
a2	0,998198		0,995990		0,992175
a1					
==>	a1	a2	a3	a4	a5

Nous signalons le choix que nous avons fait entre la cohésion implicative des paires orientées et l'intensité implicative de ces mêmes paires orientées. Ce choix découle de la cohésion implicative découle du fait que
primo : c'est un arbre hiérarchique de cohésion que nous analysons
secundo : Annie Lahrer⁴ a démontré que la cohésion implicative est une fonction croissante de l'intensité implicative. Or comme nous travaillons sur l'ordre des paires orientées, la conclusion que l'on tire sur l'une est encore valable pour l'autre et réciproquement.

Les paires orientées sont contenues dans l'ensemble PO suivant :

PO= {((a2,a1)),((a2,a3)),((a2,a5)),((a3,a1)),((a4,a1)),

((a4,a2)),((a4,a3)),((a4,a5)),((a5,a1)),((a5,a3)))}

La procédure d'analyse produit 4 niveaux et la représentation linéaire des classes et des variables se présentent ainsi:

⁴ Lahrer A. 1991, "Implication statistique et applications à l'analyse de démarche de preuve mathématique".
Thèse de Doctorat d'Université de Rennes I . UFR de Mathématiques

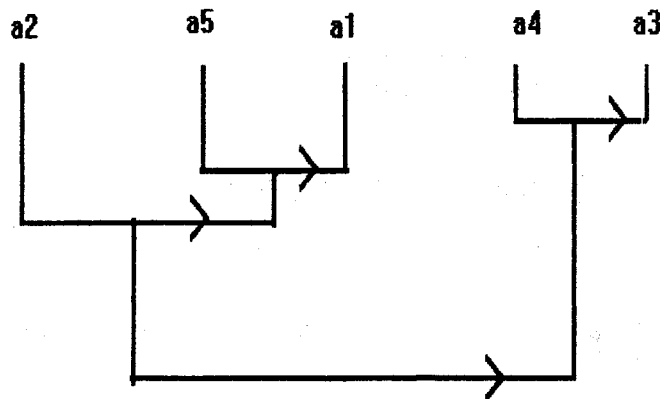
classes formées:

	H	classe	
Niveau	1	(a_4, a_3)	$V_1 = \{a_4, a_3\}$
Niveau	2	(a_5, a_1)	$V_2 = \{a_5, a_1\}$
Niveau	3	$(a_2, (a_5, a_1))$	$V_3 = \{a_2, a_5, a_1\}$
Niveau	4	$((a_2, (a_5, a_1)), (a_4, a_3))$	$V_4 = \{a_2, a_5, a_1, a_4, a_3\}$

Ce qui permet de visualiser l'arbre hiérarchique des cohésions implicatives de la façon suivante :

arbre hiérarchique des cohésions:

Afin de repérer les niveaux que nous qualifierons de significatifs, nous allons



distinguer des qualités d'ordre qu'induit la classification hiérarchique des cohésions implicatives sur les paires orientées.

En effet, il va de soi, qu'en regardant l'arbre nous dirons **intuitivement** que la classe réunissant a_2, a_5, a_1, a_3, a_4 est de bonne qualité si initialement nous avons eu $a_2 \Rightarrow a_3, a_2 \Rightarrow a_4, a_1 \Rightarrow a_3, a_1 \Rightarrow a_4, a_5 \Rightarrow a_4$ et $a_5 \Rightarrow a_3$.

Mais si initialement on a par exemple $a_2 \Rightarrow a_3$ et $a_2 \not\Rightarrow a_4$ ou à la limite $a_2 \Rightarrow a_3$ et $a_4 \Rightarrow a_2$, c'est qui est le cas ici, nous dirons que la classe obtenue est de moindre qualité.

L'existence de ces inversions sont, en fait, possibles. En effet la cohésion entre deux classes est décidée à partir des SUP des cohésions des paires susceptibles d'être réunies à ce niveau.

Dans le premier cas nous dirons que l'ordre induit par la constitution du niveau considéré est compatible avec l'ordre initial des paires orientées.

Dans le second cas, cette compatibilité n'existe pas, l'adéquation est rompue entre l'ordre initial global des paires orientées et le nouvel ordre induit par l'arbre hiérarchique.

Il nous faut alors "mesurer" quantitativement ces adéquations puis visualiser leurs évolutions.

Afin d'exposer simplement le principe sur lequel se base cette mesure, présentons dans le tableau suivant en colonne (1) l'ordre initial global des 10 paires orientées obtenues avec les 5 items. avec leurs cohésions respectives ordonnées dans la colonne (2):

Dans la colonne (3), repérons les **variables réunies** à un niveau, (au niveau 3 pour fixer les idées) et les paires orientées correspondantes (PO_3).

Puis, colonne(4), mettons le complémentaire de PO_3 , c'est-à-dire les paires orientées de **variables séparées** au niveau 3. Nous désignons cet ensemble par POS_3

Les Paires Orientées au niveau 3

(1) Les Paires Orientées (PO)	(2) Cohésions ordonnées	(3) Paires Orientées de variables réunies au niveau 3 (PO_3)	(4) Paires Orientées de variables séparées au niveau 3 (POS_3)
((a ₄ ,a ₁))	0,977930		((a ₄ ,a ₁))
((a ₄ ,a ₂))	0,988733		((a ₄ ,a ₂))
((a ₄ ,a ₅))	0,990077		((a ₄ ,a ₅))
((a ₂ ,a ₅))	0,992175	((a ₂ ,a ₅))	
((a ₃ ,a ₁))	0,994702		((a ₃ ,a ₁))
((a ₅ ,a ₃))	0,995430		((a ₅ ,a ₃))
((a ₂ ,a ₃))	0,995990		((a ₂ ,a ₃))
((a ₂ ,a ₁))	0,998198	((a ₂ ,a ₁))	
((a ₅ ,a ₁))	0,998931	((a ₅ ,a ₁))	
((a ₄ ,a ₃))	0,999988		

En résumé, avant d'arriver au niveau 3, nous avons déjà eu les différentes PO_H des variables réunies dans chacun des niveaux H précédents, ce qui nous permet de repérer les variables nouvellement réunies POR'_3

110

(1) Les Paires Orientées (PO)	(2) Paires Orientées de variables réunies au niveau 1 (PO ₁)	(3) Paires Orientées de variables réunies au niveau 2 (PO ₂)	(4) Paires Orientées de variables réunies au niveau 3 (PO ₃)	(5) Réunion des Paires Orientées de variables réunies jusqu'au au niveau 3 (POR ₃) (UPO _H)	(6) Paires Orientées de variables nouvellement réunies au niveau 3 (POR' ₃) (POR ₃ \POR ₂)
((a ₄ ,a ₁))					
((a ₄ ,a ₂))					
((a ₄ ,a ₅))					
((a ₂ ,a ₅))			((a ₂ ,a ₅))	((a ₂ ,a ₅))	((a ₂ ,a ₅))
((a ₃ ,a ₁))					
((a ₅ ,a ₃))					
((a ₂ ,a ₃))					
((a ₂ ,a ₁))			((a ₂ ,a ₁))	((a ₂ ,a ₁))	((a ₂ ,a ₁))
((a ₅ ,a ₁))		((a ₅ ,a ₁))	((a ₅ ,a ₁))	((a ₅ ,a ₁))	
((a ₄ ,a ₃))	((a ₄ ,a ₃))			((a ₄ ,a ₃))	

En mettant face à face les POS3 et les POR'3, nous pouvons quantifier l'**adéquation** entre l'ordre initial global et l'ordre institué par l'arbre hiérarchique au niveau 3.

Normalement, la compatibilité des deux ordonnancements voudrait que les paires de variables séparées aient des cohésions plus faibles que les variables nouvellement réunies.

Les Paires Orientées (PO)	Cohésions ordonnées	Paires Orientées de variables séparées au niveau 3 (POS ₃)	Paires Orientées de variables nouvellement réunies au niveau 3 (POR' ₃) (POR ₃ \POR ₂)	Compatibilité avec l'ordre initial global de la nouvelle place de ((a ₂ ,a ₅))	Compatibilité avec l'ordre initial global de la nouvelle place de ((a ₂ ,a ₁))
((a ₄ ,a ₁))	0,977930	((a ₄ ,a ₁))		oui	oui
((a ₄ ,a ₂))	0,988733	((a ₄ ,a ₂))		oui	oui
((a ₄ ,a ₅))	0,990077	((a ₄ ,a ₅))		oui	oui
((a ₂ ,a ₅))	0,992175		((a ₂ ,a ₅))		
((a ₃ ,a ₁))	0,994702	((a ₃ ,a ₁))		non	oui
((a ₅ ,a ₃))	0,995430	((a ₅ ,a ₃))		non	oui
((a ₂ ,a ₃))	0,995990	((a ₂ ,a ₃))		non	oui
((a ₂ ,a ₁))	0,998198		((a ₂ ,a ₁))		
((a ₅ ,a ₁))	0,998931			non	non
((a ₄ ,a ₃))	0,999988			non	non

Nombre de fois où il y a compatibilité d'ordre :	3	6
--	---	---

Nous dénombrons les moments où les paires orientées de variables nouvellement réunies ont une cohésion plus forte que les paires de variables séparées.

$\mu(3)=3+6=9$

En procédant de façon analogue le long des 4 niveaux, nous obtenons l'évolution des compatibilités entre l'ordre initial global et chaque ordre induit par le niveau.

$\mu(1)$	$\mu(2)$	$\mu(3)$	$\mu(4)$
9	8	9	0

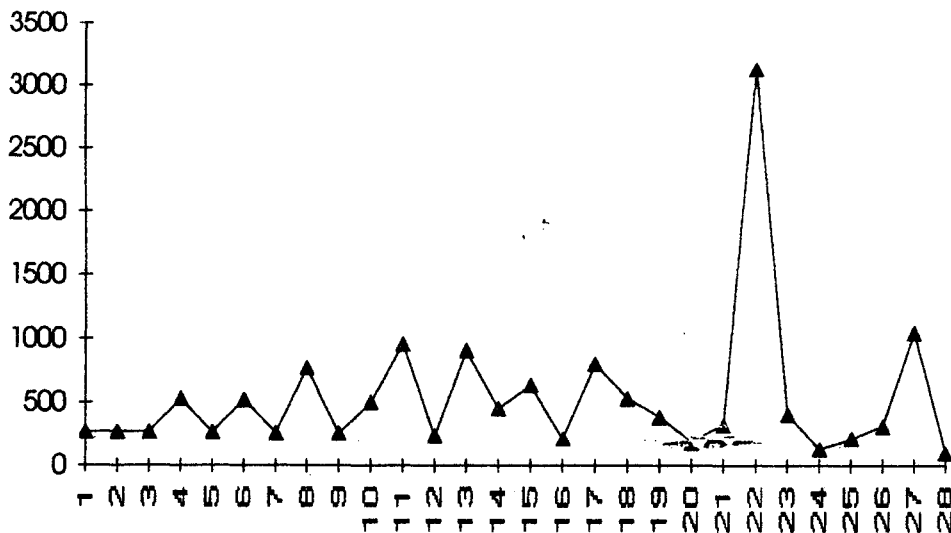
Dans ce tableau des évolutions, Nous remarquons deux maxima locaux.

Et ainsi nous obtenons les niveaux dans lesquels le regroupement en classe d'implications correspondrait à une certaine signification, à savoir: l'ordre induit par le regroupement évolue et arrive à un niveau de compatibilité maximale avec l'ordre initial global avant de se défaire.

Avec des données statistiques plus importantes qui génèrent un arbre hiérarchique plus touffu avec 28 niveaux, nous obtenons une évolution plus étendue faisant apparaître **des pics de compatibilités**:

Numéro du niveau	Nombre d'accord = Nombre de Compatibilité d'ordre	Repérage des maxima locaux	
1	269	←	1
2	268		0
3	267		0
4	528	←	2
5	263		0
6	522	←	3
7	258		0
8	766	←	4
9	254		0
10	494		0
11	959	←	5
12	229		0
13	906	←	6
14	452		0
15	634	←	7
16	209		0
17	799	←	8
18	529		0
19	382		0
20	185		0
21	321		0
22	3129	←	9
23	402		0
24	133		0
25	208		0
26	311		0
27	1045	←	10
28	95		0

Les informations contenues dans ce tableau correspondent à l'analyse hiérarchique présentée par le graphique n°1 (cf début § 1). Sous forme de graphie, nous obtenons :



Un tel phénomène est analogue à celui où deux processus évoluent et se mettent à un certain moment en phase : les deux processus sont ici, d'une part l'ordre initial global, (qui est fixe) et d'autre part l'ordre induit par chaque niveau de l'arbre hiérarchique des cohésions implicatives. Nous avons ainsi affaire à un **phénomène de résonance**: chaque fois que les deux ordres arrivent à un maximum d'accords de compatibilité, nous estimons qu'il y a une significativité digne d'être considérée.

En résumé et d'une façon générale, le processus de recherche de niveaux significatifs est analogue à celui où il existe un phénomène de résonance.

Au départ, les cohésions implicatives munissent les paires orientées d'un ordre Ω , mais la construction au niveau k d'une classe d'implication induit un nouvel ordre Ω'_k .

Le niveau k peut conserver l'ordre initial Ω et peut tout aussi bien le défaire. La recherche de niveaux significatifs consiste alors à repérer les niveaux k où l'ordre Ω'_k est la plus compatible avec l'ordre initial Ω , avant que le prochain niveau ne défasse cette compatibilité.

Nous étudions en fait un processus qui à un certain moment passe par un maximum local: lorsque les deux ordres Ω'_k et Ω sont momentanément les plus en phases. Nous dirons alors que le niveau k est plus porteur de signification.

Un programme informatique fonctionnant sur PC que nous avons conçu assure l'automatisation de ce repérage.

Et cette fonctionnalité nous a beaucoup aidé dans l'étude didactique des phénomènes d'obsolescence ou d'ostension que nous développerons plus loin.

Nous sommes actuellement conscient que plusieurs études sont encore à faire pour affiner cette notion de niveaux significatifs, ce

phénomène de résonance et surtout à propos de l'interprétation de ces processus.

Pour faciliter l'interprétation de ces divers regroupements significatifs, nous avons estimé qu'un repérage des individus qui ont contribué à l'élaboration des classes d'implications nous aidera à effectuer plus rapidement et plus efficacement ce travail d'interprétation.

2. Contribution d'individus

La deuxième fonctionnalité d'aide à l'exploitation de l'analyse hiérarchique des cohésions implicatives est le calcul automatisé des contributions d'un individu à l'élaboration d'une classe et celles d'un groupe a priori d'individus. Elle facilitera la caractérisation d'une classe d'implication ou réciproquement la connaissance de la classe d'implication facilitera la caractérisation d'un individu ou d'un groupe.

Détermination de la contribution d'un individu ou d'un groupe d'individus à l'élaboration d'une classe d'implication.

L'objectif est de se donner un moyen de mesurer la part que prend un individu dans l'élaboration d'une classe d'implications. A partir de la part de l'individu, nous déduisons la part que prend le groupe d'individus.

Nous avons pour cela abordé plusieurs pistes de recherche qui se résument en deux idées amenant à des impasses mais qui sont néanmoins fécondes.

La première était d'essayer d'obtenir le "poids" d'un individu en procédant à des calculs logiques des valeurs d'implications à partir des valeurs de vérité que prennent les items d'une classe.

Par exemple : soit a_1 , a_2 , a_3 3 variables et supposons $a_1 \Rightarrow (a_2 \Rightarrow a_3)$ une classe d'implication. Nous obtenons ainsi le tableau de calcul logique suivant:

a_1	a_2	a_3	$a_1 \Rightarrow (a_2 \Rightarrow a_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
0	1	0	1

Outre les deux cas triviaux :

a1	a2	a3	$a1 \Rightarrow (a2 \Rightarrow a3)$
1	1	1	1
1	1	0	0

Retenons notre attention sur les deux groupes combinaisons des trois variables, combinaisons aboutissant tous les deux à une valeur logique "1" pour $a1 \Rightarrow (a2 \Rightarrow a3)$.

Extrayons du tableau de calcul logique le premier cas de combinaisons:

a1	a2	a3	$a1 \Rightarrow (a2 \Rightarrow a3)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1

puis le deuxième cas suivant :

a1	a2	a3	$a1 \Rightarrow (a2 \Rightarrow a3)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	1
0	1	1	1

Si un sous-groupe d'individus, où chacun présente le premier cas de combinaisons, a un effectif important, alors ce sous-groupe va certainement peser lourd avec des informations qui ne sont pas "significativement intéressantes" par rapport à un autre sous-groupe minoritaire qui présenterait le deuxième cas de combinaisons beaucoup plus intéressantes.

Ainsi, avec ce procédé d'utiliser directement le "poids" d'un individu en fonction des calculs logiques des valeurs d'implications, un biais s'introduirait et ne serait pas facilement contrôlable en bout d'analyse. En plus, cette procédure ne correspond pas tout-à-fait à l'esprit qui préside aux calculs de la formation de la classe d'implication. Ceux-ci, rappelons-le, font appel au SUP des cohésions des paires susceptibles d'être réunies.

La deuxième idée est de procéder par analogie. D'une façon analogue aux variables supplémentaires des analyses factorielles des correspondances, on établit une colonne qui caractérise la catégorie particulière g1.

Soit $I = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_6\}$ l'ensemble des individus

Soit $G_1 = \{i_1, i_2, i_4, i_5\}$ l'ensemble des individus du groupe g1.

Soit $G_2 = \{i_3, i_6\}$ l'ensemble des individus du groupe g2.

Nous avons le tableau suivant

	a1	a2	a3	g1	g2
i1	1	1	0	1	0
i2	0	1	0	1	0
i3	1	0	1	0	1
i4	1	0	1	1	0
i5	0	1	0	1	0
i6	1	0	1	0	1

g1 : la variable supplémentaire repérant les éléments du premier sous-groupe

g2 : la variable supplémentaire repérant les éléments du second sous-groupe

On calcule les différentes implications et cohésions entre les gi et les ai, et on place les gi en fonction des résultats de ces calculs d'implication et de cohésion dans l'arbre des cohésions.

Des problèmes sont apparus durant le développement de cette deuxième idée.

- 1) Nous perdons l'information sur chaque individu;
- 2) Rien ne justifie la validité théorique de cette approche malgré que les résultats obtenus s'approchent de la réalité.

Mais cette analogie nous a donné l'idée de considérer ce qu'on appelle le profil d'individu sur un ensemble de caractères. Malheureusement nous avons vu dans la première idée (les calculs logiques directs) que le profil direct sur la totalité des items amène des résultats trop sujets à discussion. Mais en revenant aux principes de base même de la construction des classes d'implication et de l'arbre hiérarchique des cohésions et en développant l'idée de profil sur les paires orientées, nous étions amenés à ne considérer que certaines paires orientées. Pour une classe d'implication donnée, on considère la paire qui présente l'intensité implicative la plus forte.

Exemple : arbre hiérarchique de cohésions implicatives (Graphique 2.).

En effet, lors de la constitution de la classe, l'intensité implicative de cette classe est calculée avec le "sup." des intensités des paires orientées formées de variables nouvellement réunies.

Cette paire orientée particulière, nous l'avons appelée **paire orientée générique principale**

Exemple : Les dix paires génériques principales:

Niveau	Les Paires Orientées	intensités
1	$((a_9, a_8))$	0,999617
2	$((a_1, a_4))$	0,988155
3	$((a_3, a_6))$	0,997223
4	$((a_{11}, a_2))$	0,994893
5	$((a_{12}, a_3))$	0,991970
6	$((a_5, a_2))$	0,993024
7	$((a_{10}, a_4))$	0,995611
8	$((a_5, a_8))$	0,988673
9	$((a_7, a_1))$	0,972025
10	$((a_{12}, a_8))$	0,992346

Et puisque dans l'arbre hiérarchique des cohésions, toute classe est formée de sous-classes, nous avons considéré la suite des paires génériques principales des sous-classes. Elles forment ce que nous appelons **la suite générique de la classe**.

Exemple : Au niveau 8, la paire générique principale :

Niveau	La Paire Orientée	intensité
8	$((a_5, a_8))$	0,988673

La suite générique de la classe formée au niveau 8

$((a_9, a_8))$ $((a_{11}, a_2))$ $((a_5, a_2))$ $((a_5, a_8))$

Les suites génériques de chaque classe

Classe	Les Suites Génériques
--------	-----------------------

1	((a ₉ ,a ₈))						
2	((a ₁ ,a ₄))						
3	((a ₃ ,a ₆))						
4	((a ₁₁ ,a ₂))						
5	((a ₃ ,a ₆))	((a ₁₂ ,a ₃))					
6	((a ₁₁ ,a ₂))	((a ₅ ,a ₂))					
7	((a ₁ ,a ₄))	((a ₁₀ ,a ₄))					
8	((a ₉ ,a ₈))	((a ₁₁ ,a ₂))	((a ₅ ,a ₂))	((a ₅ ,a ₈))			
9	((a ₁ ,a ₄))	((a ₁₀ ,a ₄))	((a ₇ ,a ₁))				
10	((a ₉ ,a ₈))	((a ₃ ,a ₆))	((a ₁₁ ,a ₂))	((a ₁₂ ,a ₃))	((a ₅ ,a ₂))	((a ₅ ,a ₈))	((a ₁₂ ,a ₈))

Chaque suite générique est alors une trace suffisante de la constitution de sa classe, c'est un reflet suffisamment fidèle de l'histoire de la classe d'implication. Elle porte en elle les informations suffisantes pour représenter la classe. Il suffit ainsi de considérer le profil de chaque individu sur cette suite de paires génériques.

Le profil étant un vecteur, il nous faut maintenant déterminer les éléments de ce vecteur.

Ayant vu les obstacles engendrés par la première idée qui a consisté à faire des calculs logiques directs, nous avons introduit le concept de **respect d'un individu vis-à-vis d'une classe d'implication**.

Ce respect va être défini de la façon suivante.

Soit C_H une classe d'implication au niveau H

C_M et C_N les deux sous classes constituant C_H

V_M et V_N les ensembles des variables qui constituent C_M et C_N

(a_m, a_n) appartient à $V_M \times V_N$

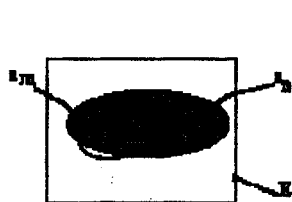
alors le respect ϕ_x d'un individu x vis à vis de la paire orientée $((a_m, a_n))$ est défini ainsi :

(Pour une raison technique, nous adoptons la notation $\hat{a}$ pour indiquer la **négation** de a , au lieu de la traditionnelle et conventionnelle $\bar{a}$)

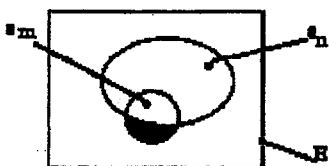
$\phi_X(a_m, \hat{a}_n) = 1$ si $a_m(x) = 1$ (partie ombrée du schéma 1)

$\phi_X(a_m, \hat{a}_n) = 0$ si $a_m(x) = 1$ et $a_n(x) = 0$ (partie ombrée du schéma 2)

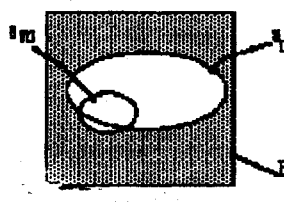
$\phi_X(a_m, \hat{a}_n) = p$ si $a_m(x) = 0$ et $a_n(x) = 0$ où $p \in [0; 1]$, (partie ombrée du schéma 3)



$\phi_X(a_m, \hat{a}_n) = 1$
schéma 1



$\phi_X(a_m, \hat{a}_n) = 0$
schéma 2



$\phi_X(a_m, \hat{a}_n) = p$
schéma 3

Actuellement nous avons choisi $p=(1/2)$, ce choix de la valeur p aurait dû être logiquement la valeur 1; car l'implication (Faux $\Rightarrow$ Faux) est en fait vraie. Mais pour distinguer les individus ayant (Faux $\Rightarrow$ Faux) de ceux qui ont au moins un item vrai tel que (Faux $\Rightarrow$ Vrai) ou (Vrai $\Rightarrow$ Vrai) et qui, intuitivement, **respectent** plus l'implication, nous avons pris p différent de 1 sans que p soit nul car en réalité l'implication (Faux $\Rightarrow$ Faux) n'est pas fausse. La valeur $p=0,5$ souligne une neutralité de l'individu qui ne satisfait pas simultanément les deux items. Ce choix de p est appelé à être étudié plus finement. (cf travaux actuels de Marc Bailleul.)

Ainsi pour obtenir le profil de l'individu x sur une classe d'implication, il suffit de construire le vecteur dont chaque élément est le respect de x vis-à-vis de chaque paire orientée de la suite générique de la classe. Ce vecteur nous l'appelons : **vecteur -puissance implicative d'un individu sur la classe CH** .

D'une façon analogue, nous avons défini le **vecteur puissance implicative d'une classe CH** : c'est le vecteur dont chaque élément est l'intensité implicative de chaque paire orientée qui constitue la suite générique de CH .

Au niveau 8 : C_8

items concernés	a_2	a_5	a_8	a_9	a_{11}
résultats individu x	0	1	1	0	0

Suite générique de la classe C_8	$((a_9,a_8))$	$((a_{11},a_2))$	$((a_5,a_2))$	$((a_5,a_8))$
Vecteur puissance implicative de l'individu x sur C_8	$\phi_x(a_9,\hat{a}_8)$	$\phi_x(a_{11},\hat{a}_2)$	$\phi_x(a_5,\hat{a}_2)$	$\phi_x(a_5,\hat{a}_8)$
Vecteur puissance implicative de l'individu x sur C_8	1	0,5	0	1
Vecteur puissance implicative de C_8	$\phi(a_9,\hat{a}_8)$	$\phi(a_{11},\hat{a}_2)$	$\phi(a_5,\hat{a}_2)$	$\phi(a_5,\hat{a}_8)$
Vecteur puissance implicative de C_8	0,999617	0,997223	0,993024	0,988673

Ainsi pour une classe C_H , nous avons face à face deux vecteurs : l'un représentant l'individu et l'autre la classe d'implication.
 Ainsi dans notre exemple :

$$[\phi_x(a_9,\hat{a}_8); \phi_x(a_{11},\hat{a}_2); \phi_x(a_5,\hat{a}_2); \phi_x(a_5,\hat{a}_8)]$$

et

$$[\phi(a_9,\hat{a}_8); \phi(a_{11},\hat{a}_2); \phi(a_5,\hat{a}_2); \phi(a_5,\hat{a}_8)]$$

A l'aide de ces deux notions, nous pouvons construire des outils de mesure de la proximité entre l'individu et la classe C_H .

Le premier outil que nous avons fabriqué est le repérage d'un individu de référence que nous appelons **l'individu idéal théorique**. C'est l'individu w dont chaque respect vaut 1 dans son vecteur puissance.

$$\forall i, \phi_w(a_{k(i)} \cdot \hat{a}_{k'(i)}) = 1$$

Le second outil est la distance entre l'individu x et la classe C_H . Cette distance nous la définissons ainsi:

$$d(x, C_H) = \left[\frac{1}{NG_H} \sum_{i=1}^{NG_H} \frac{\left[(1 - \phi_x^{(i)}) - (1 - \phi^{(i)}) \right]^2}{(1 - \phi^{(i)})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{notation : } \phi^{(i)} = \phi(a_{k(i)} \cdot \hat{a}_{k'(i)})$$

$$\phi_x^{(i)} = \phi_x(a_{k(i)} \cdot \hat{a}_{k'(i)})$$

NG_H = nombre de paires génériques de la classe C_H

C'est une distance de K^2 construite avec les $1 - \phi^{(i)}$. Le choix de $1 - \phi^{(i)}$ contre ϕ^i a été dicté par le souci de mettre en relief un phénomène qui est d'autant plus important que l'intensité d'implication en jeu est voisine de 1.

Le troisième outil est la notion de **contribution d'un individu x à la classe C_H** . Cette notion est construite à partir des deux premiers outils et s'exprime de la façon suivante:

$$\tau(x, H) = \frac{d(w, C_H)}{d(x, C_H)}$$

Remarquons :

(1) La contribution unitaire de référence est celle de l'individu idéal théorique w .

(2) Plus le profil de l'élève sur C_H est proche du vecteur puissance de la classe C_H , plus la distance est faible et plus la contribution est forte.

En première approche, nous avons aussi distingué quelques individus caractéristiques : €

individu idéal théorique w	$\tau(w,H) = 1$
individu idéal théorique observé x	$\tau(x,H) = 1$
individu idéal empirique e	$\tau(e,H) > 1$
ensemble des individus "idéal empirique"	$X_e(H) = \{ x \in E / \tau(x,H) > 1 \}$
individu idéal empirique extrémal x_w	$\tau(x_w,H) = \text{Sup}(\tau(x,H))$ $x \in E$
individu idéal empirique optimal x_0	$\tau(x_0,H) = \text{Inf}(\tau(x,H))$ $x \in X_e(H)$

3. LA CONTRIBUTION D'UN GROUPE D'INDIVIDUS G

A partir de la contribution de chaque individu, nous pouvons désormais définir la contribution d'un groupe d'individus G:

1

$$\tau(G,CH) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{x \in G} \tau(x,H)$$

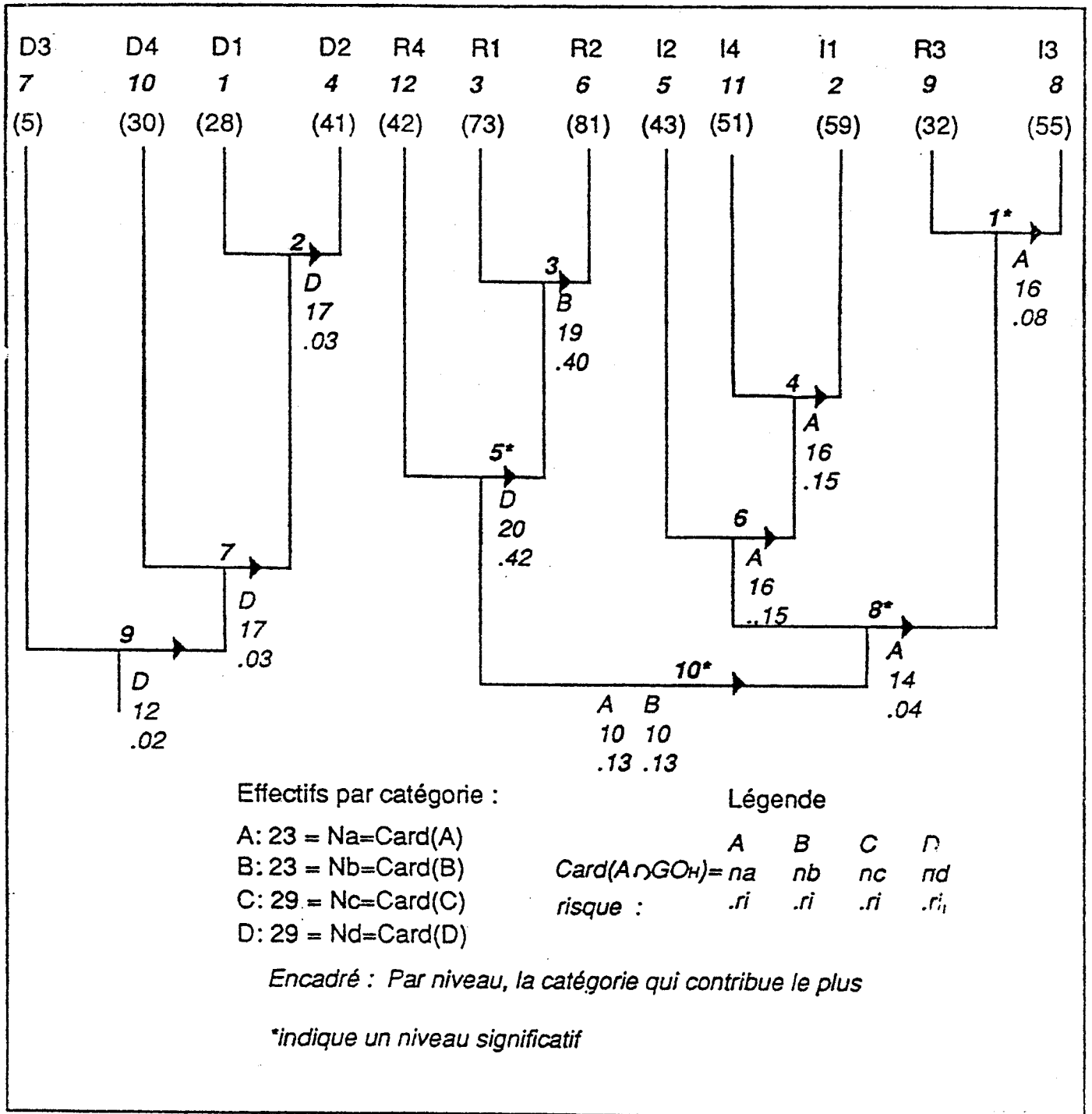
Puis nous avons construit un **groupe de référence** pour une classe CH : c'est le groupe optimal $G_0(H)$

C'est le groupe qui a le **maximum de contribution** tout en assurant avec son complémentaire **une variance interclasse maximale**.

$$\tau(G_0,CH) = \max_{G \in \mathcal{P}(E)} \tau(G,CH)$$

et

$$VE(G_0,\text{non}G_0) = \max_{G \in \mathcal{P}(E)} VE(G,\text{non}G)$$



Graphique 3

Nous avons démontré l'existence de ce groupe optimal.

Le repérage de ce groupe optimal sert à "**mesurer**" la "part" qu'a prise une catégorie donnée d'individus dans la construction d'une classe d'implication.

Sur l'arbre hiérarchique nous pouvons faire apparaître, à chaque niveau, la catégorie d'individus formant un groupe qui contribue le plus à la constitution de la classe.

Y seront représentés :

- l'*intitulé* de la catégorie
- l'*effectif* de cette catégorie
- le *risque* que l'on prend à déclarer cette catégorie comme celle qui a contribué le plus. C'est la probabilité de faire une erreur de décision.

(Graphique 3)

Ainsi l'existence de ce groupe optimal permet de **qualifier** la contribution d'un individu selon qu'il est dans le groupe ou non.

Par exemple, dans l'arbre hiérarchique suivant, nous avons repéré que l'individu DHAN est présent dans les groupes optimaux des niveaux 2,1,8,9,6,12,13. Cet individu a en effet utilisé d'autres procédures A_j que celles qui sont adéquates et il a aussi échoué: (E_j)

(Graphique 4)

En résumé, nous notons la dialectique dans l'évolution des notions.

*On part de la **quantification** de la contribution d'un individu.

*Ceci nous permet de **quantifier** un groupe d'individus..

La quantification du groupe nous permet d'obtenir un **groupe optimal de référence**.

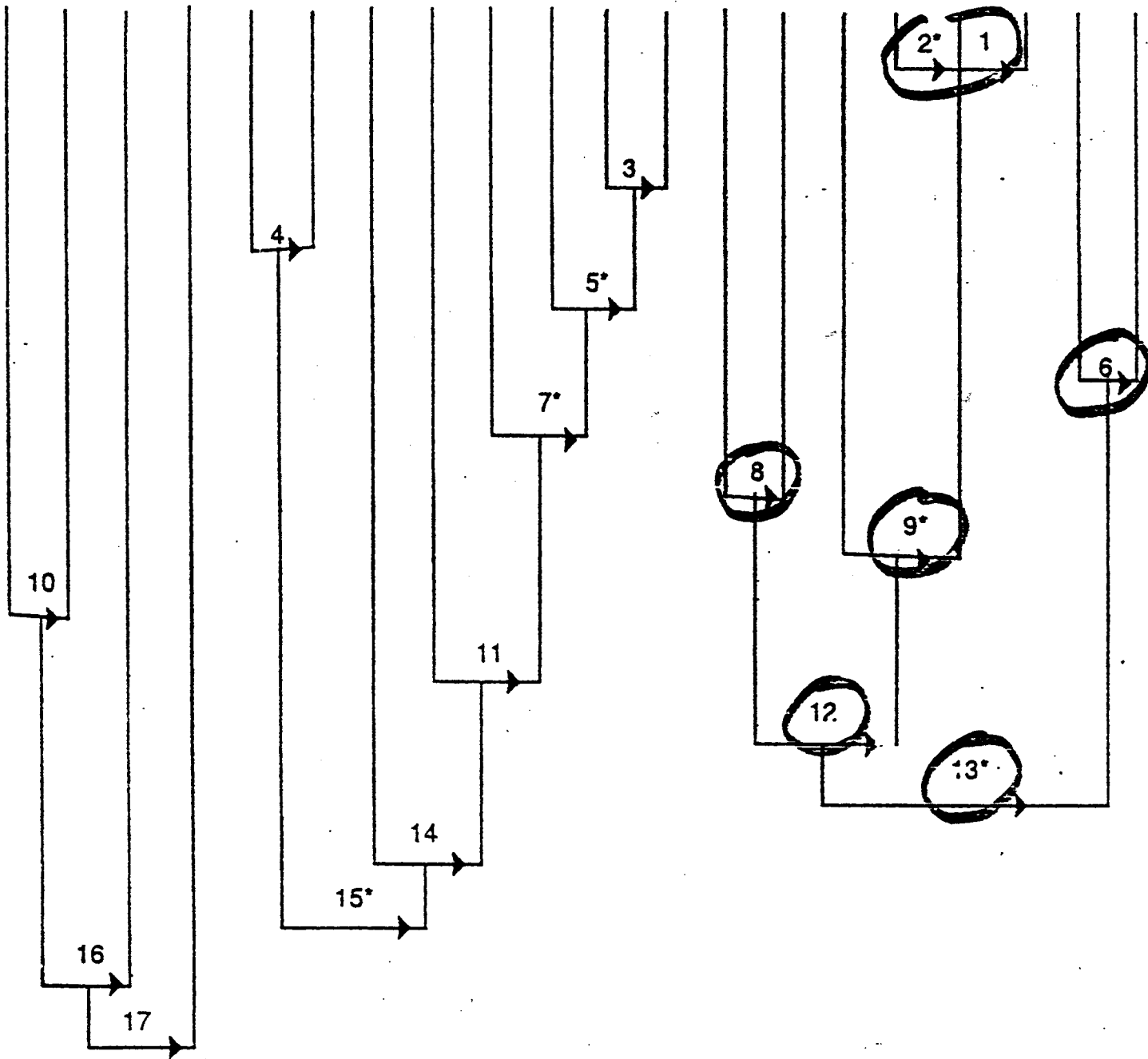
*L'existence du groupe optimal permet de **caractériser qualitativement** une catégorie donnée d'individus.

*Et aussi de **qualifier** la contribution d'un individu.

Le temps limité ne nous permet pas de développer les principes de démonstration de l'existence et de repérage du groupe optimal. De même, pour la procédure de caractérisation d'une catégorie donnée lorsqu'elle a significativement contribué ou non.

Nous ne pouvons pas également développer ici les analyses et les algorithmes qui nous ont permis d'informatiser et d'automatiser ces différentes fonctions de recherche de niveaux, de recherche de groupe optimal, de détermination de contribution de chaque individu et de caractérisation d'une catégorie donnée d'individus.

I2	I4	I1	I3	R4	D4	R3	D3	D1	D2	R2	R1	A4	E4	A1	A2	E1	E2	A3	E3
7	17	2	12	18	16	13	11	1	6	8	3	20	19	5	10	4	9	15	14
(5)	(7)	(11)	(11)	(11)	(15)	(6)	(4)	(14)	(17)	(21)	(21)	(7)	(18)	(4)	(7)	(8)	(8)	(14)	(23)



Classe D, 1991, 29 élèves, 20 variables

individu DHAN 8878

Graphique 4

Par contre, nous allons montrer quelques exploitations de ces fonctionnalités en procédant à l'étude de phénomènes de didactique des mathématiques.

3. EXPLOITATION DIDACTIQUE

En fait, **initialement**, nous avons mené les recherches relatives à l'analyse implicative dans le but de traiter et visualiser les phénomènes d'obstacles dans un processus didactique. Cette recherche sur les phénomènes d'obstacles a été aussi une suite de la problématique de notre thèse de 1981, lorsque nous avons traité l'étude des rapports entre deux stratégies, ou entre deux modèles d'action.

Mais cette problématique des obstacles dépendent d'une autre qui découlait également de cette étude de 1981: à savoir la manière dont on conçoit une **connaissance**.

A un certain moment nous nous sommes mis sur la piste de l'étude des **conceptions**. Mais après mûres réflexions, nous nous sommes restreints à un domaine plus limité en essayant de regarder ce qu'est **une connaissance sous-jacente à une stratégie**.

En effet, en 1981, nous avons avancé et utilisé le concept de **représentation d'une stratégie**. Nous l'avons définie comme étant l'ensemble dont les éléments sont les connaissances qui permettent la construction ou le choix de cette stratégie.

Ainsi, nous avons considéré un ensemble de connaissances qui permettent à un individu de rejeter les suites d'actions ou les stratégies qui ne permettent pas d'atteindre un résultat final désiré et relatif à une situation-problème.

Sous cette formulation "ensemble de connaissances", la représentation d'une stratégie semble être une **juxtaposition de connaissances**.

Et s'il est vrai qu'un élément de savoir est schématiquement constitué de règles implicatives élémentaires, par contre la seule considération de ces seuls liens logiques locaux, interne à chaque connaissance, relative à la situation-problème présente, nous semble être insuffisante.

En effet, ces éléments de savoir se concrétisent sous forme de règles, d'algorithmes, de procédures, de méthodes ou de procédés.

Mais ces éléments constituant le savoir-faire associé à la connaissance d'un concept mathématique, masquent les processus fondamentaux des choix au moment où l'on prend les décisions.

Or, ce sont ces processus de choix qui sont porteurs de **signification** pour toute action à exécuter, et par extension pour tout modèle d'action, toute stratégie et à la limite pour tout savoir. Et qui dit choix, dit rejet! Par conséquent, le **concept de signification** pour un objet mathématique est intimement lié au concept de **rejet**.

Ainsi un processus de choix n'évolue pas seulement **dans un système d'affirmations** mais aussi et surtout **dans un champ de contradictions** qui permettent de **décider des rejets** d'un procédé, d'un modèle d'action, d'une procédure, d'un algorithme ou d'une méthode.

Au début nous avons dénommé cette idée "**réseau de contradictions**", mais le mot réseau connote plus une idée d'ensemble organisé. Nous l'avons alors rejetée, car elle ne rend pas une image fidèle de **ces savoirs qui sont objectivement contradictoires mais qui coexistent, et qui s'interpénètrent partiellement** et que l'individu lui-même ne perçoit pas clairement, à la limite pas du tout. Pour cela nous l'avons appelé, depuis 1985, **maclé de contradictions**.

Ainsi, au lieu de confiner les connaissances associées à une notion, dans un système d'affirmations, nous avons choisi de mettre en exergue la **coexistence** d'éléments contradictoires afin de mieux appréhender le rapport que vit un élève avec une notion mathématique.

Nous n'allons pas narrer ici les différentes histoires ou anecdotes que nous avons relevées pour montrer l'existence ordinaire des macles de contradictions, et pour illustrer comment elles ont été plus ou moins maltraitées.

Par contre nous allons pointer un fait, qui a été rapidement traité dans le texte de la thèse. Ce traitement rapide a été fait car nous nous sommes volontairement limité à des illustrations de son existence et de son importance afin qu'elle soit considérée. Nous avons voulu réserver les études approfondies et systématiques de cette notion de macle de contradictions à l'étape suivante de notre recherche.

Ce que nous voulons relever ici est le fait suivant. On a démontré que si dans un système théorique il existe deux propositions contradictoires alors ce système est qualifié de système contradictoire. C'est à dire toute proposition de ce système est à la fois vraie et fausse.

Le résultat en lui-même n'a pas l'air d'être important. Mais pour nous, elle démontre que si deux faits contradictoires coexistent dans la réalité c'est que l'individu travaille, sur deux systèmes distincts qui ne se fusionnent pas.

Exemple.

Bernard Cornu a demandé à des élèves de seconde de comparer deux nombres :

1 et 0,9999...999999....

On a eu comme réponse:

"1 est plus grand, mais souvent on dit qu'ils sont égaux"

Une autre réponse:

"1 est plus grand mais on peut démontrer qu'ils sont égaux"

Ces élèves placent deux déclarations: " 1 est plus grand" d'un coté et "1 et 0,999....999... sont égaux " de l'autre dans leur système respectif.

Le premier système, c'est celui d'une connaissance intuitive du moment de l'élève. Dans ce système, "1 est plus grand". Le second système : c'est le système de la théorie mathématique dans ce système : "Les deux nombres sont égaux" et plus précisément : " on démontre qu'ils sont égaux". Chez ces élèves, ces deux systèmes ne fusionnent pas. D'où la non-perception de la contradiction, par conséquent de celle de l'existence d'une macle de contradictions.

Nous voulons noter que, pour nous, les macles de contradictions se placent à toutes les phases de l'apprentissage. Ceci diffère de la position habituelle qui est liée la contradiction avec la phase de preuve ou de démonstration (cf. Balacheff, G.Arsac, ...).

Mais nous voulons souligner que le principal problème est de savoir comment basculer d'une contradiction non perçue, c'est à dire d'une macle de contradiction, vers une contradiction perçue. (Audibert distinguait contradiction observée et contradiction analysée)

Pour qu'il y ait bascule, il est nécessaire que l'élève fusionne ses deux systèmes indépendants en un seul. C'est à dire il est nécessaire qu'il reconstruise un système de connaissances en modifiant certains éléments, en ajoutant d'autres, en rejetant certains. Actuellement ce processus de fusion est laissé à la charge de l'auto-organisation de l'élève.

Dans cet exposé, nous nous sommes arrêté un peu plus sur cette condition de coexistence de contradictions, car nous estimons que la prise en considération de ces coexistences, donc des macles de contradictions, aidera le didacticien et l'enseignant dans la manière d'appréhender les processus d'apprentissage. Cette prise en considération indique, pour nous, une piste de recherche que nous devons suivre dès à présent. Nous ne pouvons pas nous étendre sur ce sujet qui à lui seul prendra plus d'une heure.

Mais ceci nous amène à l'étude de la notion d'ostension. Nous n'allons pas nous y attarder en raison du temps attribué. Nous voulons juste souligner pourquoi la méthode ostensive, qui est nécessaire en certaines phases de l'enseignement, résiste et parfois devient un obstacle.

Au préalable, notons l'évolution des définitions qui ont été proposés pour décrire la notion d'ostension.

la contradiction entre le concret et l'abstrait n'est principale que dans la mesure où le rapport du sujet et de l'objet nouveau est institué seulement au niveau de la représentation de l'objet présumé indépendant du sujet, et seulement si l'on suppose que la conception de la notion n'est qu'un résultat nécessaire (donc automatique) de sa perception: toucher, voir, modifier,....

...Les procédés issus des conceptions précédentes ne permettent que des interactions limitées, superficielles, ou familières avec des moyens tel que: image, schéma, graphe, discours, liste de propriétés ou d'axiomes. Les enseignants prétendent ainsi fournir "d'un coup" tous les éléments et les relations constitutifs de la notion visée.

Ce sont de tels procédés que nous qualifions d'introduction ostensive et que nous appelons ostension."⁵

Pour compléter notre première approche, rappelons ici une définition citée par Thierry Bautier dans un de ses textes (1988):

"L'ostension consiste en l'utilisation, dans une situation d'enseignement, de la capacité supposée de l'élève de percevoir certains objets et l'illusion que le fait qu'il les ait perçus est porteur d'une connaissance intellectuelle éventuellement générale et précise" ⁶

⁵-Ratsimba-Rajohn H. (1977), *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, DEA Université de Bordeaux I, éd. IREM de Bordeaux. (pp 7-8)

⁶ Thierry Bautier "Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale". in Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique, IMAG, Grenoble n°95, Mai 1988, paragraphe 255

Et cette fois-ci nous proposons:

L'ostension consiste à concevoir une forme d'auto-organisation de l'élève ou des élèves d'une classe comme se déclenchant automatiquement (à la limite comme un enregistreur-reproducteur) à partir d'une présentation du savoir que l'on considère comme un système d'affirmations à transmettre. (à la limite dans sa totalité, en petits morceaux, enrobé ou transformé).

L'étude de l'évolution entre ces trois définitions est à faire et est intéressante. Notons simplement que la troisième que nous avons introduite n'est possible que si nous prenons comme complément à la notion de système d'affirmation, le concept de macles de contradictions, et tout ce qui en découle. Et c'est sur ce concept que nous nous sommes appuyés pour mettre en relief la résistance de l'ostension.

En effet cette résistance de l'ostension provient du fait qu'on ne considère pas une macle de considération,, qu'on ne considère pas le traitement de coexistence de faits contradictoires, c'est-à-dire la juxtaposition simple d'au moins deux systèmes de connaissances. On ne considère qu'un système d'affirmations formé de règles, d'algorithmes, de méthodes, de procédures et mêmes de procédés. Et beaucoup d'enseignants présumant qu'il suffit de **montrer** et de **mémoriser** les éléments de ce système d'affirmations pour que l'apprentissage se fasse.

Mais ce qui est essentiel n'est pas la **manière de montrer** mais c'est le fait de considérer une notion mathématique comme un **objet** et celui de concevoir que **l'ayant vu** suffit à son adoption et éventuellement à sa maîtrise. Ainsi, pour nous, tant qu'on ignore les macles de contradictions, l'ostension traitera le problème d'appropriation de connaissances comme un **transfert** de connaissance, et ceci d'une façon analogue à un transfert d'objet d'un endroit à un autre: de celui qui sait vers celui qui ne sait pas.

Plusieurs manières d'enseigner existent. Beaucoup d'entre elles se disent actives, mais ce n'est pas toute activité qui amène une appropriation à son terme. Certaines activités arrêtent le processus d'apprentissage au niveau des constats d'échec ou de réussite. Elles laissent à l'élèves, donc d'une façon incontrôlée par l'enseignant, la prise en charge de la **généralisation nécessaire**. Ce ne sont là que d'autres formes d'ostension. Notons par contre que le fait d'organiser dialectiquement les situations didactiques en situation d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation est déjà un effort pour dépasser une simple méthode ostensive en essayant de contrôler les différentes phases de l'appropriation.

Mais il existe un problème sur l'utilisation de ces situations didactiques:

- nous les élaborons dans le cadre d'une dialectique entre l'action, la formulation, la validation et l'institutionnalisation ;
- nous les échafaudons à partir d'une ingénierie didactique qui agence les variables de commande afin que l'apprentissage d'une notion se fasse avec une signification;
- nous les construisons à l'aide de concepts tels que sauts informationnels, contrat didactique, analyse a priori, etc.

Et malgré ces éléments objectifs, nous sommes confrontés au problème de la reproductibilité: Un phénomène d'obsolescence semble apparaître.

Nous avons alors émis l'hypothèse qui expliquerait ce phénomène d'obsolescence. Elle reposerait sur la persistance et la résistance de l'ostension malgré la maîtrise que nous possédons à propos des variables de situation a-didactique.

En effet l'ostension semble s'immiscer d'une façon incontrôlée par le didacticien et d'une manière involontaire à travers les interventions **anodines** de l'enseignant.

Cette obsolescence nous l'avons repérée à l'aide de l'analyse hiérarchique des cohésions implicatives puis nous en avons pointé des indices lors du déroulement d'une séance qui avait pour objectif principal une approche significative de la notion de multiplication d'une fraction par une autre fraction. Les séances ont été destinées à 104 élèves de CM2, repartis sur deux ans, deux classes par an. Le dispositif est le suivant:

Années	1990	1991
Enseignants		
X	Classe A (23 élèves)	
Y	Classe B (23 élèves)	Classe D (29 élèves)
Z		Classe C (29 élèves)

Quoique nécessaire nous n'avons pas le temps d'entrer dans le détail des indices d'obsolescence observés durant le déroulement des séances. Par contre nous allons pointer ce que nous avons vu sur l'analyse hiérarchique implicative.

Nous avons posé cinq questions aux élèves quelques jours avant les séances afin de repérer leurs états initiaux avant la séance. Sur ces cinq, nous n'en avons conservées que quatre. Et retenons l'existence de deux procédures I et D: I note la méthode à intermédiaire, D celle qu'on appelle le procédé direct. Les variables retenues sur les quatre questions sont:

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
I1	I2	I3	I4
D1	D2	D3	D4
R1	R2	R3	R4

Ik : variables prenant la valeur 1 si l'individu utilise la méthode intermédiaire sur l'item k, sinon 0;
 Dk : variables prenant la valeur 1 si l'individu utilise le procédé direct sur l'item k, sinon 0;
 Rk : variables prenant la valeur 1 si l'individu a réussi l'item k, sinon 0

Alors nous partons de l'hypothèse de base suivante:

"Si la manière de mener les situations didactiques décrites dans le manuel de référence ne se modifient pas, nous aurons un état initial réel des élèves qui ne s'éloigne pas trop de l'état des acquis décrits dans le manuel de référence. Et dans ce cas nous devons avoir comme conséquence des comportements cohérents de la part des élèves face aux principales caractéristiques des items que nous avons proposées"

Ainsi d'une façon plus précise, sur les variables Ik, Dk et Rk, nous émettons les hypothèses suivantes:

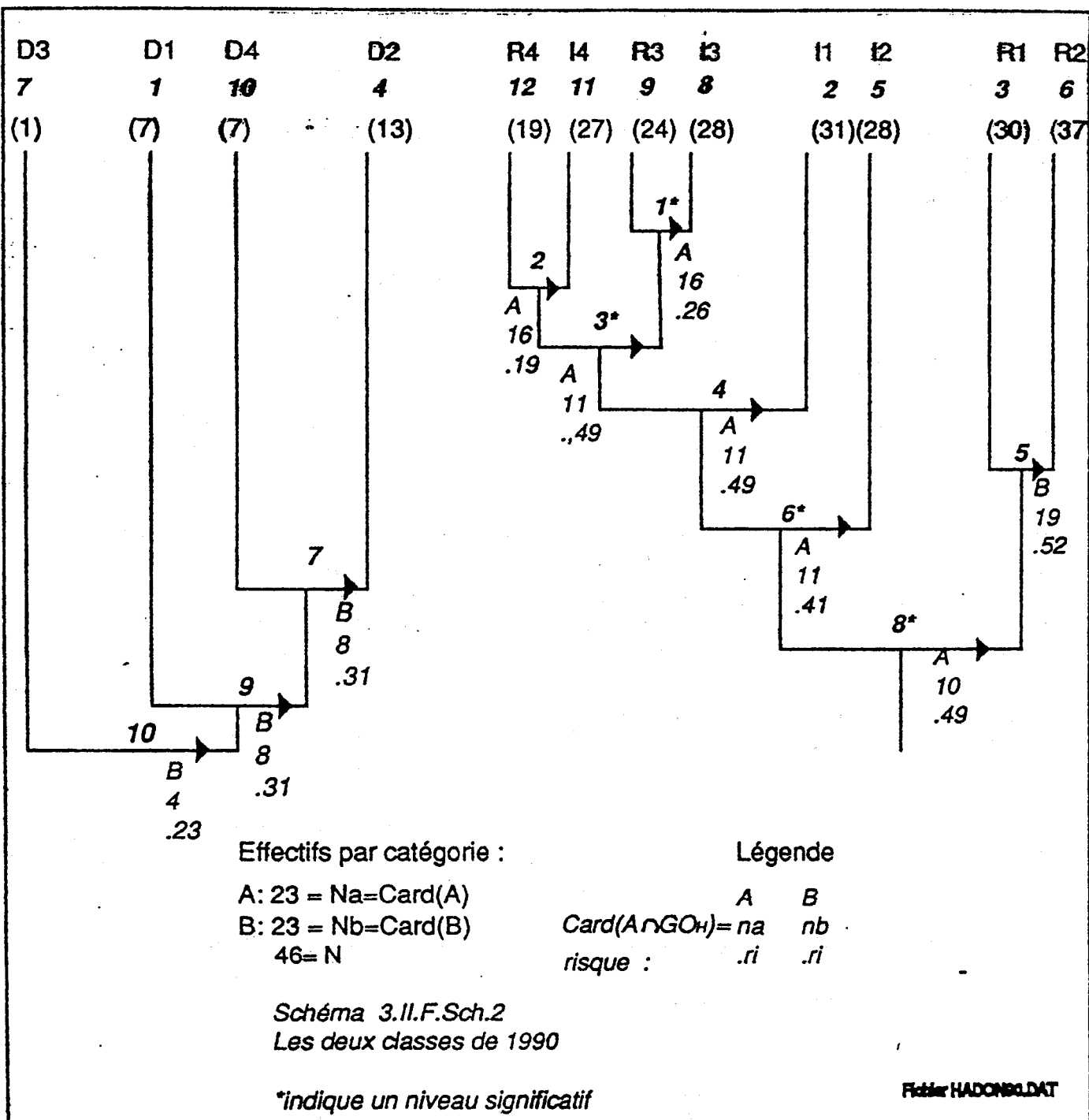
"Si la méthode à intermédiaire est la procédure qui a été institutionnellement mise en place durant les modules précédents, alors il est raisonnable d'en déduire que nécessairement une réussite implique l'utilisation de la méthode intermédiaire"

Nous émettons cette hypothèse dans le cadre suivant:

1) Dans une classe habituelle de plus de 20 élèves, l'utilisation d'une méthode qui est institutionnalisée n'assure pas forcément la réussite.

2) Avant la séquence 10.1, le procédé direct "d" n'était même pas accepté; alors son utilisation n'assure pas forcément la réussite.

Ces relations dissymétriques entre les procédures utilisées et les réussites nous incitent à analyser le phénomène avec une analyse implicative.



Graphique 5

Plus précisément, nous avons donc l'hypothèse suivante:

"S'il n'y a pas d'obsolescence, la structure hiérarchique entre les Ik, Dk et Rk ne se modifierait pas d'une façon qualitative d'une année à une autre.

D'où, après avoir procédé à une analyse hiérarchique implicative avec le programme informatique **CHIC**, nous avons l'arbre des cohésions suivant pour l'année 1990.

(Graphique 5)

Nous y observons les classes d'implications formées, les hiérarchies et les dissymétries attendues qui apparaissent et qui ne contredisent pas nos hypothèses relatives aux rapports des procédures et des réussites.

en résumé, nous avons:

Rk ==> Ik et les Di non liés avec la réussite.

Par contre en 1991

(Graphique 6)

Cette dissymétrie est rompue en inversant la tendance à tel point que la classe des comportements utilisant le procédé direct "D" implique cette année-là, la classe des réussites.

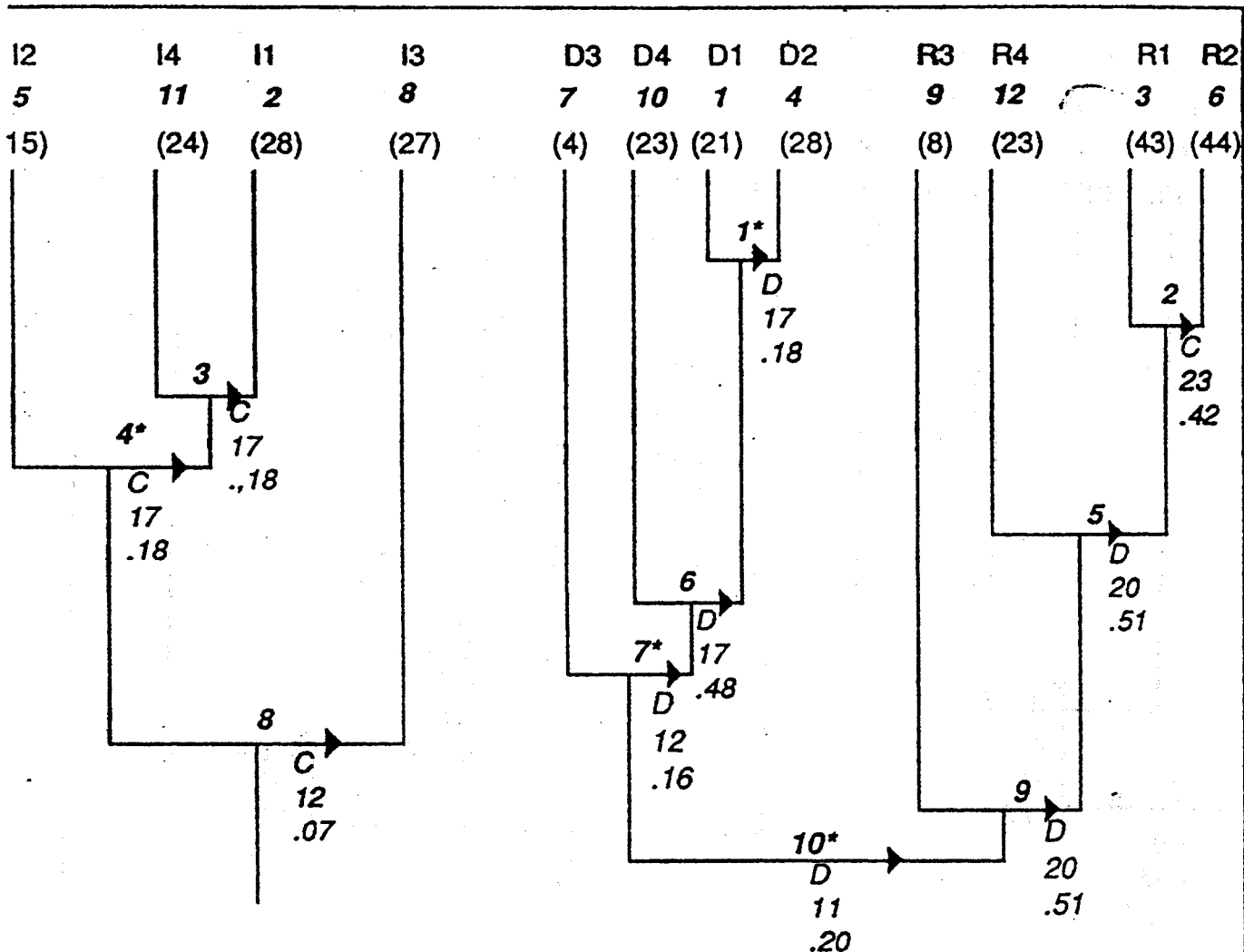
Notons seulement que cette implication ne s'est faite que globalement au 10ème niveau. mais soulignons que ce dernier regroupement se place toutefois à un **niveau significatif** donc digne de considération. Signalons que cette implication des procédures "D" vers les réussites est aussi l'indice qu'elles ne sont pas les seules à produire des résultats justes. L'autre procédure est un concurrent sérieux!

Ainsi le résultat de l'analyse implicative des comportements des élèves de 1991 contredit la conséquence que nous attendons de notre hypothèse de base, ce qui implique qu'en 1991 cette hypothèse de base n'est plus vérifiée.

La divergence entre l'état initial des élèves en 1990 et en 1991 est d'autant plus profonde que la comparaison des deux arbres hiérarchiques des cohésions implicatives nous montrent qu'en 1990 les relations dissymétriques entre les réussites et la méthode intermédiaire que nous évoquions plus haut apparaissent à chaque fois d'une façon **significative**, et les regroupements significatifs ne sont nullement du côté des procédés directs., alors qu'en 1991, outre l'inversion remarquée, des **niveaux significatifs**, ils ne sont nullement du côté des procédés directs.

Signalons toutefois le regroupement significatif des méthodes à intermédiaires I1, I2, I4, qui implique que cette méthode, en 1991, possède un statut différent de celui que possédaient les procédés directs en 1990, qui, eux, n'étaient pas regroupés significativement.

En effet, en 1990, le procédé direct n'était nullement institutionnalisé, fortement interdit même, non seulement selon le document de référence, mais aussi selon nos propres observations des séances. Ainsi son utilisation n'apparaît pas significative, si on regarde les regroupements en classe d'implications.



Effectifs par catégorie :

C: 29 = Nc=Card(C)

D: 29 = Nd=Card(D)

58 = N

Légende

C D

Card(C $\cap$ GOH)= nc nd

risque : .ri .ri

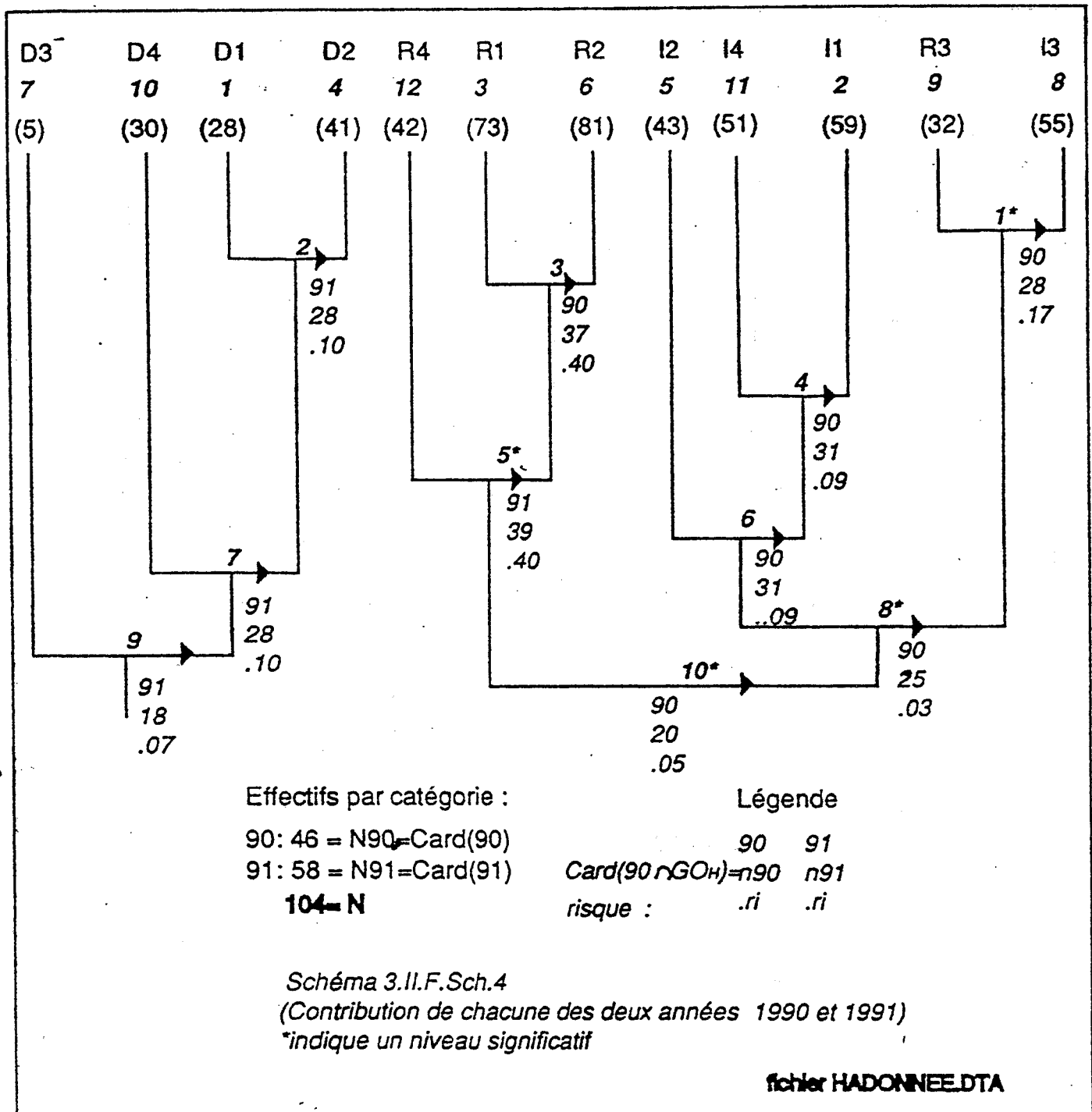
Schéma 3.II.F.Sch.3

Les deux classes 1991

*indique un niveau significatif

Fichier HADON01.DAT

Graphique 6



Malheureusement, nous n'avons pas pu refaire les observations en 1991. Nous n'avons pas pu confirmer de visu le type de rapport qu'ont entretenu les élèves ou les enseignants avec le procédé direct. Mais ce que nous avons décrit de l'arbre de cohésions de 1991, apparaît comme une trace d'au moins l'acceptation passive ou tacite de l'utilisation du procédé direct, tout en institutionnalisant la méthode à intermédiaire, institutionnalisation qui explique l'existence du regroupement significatif de I1, I2, et I4 en 1991.

Cette dernière conclusion n'est pas contredite par l'arbre hiérarchique qui est le résultat de l'analyse implicative des 12 variables Ik, Dk, Rk k variant de 1 à 4, lorsqu'on traite ensemble les comportements des 104 élèves en une seule analyse (les deux années 1990 et 1991 ensemble).

(Graphique 7)

Nous avons décidé de faire cette analyse d'ensemble pour visualiser une synthèse en repérant lequel des deux groupes d'élèves, ceux de 90 ou ceux de 91, contribue le plus à tel niveau d'implication.

l'analyse de cet arbre se résume ainsi:

- 1) les réussites proviennent en gros des méthodes intermédiaires (au 10ème niveau mais significatif). Ce qui indique que la méthode institutionnalisée "fait le lit" des réussites. Cette information est consolidée par le fait qu'il n'existe aucun niveau significatif du côté des procédés directs.
- 2) En consultant lequel des deux groupes d'élèves (promotion 1990 ou promotion 1991) contribue le plus dans la constitution des classes d'implications, nous observons que le regroupement des méthodes intermédiaires est assuré significativement par le groupe de 1990 et que celui des procédés directs par les élèves de 1991.

En résumé, cette érosion de l'utilisation de la méthode à intermédiaire en 1991, ou plutôt le dérapage vers le procédé direct, est l'indice d'une certaine obsolescence des situations didactiques proposées dans les modules du document de référence.

En effet si l'obsolescence n'existait pas ou apparaissait faiblement, on aurait toujours eu, en 1991, une structure dissymétrique de l'arbre de cohésions **semblables**, à celle de 1990. Mais comme nous venons de le montrer, ce changement de structure est déterminant puisque c'est, en fait, un **changement qualitatif**, d'où notre conclusion sur l'existence d'une certaine obsolescence.

La question relative à la raison de cette obsolescence se pose et nous avons montré, avec l'analyse implicative, des différences qui se placent au niveau des enseignants. Et ces différences au niveau des analyses implicatives coïncident avec des **micro-différences observées** au niveau des interventions des enseignants lors des déroulements des séances. Ces différences semblent montrer l'existence d'un processus d'ostension plus ou moins mal géré.

En résumé, si nous regardons le tableau de croisement suivant:

		A n n é e s	1990	1991	Structure des cohésions implicatives des comportements	Hypothèse explicative de la différence entre les enseignants X, Y, Z
Enseignants						
X			Classe A		Structure plus émiettée	Processus d'ostension plus ou moins mal géré
Z				Classe C		
Y			Classe B	Classe D	Structure plus consistante	
Structure des cohésions implicatives des comportements			Structure où la méthode à intermédiaire " I " fait le lit des réussites	Structure où les réussites proviennent des procédés directs "D"		
Hypothèse explicative de la différence entre les deux années : 1990 et 1991		Existence d'un Processus d'obsolescence				

les hypothèses qui sont inscrites sur ce tableau ont été confirmées par les observations des interventions des enseignants.

En conclusion :

Nous signalons que nous avons passé sous silence toute la partie ingénierie au cours de cet exposé. Son omission ne diminue en rien son importance. En effet l'analyse a priori que nous avons faite à propos des différents types de procédures et des connaissances sous jacentes a pris une place déterminante. Sans elle, nous

ne serions pas arrivé à nos conclusions actuelles relatives à l'obsolescence, l'ostension et les macles de contradictions. Sans elle, nous estimons que nous ne pourrions pas progresser dans notre effort de modéliser et de quantifier judicieusement les phénomènes de didactique. Ces deux objectifs, modéliser et quantifier, sont nécessaires. Et ils nécessitent une mise à plat claire, nette et précise des faits didactiques. Cette mise à plat sera faite à la fois par la voie de la statistique, de la probabilité et de l'observation. Grâce à un progrès dans la quantification, plusieurs pistes méthodologiques sont désormais disponibles. Entre autres,

- 1) l'exploitation approfondie de la théorie du jeu que nous avons déjà utilisée.
- 2) l'utilisation de la programmation dynamique stochastique qui est une méthode de recherche opérationnelle que nous avons déjà commencé à entrevoir et étudier.

Ces moyens méthodologiques que nous venons de développer ou de citer nous aideront à résoudre mieux, entre autres, la problématique de la dévolution à l'élève de la consistance de ses productions mathématiques, problématiques qui est aussi une suite naturelle de l'étude que nous venons de mener.