PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

STÉPHANE LE BORGNE

Codage des automorphismes hyperboliques du tore et nombres de Pisot

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-41

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993___2_A5_0>

Codage des automorphismes hyperboliques du tore et nombres de Pisot

Stéphane Le Borgne

Introduction

Coder un système dynamique $(T, \top, \mu)$, c'est le faire apparaître comme facteur à l'aide d'une application ϕ d'un système dynamique symbolique (X, σ, ν). De tels codages, lorsque (X, σ, ν) est d'une certaine forme et que ϕ est suffisamment régulière (voir [7]), permettent d'obtenir, pour les systèmes dynamiques codés, des théorèmes limites de nature probabiliste. Nous nous intéressons ici au codage des systèmes dynamiques $(\mathbb{T}^n, \top, m)$ où $\mathbb{T}^n$ est le tore de dimension n, $\top$ est un automorphisme hyperbolique de ce tore et m la mesure de Lebesgue. Le problème est d'obtenir et de décrire le plus précisément possible un codage symbolique de ces systèmes.

Dans le cas de la dimension 2, on dispose depuis l'introduction par Adler et Weiss de la méthode des partitions markoviennes, conduisant à un codage par un système symbolique du type "sous-shift de type fini". La notion de partition markovienne a été étendue à des systèmes dynamiques plus généraux par Sinaï, puis Bowen ([8]) et peut être appliquée aux systèmes $(\mathbb{T}^n, \top, m)$. Cependant, comme l'a montré Cawley [10], on ne peut pas trouver de partitions markoviennes géométriquement simples, sauf dans le cas de la dimension 2 et dans certaines situations particulières en dimension paire: donner explicitement un codage par cette méthode s'avère donc très souvent difficile.

Dans [3] et [4], Vershik propose une autre méthode plus algébrique, basée sur l'idée suivante: on considère un vecteur u_0 à coordonnées entières et le semigroupe G engendré par les $\top^i u_0 = u_i$ (où $\top$ est ici considéré comme un automorphisme de $\mathbb{R}^n$). Grâce à la relation sur les u_i fournie par le polynôme caractéristique de $\top$, tout élément de G s'écrit comme une combinaison linéaire des u_i à coefficients entiers naturels bornés, vérifiant une condition markovienne. On projette ensuite les éléments de G sur la feuille dilatante de $\top$ parallèlement à la feuille contractante. Ceci fournit un codage de l'ensemble H constitué de ces projections prises modulo $\mathbb{Z}^n$. Si ce codage est bijectif, on l'étend à $\mathbb{T}^n$ et on obtient un codage markovien de $(\mathbb{T}^n, \top, m)$ presque partout bijectif ; sinon il faut **quotienter** le sous-shift obtenu et il resterait à obtenir une représentation "sofique" du quotient, c'est-à-dire à un système symbolique lui-même quotient du codage markovien.

Ici, nous restreignons notre étude au cas où $\top$ n'a qu'une valeur propre de module > 1. Ce cas particulier a déjà été étudié par Bertrand-Mathis [2]. Nous reprenons cette étude en la rapprochant de la méthode proposée par Vershik.

Le plan du mémoire est le suivant:

Dans une première partie, nous rappelons quelques résultats nécessaires: généralités sur les systèmes sofiques (Krieger [9]), sur les β-développements (Parry [1]), définition du β-shift, étude du β-développement de β lorsque β est un nombre de Pisot et calcul de l'entropie topologique du β-shift.

Dans la deuxième partie, nous présentons la méthode de Vershik en étudiant en détail certains cas particuliers.

Dans la troisième partie, nous utilisons cette méthode, toujours dans des cas particuliers, en la reliant à la méthode des β-transformations utilisée dans [2]. Dans ces cas particuliers, nous précisons le codage de $(\mathbb{T}^n, \mathsf{T}, m)$ par un système dynamique (X_A, σ, ν), où X_A est le sous-shift de type fini mélangeant défini par une matrice A et ν est l'unique mesure sur X_A d'entropie maximale. Nous montrons comment cette matrice A est obtenue à partir du β-développement de β.

Enfin dans la dernière partie, nous étudions (dans le cas de la dimension 2) l'ensemble de $\mathbb{T}^2$ sur lequel le codage obtenu est bijectif.

Cette étude reprend et développe un travail entrepris dans le cadre d'un mémoire de DEA.

I. Préliminaires

I.1 Généralités sur les systèmes sofiques

Soit $S = \{1, \ldots, s\}$ un ensemble fini. Sur $S^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit considérons l'application

$$S^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sigma} S^{\mathbb{Z}} : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

On appelle sous-shift un sous-ensemble de suites Y de $S^{\mathbb{Z}}$ qui est fermé et σ-invariant. Un sous-shift est caractérisé par l'ensemble des mots "autorisés" à apparaître dans ses éléments.

Soit Z un sous-shift. On notera S_Z le plus petit ensemble S tel que $Z \subset S_Z^{\mathbb{Z}}$.

L'entropie topologique d'un sous-shift Z, sur lequel on fait opérer σ, est notée $h(Z, \sigma)$.

Définition: *Soient (Y, σ) et (Z, σ) deux sous-shift (inclus dans $S_Y^{\mathbb{Z}}$ et $S_Z^{\mathbb{Z}}$ respectivement). On dit que (Z, σ) est facteur de (Y, σ) s'il existe une application f continue surjective de Y sur Z telle que $f \circ \sigma = \sigma \circ f$.*

On dit que (Y,σ) et (Z,σ) sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme f de Y sur Z tel que $f \circ \sigma = \sigma \circ f$.

Définition: *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini de mots. Soit $Y \subset S^{\mathbb{Z}}$ un sous-shift. On dit que Y est de* **type fini** *si Y peut être défini par: "aucun élément de $\mathcal{E}$ n'apparaît dans une suite $y \in Y$. On écrira dans ce cas "Y est un STF". L'ensemble $\mathcal{E}$ représente l'ensemble des mots "interdits" du sous-shift Y.*

Quand les mots de $\mathcal{E}$ sont de longueur 2, il existe une matrice A, carrée, indexée par $S \times S$, à coefficients 0 ou 1 telle que $Y = X_A$, où X_A est défini par

$$X_A = \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \ \forall i \in \mathbb{Z},\ A(x_i, x_{i+1}) = 1\}.$$

On montre facilement que, quitte à prendre un alphabet plus grand, un sous-shift de type fini est de la forme X_A, i.e. est topologiquement conjugué à un X_A.

Pour tout sous-shift (Y,σ), on note $\mathcal{B}(Y,n)$ l'ensemble des mots de longueur n de Y et $\mathcal{B}(Y)$ l'ensemble des mots de Y.

Théorème 1: *(Curtis-Hedlund-Lyndon) Soient (Y,σ) et (Z,σ) deux sous-shift. Si (Z,σ) est facteur de (Y,σ) par une application continue f, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $g : \mathcal{B}(Y,n) \to S_Z$ tels que:*

$$\forall y \in Y,\ \forall i \in \mathbb{Z},\quad f(y)_i = g(y_{i+k}, \ldots, y_{i+k+n-1}).$$

Preuve: Notons π_0 la projection sur la coordonnée d'indice 0: $\pi_0(y) = y_0$. L'application $\pi_0 \circ f$ est continue et les sous-ensembles $\{(\pi_0 \circ f)^{-1}(i)\ i \in S_Z\}$ forment une partition de Y. Chaque $(\pi_0 \circ f)^{-1}(i)$ est ouvert et fermé, donc une réunion finie de cylindres. On en déduit immédiatement l'existence de $k, l \in \mathbb{N}$ tels que l'application suivante soit bien définie,

$$\mathcal{B}(Y, l+k+1) \xrightarrow{g} S_Z :\ C \longmapsto g(C) = \pi_0 \circ f(y), \text{ avec } (y_{-k}, \ldots, y_l) = C.$$

En d'autres termes $\pi_0 \circ f(y) = g((y_{-k}, \ldots, y_l))$. Le théorème est maintenant une conséquence du fait que f commute avec le shift.

□

Définition : *On appelle système sofique un sous-shift facteur d'un sous-shift de type fini. Un tel STF sera appelé recouvrement du système sofique.*

Soit $g : \mathcal{B}(Y,n) \to S_Z$, on notera g_∞ l'application g_∞ de Y dans Z définie par:

$$y \longmapsto g_\infty(y) = (g(y_i, \ldots, y_{i+n-1}))_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Exemples:

• $Y = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : 0\underbrace{11\ldots11}_{\text{impair}}0 \text{ n'apparaît pas dans } y\}$.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le sous-shift $X_A \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ associé. Soit alors $g : \mathcal{B}(X_A, 2) \longrightarrow \{0,1\}$ défini par $(0,0) \longmapsto 0$, $(1,0) \longmapsto 1$, $(0,1) \longmapsto 1$.

On a $g_\infty(X_A) = Y$ et évidemment $g_\infty \circ \sigma = \sigma \circ g_\infty$.

• On verra plus loin d'autres exemples de systèmes sofiques associés aux nombres de Pisot.

Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon permet de voir qu'un système sofique (Y, σ) est facteur d'un STF (X, σ) par une application g_∞, où g est une application surjective de S_X sur S_Y.

Plusieurs questions se posent. Etant donné un sous-shift Y, comment savoir s'il est sofique ? S'il est sofique, comment construire un STF dont Y est facteur. Existe-t-il des STF particulièrement intéressants, associés à Y de manière plus ou moins naturelle ? La construction suivante, due à Krieger, fournit à la fois un critère de soficité et un recouvrement naturel.

Soit un système sofique (Y, σ).

Commencons par fixer quelques notations. Soit B un mot de Y de longueur n. On peut indexer de manière arbitraire les lettres de B, $B = (b_k, \ldots, b_{k+n-1})$. Etant donnée une telle indexation, on définit

$$Z(B) = \{y \in Y : \ \forall j = k, \ldots, k+n-1, \ y_j = b_j\}.$$

Par ailleurs, on désignera par
$Z(b)$, l'ensemble $\{y \in Y : \ y_1 = b\}$, pour b un élément de S_Y,
$P_{]i,k[}$ la projection de $S_Y^{\mathbb{Z}}$ sur $S_Y^{]i,k[}$ et ses restrictions aux sous-shift de $S_Y^{\mathbb{Z}}$,
y_- (resp.y_+) l'image par $P_{]-\infty,0]}$ (resp.$P_{[1,\infty[}$) d'un élément y de Y,
Y^- (resp.Y^+) l'ensemble de ces y_- (resp.y_+).

La construction repose sur l'application Ω_+ de Y^- dans $\mathcal{P}(Y^+)$ qui, à un "passé" y_-, associe la partie de Y^+ formée des "futurs" admissibles pour y_-:

$$y_- \overset{\Omega_+}{\longmapsto} \{z_+ \in Y^+ : \ (y_-, z_+) \in Y\}.$$

Proposition 1: $\Omega_+(Y^-)$ *est un ensemble fini de parties de* Y^+.

Preuve: Soit $y_- \in Y^-$. Comme on l'a déja remarqué, il existe un STF X_A et une application g de S_X sur S_Y tels que $Y = g_\infty(X)$.

$$\begin{aligned}\Omega_+(y_-) &= \{z^+ : (y_-, z_+) \in Y\} \\ &= \{P_{[1,\infty[}(g_\infty(x)) : P_{]-\infty,0]}(g_\infty(x)) = y_-\} \\ &= \bigcup_{x_0 \in \Delta(y_-)} \{(g(x_i))_{i\geq 1} : A(x_0, x_1) = 1\},\end{aligned}$$

où l'on a posé $\Delta(y_-) = \{x_0 \in S_X : \exists (x_i)_{i\leq 0}\ \forall i \leq 0\ g(x_i) = y_i\}$.

L'élément x_0 est la valeur de la coordonnée d'indice 0 des suites du STF qui se projettent sur Y.

On a donc $\Omega_+(y_-) = \Omega_+(y'_-)$ si $\Delta(y_-) = \Delta(y'_-)$. Comme S_X a nombre fini de parties, on en déduit le résultat immédiatement.

□

Nous venons de montrer que si Y est sofique, alors $\Omega_+(Y^-)$ est fini. En fait, étant donné un sous-shift Z quelconque, la suite montre que, si $\Omega_+(Z^-)$ (défini de la même façon que pour Y) est fini, alors Z est sofique.

Introduisons maintenant le recouvrement de Y annoncé.

Son alphabet est l'ensemble

$$E = \{(a, A) \in S_Y \times \Omega_+(Y^-) : Z(a) \cap A \neq \emptyset\}$$

et il est défini par la matrice carrée indexée par $E \times E$ définie par:

$$M((a, A), (b, B)) = 1 \text{ si } B = \sigma(Z(a) \cap A), \ = \ 0 \text{ sinon.}$$

Pour qu'une suite $((y_i, D_i))_{i\in\mathbb{Z}}$ soit un élément de X_M, il faut et il suffit que, pour tout $j < k$, on ait $(y_i)_{i=j,\ldots,k} \in \mathcal{B}(Y)$ et

$$C_k = P_{[k,\infty[}(Z(y_j, \ldots, y_{k-1}) \cap C_j),$$

où l'on a posé $C_i = \sigma^{1-i} D_i$.

On vérifie facilement que, pour tout élément y de Y, la suite

$$(y_i, \Omega_+(\sigma^{i-1} P_{]-\infty,i-1]}(y))$$

est dans X_M. On en déduit que X_M est bien un recouvrement de Y: $Y = \rho_\infty(X_M)$, où ρ est l'application qui, à (a, A) élément de E, associe a. De plus, l'application

$$Y \xrightarrow{s} X_M : y \longmapsto (y_i, \Omega_+(\sigma^{i-1} P_{]-\infty,i-1]}(y)),$$

est une section de ρ_∞.

Nous allons maintenant montrer que le sous-shift de type fini X_M est relativement "proche" de Y.

Proposition 2: $\overline{s(Y)} = X_M$.

Preuve: Soit $B = (y_i, D_i), \ldots, (y_k, D_k)$ un mot de X_M. Il existe $y_- \in Y^-$ tel que $D_i = \Omega_+(y_-)$. Comme B est admissible on a $D_k = \Omega_+(\sigma^k(y_-, y_i, \ldots, y_{k-1}))$.

Soit $z_+ \in D_k \cap Z(y_k)$. On a $y = (y_-, y_i, \ldots, y_k, z_+) \in Y$ et $s(y) \in Z(B)$; d'où le résultat.

□

Pour tout mot $C = ((y_1, D_1), \ldots, (y_k, D_k))$ de X_M, posons $\rho(C) = (y_1, \ldots, y_k)$.

Il est clair qu'étant donné un mot $B \in \mathcal{B}(Y)$, l'ensemble des mots C de X_M tels que $\rho(C) = B$ a, au plus, le même nombre d'éléments que $\Omega_+(Y^-)$. On en déduit immédiatement la

Proposition 3: On a l'égalité des entropies $h(X_M, \sigma) = h(Y, \sigma)$, et l'inégalité $\mathrm{Card}(\rho_\infty^{-1}(\mathrm{y})) \leq \mathrm{Card}(\Omega_+(\mathrm{Y}^-))$.

Nous définissons un ensemble sur lequel ρ_∞ est bijective. Nous verrons plus loin que dans les "bons cas" cet ensemble est "gros".

Définition: *On appelle bloc finitaire (ou mot finitaire) un mot B, que l'on peut écrire $B = (b_{-k}, \ldots, b_0)$, tel que Ω_+ soit constante sur $Z(B)$.*

Un élément y de Y est dit finitaire si, pour tout entier j, il existe un entier k, $k < j$, tel que le mot $(y_k, \ldots, y_j)$ soit finitaire. Nous désignerons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments finitaires de Y.

On voit aisément que $\mathcal{F}$ est un G_δ.

Proposition 4: *Si $y \in \mathcal{F}$, l'ensemble $\{x \in X_M : \rho_\infty(x) = y\}$ est réduit à un élément.*

Preuve: Soit $x \in X_M$ tel que $\rho_\infty(x) = y$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, x_i est de la forme (y_i, D_i) et on a $D_{i+1} = \sigma(Z(y_i) \cap D_i)$. Soit $j \in \mathbb{Z}$ et $k < j$ tel que $(y_k, \ldots, y_{j-1})$ soit finitaire, et $z_- \in Y^-$ tel que $\Omega_+(z_-) = D_k$. On a

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= \sigma(Z(y_k) \cap D_k) \\ &= \sigma(Z(y_k) \cap \Omega_+(z_-)) \\ &= \Omega_+(\sigma(z_-, y_k)). \end{aligned}$$

De même $D_j = \Omega_+(\sigma^{j-k}(z_-, y_k, \ldots, y_{j-1})) = \Omega_+((y_k, \ldots, y_{j-1}))$, ce qui montre que l'on a nécessairement $x = s(y)$.

□

Nous allons maintenant étudier une classe particulière de systèmes sofiques.

Définition : *On dit que* (Y,σ) *est* **transitif périodique-dense** *si l'ensemble des points périodiques est dense, et s'il existe un élément* $y \in Y$ *tel que* Y *soit égal à la fermeture* $\{\sigma^k(y) : k \in \mathbb{Z}\}$.

En particulier, si Y est transitif périodique-dense, alors, pour tout couple (B,C) de mots de Y, il en existe un troisième D tel que la concaténation BDC soit encore un mot de Y. Ceci permet de démontrer la proposition suivante:

Proposition 5 : *Si* (Y,σ) *est transitif périodique-dense, alors* $\overline{\mathcal{F}} = Y$.

Preuve : Montrons d'abord qu'il existe toujours des blocs finitaires.

Soit $y_- \in Y^-$ tel que $\Delta(y_-)$ soit de cardinal minimum. Posons

$$\Delta_k(y_-) = \{x_0 \in S_X : \exists x \in X : \quad \rho(x_i) = y_i, \ \forall -k \leq i \leq 0\}.$$

On a $\Delta(y_-) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k(y_-)$, et ces ensembles étant finis, il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_{k_0}(y_-) = \Delta(y_-)$. Soit y'_- tel que $y'_i = y_i$, pour $-k_0 \leq i \leq 0$.

On a $\Delta(y'_-) \subset \Delta_{k_0}(y'_-) = \Delta_{k_0}(y_-) = \Delta(y_-)$. Comme on a choisi y_- tel que $\Delta(y_-)$ soit de cardinal minimal, on a $\Delta(y'_-) = \Delta(y_-)$ et $\Omega_+(y'_-) = \Omega_+(y_-)$, et donc $(y_{-k_0},\ldots,y_0)$ est finitaire.

Maintenant, supposons Y transitif périodique-dense. Soit $C \in \mathcal{B}(Y)$, $F \in \mathcal{B}(Y)$ finitaire. Il existe $G \in \mathcal{B}(Y)$ tel que $FGC \in \mathcal{B}(Y)$ et évidemment FGC est finitaire. Prenons un point périodique $y \in Z(FGC)$. On a alors $y \in \mathcal{F} \cap Z(C)$, ce qui montre le résultat.

□

Lorsque Y est transitif périodique-dense, on peut trouver un recouvrement de Y encore plus "proche" de Y. Si B est finitaire, on note $\Omega_+(B)$ l'élément de $\mathcal{P}(Y^+)$ égal à $\Omega_+(y_-)$ pour $y \in Z(B)$. Soit

$$\omega = \{A \in \Omega_+(Y^-) : \exists y \in \mathcal{F} \ \ A = \Omega_+(y_-)\}.$$

Définissons alors $F = \{(a,A) \in E : A \in \omega\}$. Soit N la matrice carrée restriction de M à $F \times F$.

Proposition 6: *Lorsque* Y *est transitif périodique-dense,* N *est irréductible.*

Preuve: En fait on va montrer que, pour tout $(a,A) \in E$ et tout $(b,B) \in F$, il existe $(c_i,C_i)_{0\leq i\leq l}$ tels que

$$((a,A),(c_0,C_0),\ldots,(c_l,D_l),(b,B)) \in \mathcal{B}(X_M).$$

Soit $(f_1,\ldots,f_k)$ un mot finitaire tel que $\omega_+(f_1,\ldots,f_k) = B$, et y_- tel que $\omega_+(y_-) = A$.

En utilisant le fait que Y est facteur d'un STF par une application 1-bloc, on montre facilement qu'il existe un mot $(a_1, \ldots, a_n)$ tel que

$$(y_-, a, a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_k)$$

est admissible. On en déduit la proposition.

□

Proposition 7 : *Lorsque Y est transitif périodique-dense, $\rho_\infty(X_N) = Y$.*

Preuve: Soit $y \in \mathcal{F}$. On a évidemment $s(y) \in X_N$. La proposition se déduit alors facilement du fait que $\overline{\mathcal{F}} = Y$ et de la compacité de X_N.

□

Les systèmes sofiques transitifs périodique-denses ont une autre propriété qui va nous permettre de les munir d'une mesure intéressante.

Définition : *On dit qu'un sous-shift (Y, σ) est* **IES** *si (Y, σ) est intrinsèquement ergodique (i.e. possède une unique mesure ν d'entropie maximale) et si ν charge les ouverts non vides.*

Proposition 8 : *Un système sofique transitif périodique-dense si et seulement s'il est IES.*

Preuve: • Supposons (Y, σ) transitif périodique-dense. Alors (Y, σ) est facteur, par une application f, de (X, σ) STF transitif périodique-dense tel que $h(X, \sigma) = h(Y, \sigma)$.

On sait que (X, σ) est IES. Une mesure d'entropie maximale sur Y est nécessairement l'image par f de l'unique mesure maximale sur X, ce qui donne l'unicité d'une telle mesure. Le fait qu'elle charge les ouverts provient directement de la propriété correspondante pour la mesure maximale sur X.

• Supposons (Y, σ) IES. On montre facilement qu'un STF contient un STF transitif périodique-dense de même entropie. On en déduit la propriété analogue pour les systèmes sofiques, en utilisant le fait qu'un systèmes sofique est facteur par une application f d'un STF de même entropie et que l'image d'un sous-shift transitif périodique-dense par f est transitif périodique-dense. Le sous-shift (Y, σ) contient donc (Y', σ) transitif périodique-dense de même entropie.

Mais la propriété "(Y, σ) IES" entraîne que $Y' = Y$ et que (Y, σ) est transitif périodique-dense.

□

Proposition 9: *Soit (Y,σ) un système sofique transitif périodique-dense, ν son unique mesure maximale. Il existe deux constantes $w_1, w_2 > 0$ telles que, pour tout mot $B \in \mathcal{B}(Y,n)$*

$$w_1\beta^{-n} \leq \nu(Z(B)) \leq w_2\beta^{-n},$$

où $\log\beta = h(Y,\sigma)$.

Preuve: On a vu que (Y,σ) est facteur du STF transitif périodique-dense (construit plus haut) de même entropie (X_N,σ) par une application ρ_∞, où ρ est une application de S_{X_N} dans S_Y. La mesure ν est l'image par ρ_∞ de l'unique mesure maximale μ sur X_N.

On sait que la mesure μ vérifie sur l'ensemble $\mathcal{B}(X_N,n)$ une inégalité similaire: il existe $v_1, v_2 > 0$ tel que pour $B \in \mathcal{B}(X,n)$

$$v_1\beta^{-n} \leq \mu(Z(B)) \leq v_2\beta^{-n}.$$

Le cardinal de $\rho^{-1}(B)$ étant uniformément borné par un entier K, on déduit l'existence de $w_1, w_2 > 0$ tels que

$$w_1\beta^{-n} \leq \nu(Z(B)) \leq w_2\beta^{-n}$$

□

Cette propriété de ν entraîne la proposition suivante:

Proposition 10 : *Soit (Y,σ) un système sofique transitif périodique-dense, alors $\nu(\mathcal{F}) = 1$.*

Preuve: Nous allons montrer que le complémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{F}$ est de mesure nulle. On a

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i\in Z} \mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_\infty,$$

où $\mathcal{N}_i$ est l'ensemble des y tels que i soit le plus petit entier pour lequel il existe $k < i$ tel que $(y_k,\ldots,y_i)$ soit un bloc finitaire, et où $\mathcal{N}_\infty$ est l'ensemble des y tels que, pour tous $i,k \in \mathbb{Z}$, $(y_k,\ldots,y_i)$ n'est pas un bloc finitaire.

Cette réunion est disjointe et deux $\mathcal{N}_i$ (pour $i \neq \infty$) sont images l'un de l'autre par une puissance du shift, donc de ν-mesure nulle (invariance de ν par le shift). D'autre part $\mathcal{N}_\infty$ est un fermé invariant par le shift. Commme (Y,σ) est IES, l'entropie topologique du sous-shift $(\mathcal{N}_\infty,\sigma)$ est strictement inférieure à $\log\beta = h(Y,\sigma)$. Il existe donc $R > 0$ et $0 < \lambda < \beta$ tel que Card $\mathcal{B}(\mathcal{N}_\infty,n) < R\lambda^n$. Or on a

$$\nu(\mathcal{N}_\infty) = \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{N}_\infty,n)} \nu(Z(B)) \leq R\lambda^n w_2\beta^{-n},$$

ce qui montre le résultat.

□

I.2 Généralités sur les β-développements

Soit $\beta > 1$ un nombre réel.

Définition: *On appelle β-développement d'un nombre réel x, une suite d'entiers $(\epsilon_i)_{i\geq 0}$ telle que $x = \sum_{i\geq 0} \epsilon_i \beta^{-i}$ et, pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i>n} \epsilon_i \beta^{-i} < \beta^{-n}$.*

Tout nombre réel admet un unique β-développement

$$x = \epsilon_0 + \epsilon_1 \beta^{-1} + \dots$$

obtenu par récurrence en posant

$$\begin{array}{cc} \epsilon_0 = [x], & \alpha_0 = \{x\} \\ \epsilon_{n+1} = [\beta\alpha_n], & \alpha_{n+1} = \{\beta\alpha_n\} \end{array}$$

avec [ ]: partie entière, { }: partie fractionnaire.

Lorsque le développement de x est fini, on dit que x est **β-simple.**

On munit $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de l'ordre lexicographique: si $(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots)$ et $(\epsilon'_0, \epsilon'_1, \dots)$ sont deux suites d'entiers naturels, on écrit

$$(\epsilon_0, \dots) < (\epsilon'_0, \dots)$$

s'il existe $n \geq 0$ tel que $\epsilon_i = \epsilon'_i$, pour $i < n$ et $\epsilon_n < \epsilon'_n$.

On notera $(\epsilon_0, \dots)(\beta)$ la somme $\epsilon_0 + \epsilon_1 \beta^{-1} + \dots$.

On va caractériser l'ensemble des suites d'entiers qui sont β-développements d'un nombre réel. Soit ω une suite d'entiers naturels telle que $\beta = \omega_0 + \omega_1 \beta^{-1} + \dots$.

Nous définissons un ensemble exceptionnel E_ω de la façon suivante:
Dans le cas où ω n'est pas presque nulle, convenons que E_ω est vide.
Dans le cas contraire, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\beta = \omega_0 + \dots + \omega_q \beta^{-q}$, $\omega_q \neq 0$ et $\omega_k = 0$ si $k > q$; on définit alors la suite périodique η_ω par:

$$\eta_\omega(i) = \omega_\tau, \text{ si } i \neq 0 \bmod q, \text{ avec } \tau = \overline{i}, \ \omega_q - 1, \text{ si } i = 0 \bmod q,$$

où $\overline{i}$ désigne le représentant $\leq q$ de i modulo q, et E_ω est défini comme l'ensemble des suites ϵ dont la queue coïncide avec η_ω.

On montre par récurrence le

Lemme 1: *Soit ϵ une suite n'appartenant pas à E_ω, telle que:*

$$\forall n \geq 1, \quad (\epsilon_n, \ldots) < (\omega_0, \ldots)$$

alors

$$(\epsilon_n, \epsilon_{n+1}, \ldots)(\beta) < (\omega_m, \omega_{m+1}, \ldots)(\beta)$$

lorsque $(\epsilon_n, \ldots) < (\omega_m, \ldots)$.

Théorème 2: *Soit $\beta > 1$ et $\beta = \omega_\beta(0) + \omega_\beta(1)\beta^{-1} + \ldots$ son β-développement. Soit $\epsilon \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'appartenant pas à E_{ω_β}. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un $x \in \mathbb{R}_+$ de β-développement ϵ est que:*

$$\forall n \geq 1, \quad (\epsilon_n, \ldots) < (\omega_\beta(0), \ldots).$$

En particulier, on a $(\omega_\beta(n), \ldots) < (\omega_\beta(0), \ldots)$ pour tout $n \geq 1$.

Preuve: S'il existe x de β-développement $x = \epsilon_0 + \epsilon_1\beta^{-1} + \ldots$, alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\epsilon_n\beta^{-1} + \ldots < 1 = \omega_\beta(0)\beta^{-1} + \ldots$$

et donc $(\epsilon_n, \ldots) \neq (\omega_\beta(0), \ldots)$. Soit k le plus petit entier tel que $\epsilon_{n+k} \neq \omega_\beta(k)$. On a alors

$$(\epsilon_{n+k}, \epsilon_{n+k+1}, \ldots)(\beta) < (\omega_\beta(k), \omega_\beta(k+1), \ldots)(\beta),$$

et, comme $\omega_\beta(k+1)\beta^{-1} + \ldots < 1$, on a $\epsilon_{n+k} < \omega_\beta(k) + 1$, d'où $\epsilon_{n+k} < \omega_\beta(k)$ et $(\epsilon_n, \ldots) < (\omega_\beta(0), \ldots)$, $\forall n \geq 1$.

Réciproquement, si, pour tout $n \geq 1$, $(\epsilon_n, \ldots) < (\omega_\beta(0), \ldots)$, alors, par le lemme, on a

$$\epsilon_n\beta^{-1} + \ldots < \omega_\beta(0)\beta^{-1} + \ldots = 1$$

et $\epsilon_0 + \epsilon_1\beta^{-1} + \ldots$ est le β-développement d'un x.

□

Appelons E' l'ensemble des β-développements des éléments de $[0, 1[$. Soit $X'_\beta = \overline{E}'$ (la fermeture étant prise pour la topologie produit). Si β n'est pas β-simple, cet ensemble est l'ensemble des suites $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ telles que:

$$\forall n \geq 1 \quad (\epsilon_n, \ldots) \leq (\omega_\beta(0), \ldots).$$

Si β est β-simple, c'est l'ensemble des suites $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\forall n \geq 1 \quad (\epsilon_n, \ldots) < (\omega_\beta(0), \ldots).$$

L'ensemble X'_β est un sous-ensemble de $\Omega = \{0, \ldots, [\beta]\}^{\mathbb{N}^*}$ stable par le shift.

L'application $\phi' : X'_\beta \longrightarrow [0,1]$ définie par

$$\phi'((\epsilon_n)_{n\geq 1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \beta^{-i}$$

est höldérienne, et ce qui précède nous permet d'affirmer que la restriction de ϕ' à l'ensemble E' est une bijection de E' sur $[0,1[$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x\beta^{-k} \in [0,1[$. On peut écrire

$$x\beta^{-k} = \epsilon_1 \beta^{-1} + \dots$$

avec $(\epsilon_n)_{n\geq 1} \in E'$, soit $x = \epsilon_1 \beta^{k-1} + \dots + \epsilon_k + \dots$.

Soit E le sous-ensemble de $\Omega = \{0, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{Z}}$ formé des suites $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que, pour tout entier k, la suite $(\epsilon_k, \dots)$ soit un élément de E' et telles qu'il existe un entier K tel que $\epsilon_i = 0$, pour $i < K$. Alors l'application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\phi((\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \beta^{-i}$$

est une bijection.

Pour le voir, on montre que l'écriture ci-dessus ne dépend pas du k choisi tel que $x\beta^{-k} \in [0,1[$, et on utilise l'injectivité de ϕ'. On appelle **β-shift bilatère** le sous-ensemble X_β de Ω fermeture de E pour la topologie produit.

I.3 Nombres de Pisot et β-développement

Nous reprenons ici un théorème classique sur les points d'accumulation des suites $x\beta^n \mod 1$, quand β est un nombre de Pisot. La démonstration est une variante de la preuve donnée par Bertrand-Mathis dans [2]. C'est sur ce résultat que reposera l'étude du codage examiné dans IV.2.

Définition: *Soient β un entier algébrique, P son polynôme minimal. On dit que β est un nombre de Pisot, si P admet β pour unique racine de module > 1. Les autres racines de P, alors de module < 1, sont appelées conjuguées de β. Le degré de P est appelé degré de β.*

Si β est un nombre de Pisot, la suite (β^n) tend vers 0 modulo 1, avec une vitesse exponentielle. Cette propriété permet de caractériser les β-développements des nombres du corps de β.

Dans toute la suite, étant donné un réel x, on notera $||x||$ la distance de x à l'entier le plus proche.

La β-transformation de l'intervalle $[0,1[$, c'est à dire l'application qui, à un élément x de $[0,1[$, associe $\{\beta x\}$ est notée T_β ou simplement T.

Théorème 3: *Soit $\beta > 1$ un nombre de Pisot de degré s. Alors un nombre réel admet un développement en base β périodique à partir d'un certain rang, si et seulement s'il appartient au corps de $\beta, \mathbb{Q}(\beta) = \{c_0 + c_1\beta + \ldots + c_{s-1}\beta^{s-1},\ c_i \in \mathbb{Q}\}$.*

En particulier, le β-développement de β est périodique à partir d'un certain rang.

La condition est évidemment suffisante. Le théorème suivant en montre la nécessité.

On note que ce théorème permet de retrouver, en particulier, qu'un nombre réel $\beta > 1$ tel que $\sum ||\beta^n|| < \infty$ est un nombre de Pisot. Le résultat classique (cf [11]) est que la condition $\sum ||\beta^n||^2 < \infty$ implique que β est un nombre de Pisot.

Théorème 4: *Soient β un réel > 1 tel que la série $\sum_n ||\beta^n||$ converge et $x \in [0,1]$ tel que la suite $(x\beta^n)$ ait un nombre fini de points d'accumulation modulo 1. Alors le β-développement de x est périodique à partir d'un certain rang. En particulier le β-développement de β est périodique à partir d'un certain rang.*

Preuve: Posons pour tout $y \in [0,1]$, $\epsilon(y) = \beta y - Ty$. On remarque que $\epsilon(y)$ est inférieur à $[\beta]$. D'après la définition de ϵ, on a pour tout $n \geq 1$

$$\beta^n x = T^n x + \epsilon(T^{n-1}x) + \beta\epsilon(T^{n-2}x) + \ldots + \beta^{n-1}\epsilon(x).$$

On a donc, pour tout k et tout n dans $\mathbb{N}$

$$\beta^{n+k}x - \beta^k T^n x = \beta^k \epsilon(T^{n-1}x) + \beta^{k+1}(T^{n-2}x) + \ldots + \beta^{k+n-1}\epsilon(x).$$

C'est sur cette relation que repose la preuve.

1) La convergence de la série $\sum ||\beta^n||$ montre que l'on peut écrire

$$\beta^{n+k}x - \beta^k T^n x = q(n,k) + \eta(n,k),$$

où $q(n,k)$ est un entier et $\eta(n,k)$ tend vers 0 uniformément en n lorsque k tend vers l'infini.

On en déduit que, pour tous k, n, n'

$$||\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x|| \leq |\eta(n',k)| + |\eta(n,k)| + ||\beta^{n+k}x - \beta^{n'+k}x|| \qquad (1)$$

et

$$||\beta^{n+k}x - \beta^{n'+k}x|| \leq ||\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x|| + |\eta(n,k)| + |\eta(n',k)|. \qquad (2)$$

2) La suite $(\beta^i x)_{i\geq 0}$ n'admettant qu'un nombre fini de points d'accumulation modulo 1, pour j et j' suffisamment grands, $\beta^j x$ et $\beta^{j'} x$ sont proches ou éloignés modulo 1:

il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $N = N(\delta, \alpha)$ tel que, pour j et j' plus grands que N, on ait ou bien $||\beta^j x - \beta^{j'} x|| < \alpha$, ou bien $||\beta^j x - \beta^{j'} x|| > \delta$.

Nous devons montrer que la suite $(T^k x)_{k\geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang. Si ce n'est pas le cas, cette suite prend une infinité de valeurs et pour tout $\gamma > 0$ et tout entier k, on peut trouver n et n' tels que: $T^n x \neq T^{n'} x$ et $|\beta^k(T^n x - T^{n'} x)| < \gamma$.

3) Si $(\beta^i x)_{i\geq 0}$ converge modulo 1, d'après (1), il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$,

$$\|\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x\| < \frac{1}{2\beta}, \tag{3}$$

et ceci indépendamment de n et n'. Prenons n et n' tels que

$$|\beta^{k_0} T^n x - \beta^{k_0} T^{n'} x| < \frac{1}{2\beta}$$

et $k \geq k_0$ tel que

$$\frac{1}{2\beta} \leq |\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x| < 1/2,$$

la majoration par $1/2$ assurant l'égalité $\|\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x\| = |\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x|$.

On a alors $\|\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x\| > \frac{1}{2\beta}$, contrairement à (3).

4) Supposons maintenant que la suite $(\beta^i x)_{i\geq 0}$ ait au moins deux points d'accumulation modulo 1.

Choisissons un $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \frac{1}{4\beta}$ et $\alpha < \frac{\delta}{1+2\beta}$. Soit $N = N(\delta, \alpha)$ défini en 2).

D'après (2), on peut choisir k_0, supérieur à N, tel que, pour tout $k \geq k_0$, n et n', on ait

$$|\|\beta^{n+k} x - \beta^{n'+k} x\| - \|\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x\|\ | < \alpha.$$

Prenons alors n et n' tels que

$$|\beta^{k_0} T^n x - \beta^{k_0} T^{n'} x| < 2\alpha$$

et $k \geq k_0$ tel que

$$2\alpha \leq |\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x| \leq 2\beta\alpha < \frac{1}{2}, \tag{4}$$

la majoration par $1/2$ assurant l'égalité $\|\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x\| = |\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x|$.

On a alors

$$\|\beta^{n+k} x - \beta^{n'+k} x\| \leq \alpha + 2\beta\alpha < \delta.$$

Ceci entraîne

$$2\alpha > \|\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x\| = |\beta^k T^n x - \beta^k T^{n'} x|,$$

contrairement à (4).

□

Si la suite $(T^k x)_{k\in\mathbb{N}}$ a un unique point d'accumulation, alors ce point est un point fixe de la β-transformation et on voit facilement que le β-développement de x est stationnaire partir d'un certain rang.

En appliquant ce qui précède à $x = \beta - [\beta]$, on obtient que le β-développement de β est périodique.

I.4 Entropie topologique du β-shift

Soit β un réel > 1, de β-développement $\beta = \omega_\beta(0) + \omega_\beta(1)\beta^{-1} + \ldots$.

Nous allons donner une estimation asymptotique précise de Card($\mathcal{B}(X'_\beta, n)$), où $\mathcal{B}(X'_\beta, n)$ est l'ensemble des mots de longueur n de X'_β, que nous noterons plus simplement $\mathcal{B}_n$.

Posons

$$\mathcal{B}_n^0 = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots..\epsilon_n) \in \mathcal{B}_n : (\epsilon_1, \ldots.., \epsilon_{n-1}, \epsilon_n + 1) \in \mathcal{B}_n\}.$$

Les ensembles de suites seront munis de l'ordre lexicographique. Les "max" et "min" seront entendus en ce sens.

Le signe $\bullet$ désigne la concaténation et on note $\Omega_\beta(j) = (\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(j-1))$, si $j \geq 1, e$, le mot vide, si $j = 0$.

Proposition 11: *Pour tout* $n \geq 1$,

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j^0 \bullet \Omega_\beta(n-j) \bigcup \{\max \mathcal{B}_n\}.$$

Preuve: Soit $u \in \mathcal{B}_n$, $u \neq \max \mathcal{B}_n$, $u = (\epsilon_1, \ldots..\epsilon_n)$. Soit $u_m = \min\{v \in \mathcal{B}_n : v > u\}$. On a $u_m = (\eta_1, \ldots..., \eta_k, 0\ldots.., 0)$, pour un certain k.

D'après la définition de u_m, on a

$$\eta_1 = \epsilon_1,\ \eta_2 = \epsilon_2, \ldots..,\ \eta_{k-1} = \epsilon_{k-1}, \eta_k = \epsilon_k + 1,$$

$$(\epsilon_{k+1}, \ldots.., \epsilon_n) = (\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(n-k-1)).$$

D'où: $u = (\epsilon_1, \ldots.., \epsilon_k) \bullet (\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(n-k-1)) \in \mathcal{B}_k^0 \bullet \Omega_\beta(n-k)$.

□

Soit $w \in \mathcal{B}_{n+1}$. Posons $[w] = \{\omega \in X'_\beta : (\omega_1, \ldots..\omega_{n+1}) = w\}$. L'ensemble $\{[w] : w \in \mathcal{B}_{n+1}\}$ est une partition de X'_β.

Soit $\rho_\beta : X'_\beta :\longrightarrow [0,1]$ défini par $\rho_\beta(\epsilon_i)_{i\geq 1} = \sum_{i\geq 1} \epsilon_i \beta^{-i}$. L'ensemble $\{\rho_\beta([w]) : w \in \mathcal{B}_{n+1}\}$ est un recouvrement de $[0,1]$ par des intervalles qui, deux à deux, ont au plus un point commun (voir généralités sur le β-développement).

Posons $R_\beta(w)$ =longueur($\rho_\beta([w])$). Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{u\in\mathcal{B}_n} R_\beta(u) = 1$$

et

$$R_\beta(u) = \begin{cases} \rho_\beta(u') - \rho_\beta(u), & u \neq \max \mathcal{B}_n \\ 1 - \rho_\beta(u), & u = \max \mathcal{B}_n, \end{cases}$$

où, pour $w \in \mathcal{B}_l$, $w \neq \max \mathcal{B}_l$, on note $w' = \min\{v \in \mathcal{B}_l : v > w\}$.

Proposition 12: *Soit* $M_\beta = \sum_{n\geq 1}(i+1)\omega_\beta(i)\beta^{-i-1}$. *On a:*

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{-n}\text{Card } \mathcal{B}_n^0 = \frac{1}{\mathrm{M}_\beta}$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{-n}\text{Card } \mathcal{B}_n = \frac{1}{\mathrm{M}_\beta(1-\beta^{-1})}.$$

Donc, en particulier, $h(X'_\beta, \sigma) = h(X_\beta, \sigma) = \log\beta$.

Preuve: Soit $u \in \mathcal{B}_n$. Si $u \in \mathcal{B}^0_{n-j} \bullet \Omega_\beta(j)$ pour $0 \leq j \leq n-1$, alors

$$R_\beta(u) = \beta^{j-n}(1 - \sum_{i=0}^{j-1} \omega_\beta(i)\beta^{-i-1}) = \beta^{-n}\top^j_\beta 1.$$

D'autre part

$$R_\beta((\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(n-1))) = \beta^{-n}\top^n_\beta 1,$$

où l'on a posé $\top^i_\beta 1 = \sum_{l=1}^{\infty} \omega_\beta(l+i-1)\beta^{-l}$ pour $i \geq 1$. ($\top^0_\beta = 1$)

On obtient donc, grâce à la première proposition de I.4,

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{u\in\mathcal{B}_n} R_\beta(u) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{u\in\mathcal{B}_{n-j}\bullet\Omega(j)} R_\beta(u) + R_\beta((\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(n-1))) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} N^0_{n-j}\beta^{-n}\top^j_\beta 1 + \beta^{-n}\top^n_\beta 1 \\ &= \sum_{j=0}^{n} N^0_{n-j}\beta^{-n}\top^j_\beta 1 \end{aligned}$$

où $N^0_{n-j} = \text{Card } \mathcal{B}^0_{n-j}$ et $\mathcal{B}^0_0 = \{e\}$.

Considérons alors la série entière en $t \in C$: $g(t) = \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{j=0}^{n} \beta^{-n} \top_\beta^j 1 N^0_{n-j}$. Elle converge pour $\mid t \mid < 1$ et elle est, dans ce cas, égale à $\frac{t}{1-t}$. D'autre part on peut écrire

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n} t^{n-j}\beta^{j-n}N^0_{n-j}t^j\beta^{-j}\top_\beta^j 1 \\ &= (\sum_{n\geq 0} t^n\beta^{-n}N^0_n)(\sum_{n\geq 0} t^n\beta^{-n}\top_\beta^n 1) - 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} t^n\beta^{-n}\top_\beta^n 1 &= \sum_{n\geq 1} t^n(1 - \sum_{0}^{n-1}\omega_\beta(i)\beta^{-i-1}) + 1 \\ &= 1 + \frac{t}{1-t} - \sum_{n\geq 1}\sum_{0}^{n-1} t^{n-1-i}t^{i+1}\beta^{-i-1}\omega_\beta(i) \\ &= \frac{1}{1-t} - (\sum_{n\geq 0} t^n)(\sum_{i\geq 0} t^{i+1}\beta^{-i-1}\omega_\beta(i)) \\ &= \frac{1-\phi_\beta(t)}{1-t}, \end{aligned}$$

où $\phi_\beta(t) = \sum_{i\geq 0} t^{i+1}\beta^{-i-1}\omega_\beta(i)$. Il en résulte

$$\sum_{n\geq 0} t^n\beta^{-n}N^0_n = (\frac{t}{1-t}+1)\frac{1-t}{1-\phi_\beta(t)} = \frac{1}{1-\phi_\beta(t)}$$

pour t tel que $1-\phi_\beta(t) \neq 0$. Le rayon de convergence de ϕ_β est supérieur à β. Le point 1 est zéro d'ordre 1 de $1-\phi_\beta(t)$ ($\phi'_\beta(1) \neq 0$). Donc il existe un voisinage de 1 dans lequel $\frac{1}{1-\phi_\beta(t)} - \frac{1}{(1-t)\phi'_\beta(1)}$ est holomorphe: il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sum_{n\geq 0}(\beta^{-n}N^0_n - \frac{1}{\phi'_\beta(1)})t^n$ est holomorphe pour $t \in D(1,\epsilon)$.

Ceci entraîne en particulier $\lim_{n\to\infty} \beta^{-n}N^0_n = \frac{1}{\phi'_\beta(1)}$.

On a Card $\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} N^0_k$, et donc

$$\begin{aligned} \beta^{-n}\text{Card } \mathcal{B}_n &= \sum_{k=0}^{n}\beta^{-n}(N^0_k\beta^{-k}\phi'_\beta(1))\frac{\beta^k}{\phi'_\beta(1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(N^0_{n-k}\beta^{k-n}\phi'_\beta(1))\frac{\beta^{-k}}{\phi'_\beta(1)}, \end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_n \beta^{-n} \text{Card } \mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{-k}}{\phi'_\beta(1)} = \frac{1}{(1-\beta^{-1})\phi'_\beta(1)}.$$

□

II. Codage "topologique"

II.1 Principe de la méthode de Vershik

Soit T un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant pour polynôme caractéristique

$$P(X) = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \quad (a_0 = \pm 1).$$

L'automorphisme T peut être représenté, dans la base canonique, par une matrice que l'on notera encore T. Lorsque la matrice T est à coefficients entiers, de déterminant ± 1, elle définit également un automorphisme du tore. On utilisera la lettre T pour désigner les trois objets.

En particulier, à tout polynôme $P(X) = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \quad (a_0 = \pm 1)$, on peut associer l'automorphisme T, défini par la matrice compagne :

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

L'automorphisme T a alors $(-1)^n P$ comme polynôme caractéristique.

On sait que le système dynamique $(\mathbb{T}^n, \mathsf{T}, m)$ est ergodique si et seulement si T n'a aucune valeur propre racine de l'unité. Ici nous supposerons que T est hyperbolique, c'est-à-dire que T n'a aucune valeur propre de module 1.

La méthode de codage proposée par Vershik est basée sur l'idée suivante:

Soit u_0 le vecteur de coordonnées $(1, 0, ..., 0)$. Posons $u_k = \mathsf{T}^k u_0$. En utilisant la relation $\mathsf{T}^{k+n} u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathsf{T}^{k+i} u_0$, on peut coder certains éléments de $\mathbb{Z}^n$ et montrer l'existence d'un entier N et d'un sous-ensemble S de $\{0, ..., N\}^n$, tel que tout élément d'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ s'écrive sous la forme d'une somme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i u_i$, où $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite presque nulle telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $(\epsilon_k, ..., \epsilon_{k+n-1}) \in S$.

Précisons le résultat.

Définition : : *Soit G un semi-groupe abélien dénombrable. Une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de G est appelée base de représentation symbolique (brs) du semi-groupe G, s'il existe des entiers $m > 1$ et $N > 0$ et un ensemble $S \subset \{0, ..., N\}^m$, tels que tout élément $g \in G$ admette une décomposition de la forme:*

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_k(g) v_k,$$

où $(\epsilon_k(g)) = (\epsilon_k)$ *est une suite presque nulle d'éléments de* $\{0, ..., N\}$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $(\epsilon_k, ..., \epsilon_{k+m-1}) \in S$.

De telles suites seront appelées **suites admissibles**. Le lemme suivant est énoncé dans [4].

Lemme: *Soit* $v \in \mathbb{Z}^n$ *et soit* G *le semi-groupe engendré par l'orbite de* v *sous l'action du groupe* $\{\top^n, n \in \mathbb{Z}\}$. *Alors* $\{T^k v, k \in \mathbb{Z}\}$ *est une brs du semi-groupe* G *(avec* $m = n$ *et* N *inférieur au double de la plus grande valeur absolue des coefficients du polynôme* P*).*

Nous donnerons dans la partie II.2, pour certains cas simples, une idée des méthodes que l'on peut utiliser afin d'obtenir de manière algorithmique ce codage d'entiers.

Considérons maintenant $\top$ comme automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Soit L_s (resp L_u) le sous-espace $\top$-stable (resp. instable) tel que $\top|_{L_s}$ (resp $\top|_{L_u}$) n'ait que des valeurs propres de module < 1 (resp > 1). Notons π_s (resp π_u) la projection sur L_s (resp L_u) parallèlement à L_u (resp L_s).

Le lemme précédent nous permet de coder un sous-ensemble E de $\mathbb{Z}^n$ (le semi-groupe engendré par les élémentes $\top^k u_0 = u_k$). Partant du fait que $\pi_u(E)$ mod 1 est dense dans le tore $\mathbb{T}^n$, on va montrer que l'on peut alors obtenir un codage du système dynamique ($\mathbb{T}^n, \top, m$).

Soit X_f l'ensemble des suites admissibles presque nulles, muni de la distance

$$d(\epsilon, \epsilon') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\epsilon_i - \epsilon'_i| 2^{-i}.$$

Notons $||.||$ la distance à l'entier le plus proche. Considérons l'application ϕ_f : $X_f \longrightarrow \mathbb{T}^n$ définie par

$$\phi_f(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \pi_u(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i u_i) \mod 1.$$

Montrons que ϕ_f est höldérienne. On remarque d'abord que modulo 1, on a

$$\pi_u(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i u_i) = -\pi_s(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i u_i).$$

Soit maintenant deux suites admissibles ϵ^0 et ϵ^1 telles que, pour un entier a:

$$\epsilon^0_i = \epsilon^1_i, \ |i| \leq N \text{ et } \epsilon^0_i = \epsilon^1_i = 0, \ |i| > a.$$

Soit $\alpha < \sup(|\beta_1|^{-1}, ..., |\beta_k|^{-1}, |\tau_1|, ..., |\tau_{n-k}|)$, où les β_i et τ_i sont les valeurs propres de $\top$ avec, pour tout i, $|\beta_i| > 1$ et $|\tau_i| < 1$. Il existe M tel que, pour toute suite admissible ϵ, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $|\epsilon_i| \leq M$.

Si $i > 0$, il existe $K_1 > 0$ tel que $||\pi_s(u_i)|| \leq K_1\alpha^i$. Si $i < 0$, il existe $K_2 > 0$ tel que $||\pi_u(u_i)|| \leq K_2\alpha^{-i}$.

Soit ϵ^{01} définie par $\epsilon_i^{01} = \epsilon_i^0$, pour $i \geq -N$, $\epsilon_i^{01} = 0$, pour $i < -N$. On a alors

$$||\pi_u(\sum \epsilon_i^0 u_i) - \pi_u(\sum \epsilon_i^{01} u_i)|| = ||\sum_{-a}^{-N-1} \epsilon_i^0 \pi_u(u_i)|| \leq M_0\alpha^N$$

pour un $M_0 > 0$.

Soit ϵ^{11} défini par $\epsilon_i^{11} = \epsilon_i^1$, pour $i \geq -N$, $\epsilon_i^{11} = 0$, pour $i < -N$. On a

$$||\pi_s(\sum \epsilon_i^{11} u_i) - \pi_s(\sum \epsilon_i^{01} u_i)|| = ||\sum_{N+1}^{a} (\epsilon_i^0 - \epsilon_i^1)\pi_s(u_i)|| \leq M_1\alpha^N$$

pour un $M_1 > 0$.

On a de même

$$||\pi_u(\sum \epsilon_i^{11} u_i) - \pi_u(\sum \epsilon_i^1 u_i)|| \leq M_2\alpha^N,$$

pour un $M_2 > 0$.

On en déduit l'existence d'un $R > 0$ tel que:

$$d(\phi_f(\epsilon^0), \phi_f(\epsilon^1)) = ||\pi_u(\sum \epsilon_i^0 u_i) - \pi_u(\sum \epsilon_i^1 u_i)|| \leq R\alpha^N,$$

ce qui nous permet d'affirmer que ϕ_f est höldérienne.

□

On prolonge ensuite ϕ_f à $X = \overline{X_f}$, l'ensemble des suites bilatères admissibles, fermeture de X_f pour la topologie produit. Ce prolongement est encore höldérien. En effet, soit $\epsilon \in X$ et ϵ^N définie par $\epsilon_i^N = \epsilon_i$, si $|i| \leq N$, et $\epsilon_i^N = 0$, sinon. On a

$$||\phi(\epsilon) - \phi(\epsilon^N)|| \leq \sum_N^\infty ||\phi(\epsilon^{i+1}) - \phi(\epsilon^i)|| \leq U\alpha^N,$$

pour un $U > 0$, d'où le résultat.

Comme $\overline{\phi(X_f)} = \mathbb{T}^n$ par hypothèse, on en déduit, en utilisant la compacité de X, que le prolongement ϕ de ϕ_f est surjectif.

II.2 Quelques exemples de codage

Soit $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ un polynôme irréductible à coefficients entiers avec $a_0 = \pm 1$. On désignera par la même notation T l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et l'automorphisme du tore $\mathbb{T}^n$ associés à la matrice T, matrice compagne de P définie plus haut.

Montrons comment on peut réécrire les $\sum_{i=0}^{n-1} z_i u_i$, avec $z_i \in \mathbb{N}$, dans certains cas très particuliers. Supposons que l'on ait connaissance de l'ensemble des suites admissibles, avec $(\epsilon_i^k)_{i\in\mathbb{Z}}$ définie par $\epsilon_i^k = \delta_{ik}$ admissible. Il suffit alors, pour savoir "coder" tous les éléments de $\mathbb{N}^n$, de montrer comment on peut, de manière systématique, écrire sous forme admissible un élément de la forme $\sum \epsilon_i u_i + u_k$, où $k \in \mathbb{Z}$, et ϵ est une suite admissible finie (i.e. presque nulle). Il s'agit, en quelque sorte, d'obtenir un algorithme permettant de dresser une table d'addition dans l'ensemble des suites admissibles presque nulles.

Exemple 1

$n = 2 \quad P = X^2 - X - 1$

L'ensemble des suites admissibles est l'ensemble des suites de 0 et 1 telles que deux 1 ne peuvent se suivre, i.e. l'ensemble des suites $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telles que:

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \epsilon_i \in \{0,1\}, \quad \epsilon_i \epsilon_{i+1} = 0.$$

Commençons par illustrer les méthodes que nous utiliserons par la suite sur l'exemple $\eta + \eta$, où η est définie par $\eta_i = \delta_{i0}$.

$$\begin{aligned}
\eta + \eta &= (\ldots 0 \ldots 0\underline{1}0 \ldots 0 \ldots) + (\ldots 0 \ldots 0\underline{1}0 \ldots 0 \ldots) \\
&= (\ldots 0 \ldots 000\underline{1}0 \ldots 0 \ldots) + (\ldots 0 \ldots 011\underline{0}0 \ldots 0 \ldots) \\
&= (\ldots 0 \ldots 011\underline{1}0 \ldots 0 \ldots) \\
&= (\ldots 0 \ldots 010\underline{0}10 \ldots)
\end{aligned}$$

De façon générale, soit ϵ une suite admissible presque nulle, $\epsilon_i = 0$ si $i > b$ ou $i < -b$. Montrons comment on écrit $z = \sum_{i=-b}^{b} \epsilon_i u_i + u_k$ sous forme admissible.

1. Si $\epsilon_k = \epsilon_{k-1} = \epsilon_{k+1} = 0$, alors $z = \sum \epsilon_i u_i + u_k$ est une écriture admissible.

2. Si $\epsilon_k = 0$ et $\epsilon_{k+1} = 1$ (alors $\epsilon_{k+2} = 0$).

En utilisant la relation $u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$, on obtient, $z = \sum \epsilon'_i u_i + u_{k+2}$, où

$$\begin{cases} \epsilon'_i = \epsilon_i, \text{ si } i < k, \text{ ou } i > k+1 \\ \epsilon_k = \epsilon_{k+1} = 0, \end{cases}$$

donc ϵ' est admissible.

Si $\epsilon_{k+3} = 0$, l'écriture ainsi obtenue est admissible, sinon on est dans la situation 2, avec u_{k+2} à la place de u_k et ϵ' à celle de ϵ, avec $\epsilon'_i = 0$ pour $i > b$. En itérant le procédé, on aboutit donc à une écriture admissible.

3. Si $\epsilon_k = \epsilon_{k+1} = 0$ et $\epsilon_{k-1} = 1$.

En utilisant $u_{k-1} + u_k = u_{k+1}$, on a, $z = \sum \epsilon'_i u_i + u_{k+1}$ où :

$$\begin{cases} \epsilon'_i = \epsilon_i, \text{ si } i < k-1, \text{ou } i > k \\ \epsilon'_{k-1} = \epsilon'_k = 0 \end{cases}$$

(donc ϵ est admissible).

Si $\epsilon_{k+2} = 0$, cette écriture est admissible, sinon on est dans la situation 2.

4. Si $\epsilon_k = 1$ (alors $\epsilon_{k+1} = \epsilon_{k-1} = 0$).

En utilisant $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ et $u_{k-1} + u_k = u_{k+1}$ on a, $z = \sum \epsilon'_i u_i + u_{k-2} + u_{k+1}$ où :

$$\begin{cases} \epsilon'_i = \epsilon_i, \text{ si } i < k-1, \text{ou } i > k+1 \\ \epsilon'_{k-1} = \epsilon'_k = \epsilon'_{k+1} = 0 \end{cases}$$

ϵ' est admissible.

Grâce à 2, on écrit $\sum \epsilon'_i u_i + u_{k+1} = \sum \epsilon_i" u_i$, avec $\epsilon_i" = \epsilon'_i$ pour $i \leq k$, en particulier $\epsilon_k" = \epsilon_{k-1}" = 0$.

On veut maintenant écrire $z = \sum \epsilon_i" u_i + u_{k-2}$ sous forme admissible.

Si $\epsilon_{k-2}" = \epsilon_{k-2} = 0$, on est dans le cas 1 ou 3. Si $\epsilon_{k-2}" = 1$, on itère 4 avec u_{k-2} en place de u_k, $\epsilon"$ en place de ϵ (et toujours $\epsilon_i" = 0$ pour $i < -b$, ce qui montre qu'un nombre fini d'itérations aboutira à une écriture admissible).

Ceci montre l'existence d'une écriture admissible de tout élément de $\mathbb{N}^n$. Montrons l'unicité d'une telle écriture. Soit ϵ et ϵ' deux suites finies admissibles distinctes.

Supposons que l'on ait $\sum \epsilon_i u_i = \sum \epsilon'_i u_i$; soit $i_0 = \max\{i \in \mathbb{Z} : \epsilon_i \neq \epsilon'_i\}$.

On a par exemple, $\epsilon_{i_0} = 1$, $\epsilon'_{i_0} = 0$, et on peut écrire :

$$u_{i_0} + \sum_{-\infty}^{i_0-1} \epsilon_i u_i = \sum_{-\infty}^{i_0-1} \epsilon'_i u_i.$$

Soit $i_1 = \sup\{i \in \mathbb{Z} : i < i_0, \quad \epsilon'_i = 1\}$

En utilisant la relation $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{i_0} &= \sum_{k=1}^{l} u_{i_0+1-2k} + u_{i_1}, \text{ si } i_0 - u_1 = 2l \\ &= \sum_{k=1}^{l} u_{i_0+1-2k} + u_{i_1} + u_{i_1-1}, \text{ si } i_0 - u_1 = 2l+1, \end{aligned}$$

avec $\sum_1^0 = 0$, et l'égalité $(*)$ devient:

$$u_{i_1+1} + \sum \alpha_i u_i = \sum_{-\infty}^{i_2} \epsilon'_i u_i \quad \text{ou} \quad u_{i_1-1} + \sum \alpha'_i u_i = \sum_{-\infty}^{i_2} \epsilon'_i u_i$$

avec $i_2 = \sup\{i \in \mathbb{Z} : i < i_1, \ \epsilon'_i = 1\}$ (ϵ' étant admissible on a $i_2 \leq i_1 - 2$).

En posant, pour tout $k \geq 2$,

$$i_k = \max\{i \in \mathbb{Z} : i < i_{k-1}, \epsilon'_i = 1\},$$

on obtient comme plus haut, à partir de $(*)$,

$$u_{i_k+1} + \sum \alpha_i^{(k)} u_i = \sum_{-\infty}^{i_{k+1}} \epsilon'_i u_i,$$

ou

$$u_{i_k-1} + \sum \alpha_i^{(k)'} u_i = \sum_{-\infty}^{i_{k+1}} \epsilon'_i u_i,$$

quand i_k est défini.

La suite ϵ' étant presque nulle, il existe K tel que i_K est défini et $\epsilon'_i = 0$ pour $i < K$. On a alors obtenu, à partir de $(*)$, une égalité de la forme $u_{i_K} + \sum \alpha_i^{(K)} u_i = 0$. Mais ceci constitue une contradiction car

$$T^n(u_{i_K} + \sum \alpha_i^{(K)} u_i) \to \infty$$

quand n tend vers l'infini.

L'unicité du développement obtenu dans l'exemple 2 s'obtient de façon similaire.

Exemple 2

$n = 2 \quad P = X^2 - aX - 1 \quad a > 1$

L'ensemble des suites admissibles est l'ensemble des suites à coefficients entiers $\leq a$ telle que un a est toujours précédé d'un 0. Soit $x_a, ..., x_b$ une suite admissible. Ecrivons $z = \sum_a^b x_i u_i + u_k$ sous forme admissible.

1. Si $0 < x_k < a - 1$, ou $x_k = 0$ et $x_{k+1} \neq a$, ou $x_{k-1} = 0$ et $x_k = a - 1$, l'écriture $z = \sum x_i u_i + u_k$ est admissible.

2. Si $x_{k+1} = a$, donc $x_k = 0$, alors $z = \sum x'_i u_i$ avec :

$$\begin{cases} x'_i = x_i, \text{ si } i < k, \text{ou } i > k+2 \\ x'_k = x'_{k+1} = 0, \quad x'_{k+2} = x_{k+2} + 1 \end{cases}$$

et on a une écriture admissible de z.

3. Si $x_{k-1} \neq 0$ et $x_k = a-1$, alors $z = \sum x'_i u_i + u_{k+1}$, avec:

$$\begin{cases} x'_i = x_i, \text{ si } i < k-1, \text{ ou } i > k \\ x'_k = 0 \quad x'_{k-1} = x_{k-1} + 1 \end{cases}$$

Comme $a > 1$, on a $x_{k+1} \neq a$ donc, si $x_{k+2} \neq a$, l'écriture est admissible, sinon on est dans la situation 2.

4. Si $x_k = a$, (alors $x_{k-1} = 0$ et $x_{k+1} \neq a$), alors, $z = \sum x'_i u_i + u_{k+1} + u_{k-2}$ ave :

$$\begin{cases} x'_i = x_i, \text{ si } i < k-1, \text{ ou } i > k \\ x'_k = 0 \quad x'_{k-1} = a-1 \end{cases}$$

(on a utilisé $u_k = au_{k-1} + u_{k-2}$ puis $u_{k-1} + au_k = u_{k+1}$). Mais $\sum x'_i u_i + u_{k+1}$ (avec $x'_{k+1} \neq a$) s'écrit, par 1 ou 2, $\sum x_i" u_i$, avec :

$$\begin{cases} x_i" = x_i, \text{ pour } i < k-1 \\ x_{k-1}" = a-1 \quad x_k" = 0. \end{cases}$$

On est ramené à écrire $\sum x_i" u_i + u_{k-2}$ sous forme admissible. Soit $l = \inf\{j \in \mathbb{N} : u_{k-2j} \neq a\}$ alors en itérant l fois 4 on aboutit à une situation 1 ou 3. (On sait que $l > -\infty$ car x est presque nulle.)

Exemple 3

Cas où le polynôme P est de la forme $X^n + \sum_{i=0, i\neq i_0}^{n-1} a_i X^i - a_{i_0} X^{i_0}$, avec $\forall i\ a_i \geq 0$, $a_0 = 1$ et $a_{i_0} > \sum_{i=0, i\neq i_0}^{n-1} a_i + 1$.

On peut, dans ce cas, écrire tout élément de $N^n \subset \mathbb{R}^n$ sous la forme d'une somme finie à coefficients dans $\{0, ..., a_{i_0} - 1\}$ de u_i.

Soit $(x_t, ..., x_s)$ une suite quelconque d'entiers naturels, $t, s \in \mathbb{Z}$. Montrons que $z = \sum_t^s x_i u_i$ peut s'écrire comme une somme finie à coefficients ϵ_i dans $\{0, ..., a_{i_0-1}\}$. Posons $N(x) = \sum_a^b \sup(0, x_i - a_{i_0} + 1)$.

Si $N(x) = 0$, alors $\sum x_i u_i$ est une écriture admissible. Si $N(x) > 0$, alors il existe l tel que $x_l > a_{i_0} - 1$. Considérons un tel l et écrivons:

$$a_{i_0} u_l = u_{l+n-i_0} + \sum_{i=0, i\neq i_0}^{n-1} a_i u_{l+i-i_0}$$

et $z = \sum x'_i u_i$ avec:

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k, \quad k > l+n-i_0 \quad k < l-i_0, \\ x'_{l+i-i_0} &= x_{l+i-i_0} + a_i \quad i = 0, ..., n-1, \\ x'_{l+n-i_0} &= x_{l+n-i_0} + 1. \end{aligned}$$

On a donc $N(x') \leq N(x) - a_{i_0} + \sum_{i=0, i\neq i_0}^{n-1} a_i + 1 < N(x)$. N étant à valeurs entières, en itérant le procédé, on parvient à une écriture admissible de z.

III. Codage et nombres de Pisot

On reprend les notations de la partie 3. Nous supposons que P n'a qu'une racine β de module strictement supérieur à 1. Cette racine est un nombre de Pisot. Elle est nécessairement réelle. Nous la supposerons positive. Nous supposons également que T est défini par la matrice compagne de P.

Le sous-espace instable de T, L_u, est une droite vectorielle portée par le vecteur $v = \pi_u(u_0)$. Notons L_u^+ l'ensemble $\mathbb{R}_+ v$. Modulo 1, l'ensemble L_u^+ est dense dans le tore. En effet, L_u^+ est aussi portée par le vecteur $w = (1, \beta, \ldots, \beta^{n-1})^t$, et on voit facilement, par un argument d'analyse de Fourier en utilisant le fait que P est le polynôme minimal de β, que $\{nw : n \in \mathbb{N}\}$ modulo 1 est dense dans $\mathbb{T}^n$.

D'après l'étude menée sur le β-développement, on sait que l'ensemble des vecteurs $a_\beta \pi_u(u_0)$, où a_β décrit $\{\sum \epsilon_i \beta^{-i} : \epsilon \in X_{\beta,f}\}$, où $X_{\beta,f}$ est ensemble des suites admissibles (c'est-à dire appartenant à X_β, défini dans la première partie) presque nulles, est dense dans L_u^+.

Définissons l'application ϕ_f comme suit : à la suite $\epsilon \in X_{\beta,f}$ associons le point du tore $\pi_u(\sum \epsilon_i u_{-i})$ modulo 1. L'appication ϕ_f est höldérienne, d'image dense dans $\mathbb{T}^n$, et telle que $\phi_f \circ \sigma = \mathsf{T} \circ \phi_f$, donc prolongeable en un codage, ϕ, de $(\mathbb{T}^n, \mathsf{T}, m)$.

Ceci nous donne un codage "topologique". Remarquons dès maintenant que ce codage par un système qui, comme nous le verrons est sofique, ne correspond pas en général au codage que propose Vershik : en effet son codage fournit une écriture admissible finie des éléments du semigroupe engendré par les u_i, alors que, pour le codage que nous venons de décrire, ce n'est pas toujours le cas (pour le voir prendre par exemple un automorphisme de polynôme caractéristique $X^3 - 3X^2 - 2X + 1$).

En munissant X_β de la mesure image de m par ϕ, on obtient un "morphisme" de systèmes dynamiques. Nous nous proposons maintenant d'identifier cette mesure.

III.1 Le cas β-simple

Soit β un nombre de Pisot de β-développement

$$\beta = \omega_\beta(0) + \omega_\beta(1)\beta^{-1} + \ldots + \omega_\beta(q)\beta^{-q}.$$

On a codé par un sous-shift l'automorphisme T du tore $\mathbb{T}^n$ représenté par la matrice compagne du polynôme minimal de β supposé de degré s. Ce sous-shift est défini par:

$$X_\beta = \{\epsilon \in \{0, \ldots, \omega_\beta(0)\}^{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{Z}\ (\epsilon_k, \ldots, \epsilon_{k+q}) < (\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(q))\}$$

et on a mis en évidence une application $\phi : X_\beta \longrightarrow \mathbb{T}^n$ holdérienne surjective telle que $\top \circ \phi = \phi \circ \sigma$ (où σ est le shift sur X_β).

Nous allons munir X_β d'une structure d'espace mesuré qui fera de $(\mathbb{T}^n, \top, m)$ (où m est la mesure de Lebesgue) un facteur de X_β par ϕ.

Montrons d'abord que X_β est un sous-shift de type fini. Soit M la matrice indexée par $(\omega_\beta(0)+1)^q \times (\omega_\beta(0)+1)^q$, définie par : $M(u,v) = 1$ si $u = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1}), v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q), (\alpha_0, \ldots, \alpha_q) < (\omega_\beta(0), \ldots, \omega_\beta(q)$ et $M(u,v) = 0$ sinon.

Posons $X = \{\alpha \in \{\{0, \ldots, \omega_\beta(0)\}^q\}^{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{Z} M(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = 1\}$. C'est un sous-shift de type fini et on a la correspondance bijective (qui est un homéomorphisme si on munit X_β et X de leur topologie produit) $f : X \longrightarrow X_\beta$,

$$(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}},\ [(\alpha_k^0, \ldots, \alpha_k^{q-1}] \longmapsto (\alpha_k^0)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

On a de plus $\sigma \circ f = f \circ \sigma$. Pour toute mesure borélienne μ', appelons μ la mesure image par f de μ'. L'application f est alors un isomorphisme de systèmes dynamiques.

Pour tout couple $(\epsilon^0, \epsilon^1) \in (\{0, \ldots, \omega_\beta(0)\}^q)^2$ la suite

$$\epsilon_1^0, \ldots, \epsilon_q^0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{q\times}, \epsilon_1^1, \ldots, \epsilon_q^1$$

appartient à X_β. Ceci montre que M est apériodique donc que l'on a sur X (et par conséquent sur X_β) une unique mesure d'entropie maximale, et que cette mesure est markovienne d'entropie $\log \lambda$ où λ est la valeur propre de M, nécessairement réelle positive, de plus grand module.

Revenons à notre codage $\phi : (X_\beta, \sigma) \longrightarrow (\mathbb{T}^n, \top)$.

Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{T}^n$. La tribu $\phi^{-1}(B)$ est incluse dans $\mathcal{B}_X$, la tribu borélienne de X_β, car ϕ est continue. Sur $\phi^{-1}(\mathcal{B})$, on peut considérer la mesure ν définie par $\nu(\phi^{-1}(A)) = m(A)$ où $A \in \mathcal{B}$, qui admet un prolongement $\overline{\nu}$ à $\mathcal{B}_X$.

Notons $h(Y, S, \mathcal{A}, \tau)$ l'entropie d'un système dynamique Y muni d'une tribu $\mathcal{A}$, d'une mesure τ sur $\mathcal{A}$ et d'une transformation S. Les inégalités suivantes sont immédiates :

$$\begin{aligned} h(\mathbb{T}^n, \top, \mathcal{B}, m) &= h(X_\beta, \sigma, \phi^{-1}(\mathcal{B}), \nu) \\ &\leq h(X_\beta, \sigma, \mathcal{B}_X, \overline{\nu}) \\ &\leq h(X_\beta, \sigma, \mathcal{B}_X, \mu) \\ &= h(X_\beta, \sigma) \\ &= h(X, \sigma) \end{aligned}$$

où μ est l'image par f de la mesure d'entropie maximale sur X et $h(X_\beta, \sigma)$ est l'entropie topologique de (X_β, σ).

Nous supposerons connu que $h(\mathbb{T}^n, \top, \mathcal{B}, m) = \log\beta$ (on pourra se reporter à [12]). Nous avons montré que $h(X_\beta, \sigma)$ est égale à $\log\beta$, ce qui entraîne $\mu = \overline{\nu}$ et $(\mathbb{T}^n, \top, m)$ est un facteur de (X_β, σ, μ).

III.2 Le cas non β-simple

Supposons maintenant que β soit un nombre de Pisot non β-simple. Nous avons écrit

$$\beta = \omega_\beta(0) + \omega_\beta(1)\beta^{-1} + \dots$$

On sait que la suite $(\omega_\beta(i))_{i\geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang, et on a codé $(\mathbb{T}, \top)$ par (X_β, σ), où X_β est défini par

$$X_\beta = \{x \in \{0, \dots, \omega_\beta(0)\}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}(x_i, x_{i+1}, \dots) \leq (\omega_\beta(0), \omega_\beta(1), \dots)\}$$

Proposition 1: *Le sous-shift X_β est sofique.*

Preuve: Il nous suffit de montrer que Card$\omega_+(X_\beta^-)$ est fini. Supposons que la suite

$$(\omega_\beta(0), \omega_\beta(1), \dots, \omega_\beta(p), \omega_\beta(p+1), \dots, \omega_\beta(p+q), \omega_\beta(p+q+1), \dots, \omega_\beta(p+2q), \dots)$$

soit égale à $(\omega_\beta(0), \dots, \omega_\beta(p), b_1, \dots, b_q, b_1, \dots, b_q, \dots)$.

La suite $(\omega_\beta(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ étant périodique à partir d'un certain rang et non presque nulle, la taille des plages de zéros consécutifs de cette suite est bornée par un entier noté M.

Posons

$$B_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(M+1)\times}, \omega_\beta(0), \dots, \omega_\beta(i)).$$

Les B_i sont des blocs finitaires et, pour $i > p$ on a $\omega_+(B_{i+q}) = \omega_+(B_i)$.

D'autre part, soit $x_- \in X_\beta^-$. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(\omega_\beta(0), \dots, \omega_\beta(k)) > (x_{-k}, \dots, x_0)$, alors $\omega_+(x_-) = X_\beta^+$. Sinon, soit k_0 le plus grand des k tels que $(x_{-k}, \dots, x_0) = (\omega_\beta(0), \dots, \omega_\beta(k))$. (On voit facilement que $(b_1, \dots, b_q) < (\omega_\beta(0), \dots, \omega_\beta(q-1))$ ce qui permet d'affirmer que l'entier k_0 ci-dessus est bien défini.)

Pour tout $n > k_0$ on a

$$(x_{-n}, \dots, x_0) < (\omega_\beta(0), \dots, \omega_\beta(n)),$$

d'où $\omega_+(x_-) = \omega_+(B_{k_0})$.

Ceci montre que $\omega_+(X_\beta^-) = \{X_\beta^+, \omega_+(B_0), \ldots, \omega_+(B_{p+q})\}$, et donc que X_β est sofique.

□

Ceci permet d'obtenir facilement la matrice N, qui est égale à la matrice M (cf les notations de I.1). On a ici:

$$\sigma(\omega_+(B_k) \cap Z(a)) = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } a > \omega_\beta(k+1) \\ \omega_+(B_{k+1}) \text{ si } a = \omega_\beta(k+1) \\ X_\beta^+, \text{ si } a < \omega_\beta(k+1) \end{cases}$$

Proposition 2: (X_β, σ) *est toplogiquement mélangeant.*

Preuve: Soient B et C deux mots de X_β de longueur m et n. On a $Z(B) \cap \sigma^k Z(C) \neq \emptyset$ pour $k \geq n + p + q + 1$.

□

Proposition 3: M *est apériodique.*

Preuve: Soit $Z(B')$ et $Z(C')$ deux cylindres de X_N. On peut écrire

$$\begin{aligned} B' &= ((b_1, B_1), \ldots, (b_i, B_i)), \\ C' &= ((c_1, C_1), \ldots, (c_j, C_j)), \\ B &= (b_1, \ldots, b_i), \\ C &= (c_1, \ldots, c_j). \end{aligned}$$

Soit $B_* = (b_l, \ldots, b_0)$ et $C_* = (c_m, \ldots, c_0)$ deux mots finitaires tels que (B_*, B) et (C_*, C) soient des mots de X_β et tels que $\omega_+(B_*) = B_1$, $\omega_+(C_*) = C_1$. On a :

$$s(Z((B_*, B))) \subset Z(B'), \quad s(Z((C_*, C))) \subset Z(C').$$

Mais, X_β étant mélangeant, il existe K tel que $k > K$ entraîne que

$$Z((C_*, C)) \cap \sigma^k Z((B_*, B)) \neq \emptyset,$$

d'où $Z(B') \cap \sigma^k Z(C') \neq \emptyset$, car il contient $s(Z((C_*, C)) \cap \sigma^k Z((B_*, B)))$.

Ceci entraîne que M est apériodique.

□

On a donc obtenu que $(\mathbb{T}^n, \top, m)$ est facteur du sous-shift mélangeant (X_N, σ, ν), où ν est l'unique mesure σ-invariante sur X d'entropie maximale.

IV. Etude de la bijectivité du codage : deux exemples

IV.1 Premier exemple

On se place ici dans le cas de la dimension deux. Considérons donc le tore $\mathbb{T}^2$, muni de l'automorphisme $\top$ défini par la matrice

$$\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - 3X + 1$, qui a comme racines $\beta = 1/2(3+\sqrt{5})$ et β^{-1}. L'entier algébrique β est un nombre de Pisot, et son β-développement est $(2,1,1,1,\ldots)$. Nous avons défini le β-shift :

$$X_\beta = \{x \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}(x_i, x_{i+1}, \ldots) \leq (2,1,1,\ldots)\}.$$

On peut aussi définir X_β de la manière suivante: $(2,1,1,\ldots,1,1,2) \notin \mathcal{B}(X_\beta)$. Nous avons vu comment coder $(\mathbb{T}^2, \top)$ par (X_β, σ).

Prenons pour u_0 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (u_0 désignera indifféremment l'élément de $\mathbb{T}^2$ ou de $\mathbb{R}^2$ correspondant). On définit pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $u_i = \top^i(u_0)$. Soit e_1 un vecteur propre de $\top$ associé à la valeur propre β, e_2 associé à β^{-1} ; Δ la droite vectorielle portée par e_1, D la droite vectorielle portée par e_2. Enfin, on notera π_u la projection sur Δ parallèlement à D, π_s la projection sur D parallèlement à Δ. On appellera Δ_+ la demi-droite $\mathbb{R}_+\pi_u(u_0)$, D_+ la demi-droite $\mathbb{R}_-\pi_s(u_0)$. Enfin $\mathcal{P}$ désignera le quart de plan compris entre les deux demi-droites Δ_+ et D_-.

Nous définissons alors $\phi : X_{\beta f} \longrightarrow \mathbb{T}^2$ par

$$\epsilon \longmapsto \pi_u(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_i u_{-i}) \mod 1 = -\pi_s(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_i u_{-i}) \mod 1.$$

Cette application est höldérienne, d'image dense, et telle que $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi$, donc prolongeable en une application, encore notée ϕ, de X_β dans $\mathbb{T}^2$, surjective, höldérienne, vérifiant encore la propriété de conjugaison.

Si pour $i < k$, $\epsilon_i = 0$, alors l'expression $(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_i \beta^{-i})\pi_u(u_0)$ a un sens dans $\mathbb{R}^2$, et on a

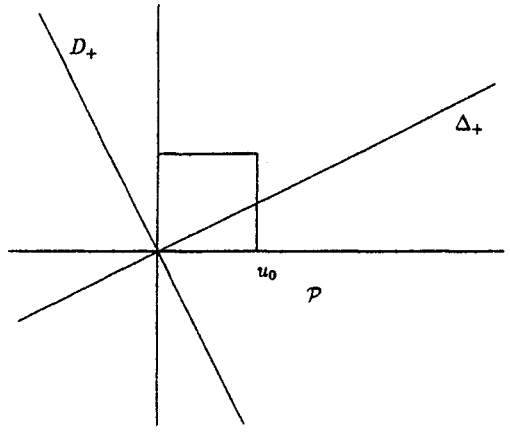
$$\phi(\epsilon) = (\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_i \beta^{-i})\pi_u(u_0) \mod 1.$$

De même, s'il existe k tel que $\epsilon_i = 0$ pour $i > k$, alors

$$\phi(\epsilon) = (\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_i \beta^{i})(-\pi_s(u_0)) \mod 1.$$

Ces remarques nous permettent de voir que l'on peut écrire, pour tout $\epsilon \in X_\beta$

$$\phi(\epsilon) = (\sum_{i=-\infty}^{k} \epsilon_i \beta^i)(-\pi_s(u_0)) + (\sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon_i \beta^{-i})\pi_u(u_0)) \mod 1.$$



Nous allons maintenant montrer que le codage que nous avons obtenu est bijectif excepté sur $\Delta_+ \cup D_+$.

Tout d'abord, rappelons que tout élément de $\mathbb{R}_+$ admet un développement de la forme $\sum_K^\infty \epsilon_i \beta^{-i}$, et que ce développement est unique sauf sur l'ensemble dénombrable $\{\sum \epsilon_i \beta^{-i} : \epsilon \in X_{\beta f}\}$ (ces nombres ayant deux développements).

Proposition 1: $\phi(\ldots, 1, 1, 1, \ldots) = 0$

Preuve:

$$\begin{aligned}
&\phi(\ldots,1,1,1,\ldots) + \phi(\ldots,0,1,0,\ldots) \\
&\quad = \phi(\ldots,1,1,0,\ldots) + \phi(\ldots,0,0,1,\ldots) + \phi(\ldots,0,1,0,\ldots) \\
&\quad = \phi(\ldots,1,2,0,\ldots) + \phi(\ldots,0,0,1,\ldots) \\
&\quad = \phi(\ldots,0,0,1,0,\ldots) + \phi(\ldots,0,0,1,\ldots) \\
&\quad = \phi(\ldots,0,0,2,1,\ldots) \\
&\quad = \phi(\ldots,0,1,0,\ldots),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat (on a à plusieurs reprises utilisé la relation $\beta = 2 + \sum_1^\infty \beta^{-i}$).

□

Proposition 2: *Tous les éléments de $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{P}$ (c'est-à-dire les éléments du semi-groupe G engendré par les u_i) s'écrivent de manière unique comme une somme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i u_{-i}$ avec $\epsilon \in X_{\beta f}$ (i.e. suite appartenant à X_β presque nulle).*

Preuve: Montrons d'abord que $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{P}$ coïncide avec G. On montre très facilement que tous les éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ appartenant à la partie $\mathcal{L}$ limitée par $\mathbb{R}_+ u_0$ et $\mathbb{R}_+ u_1$ sont de la forme $pu_0 + qu_1$, où p et q sont entiers naturels. Ensuite on remarque que l'on a la relation suivante : $\mathcal{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \top^k \mathcal{L}$; on en déduit la coïncidence voulue.

Pour démontrer que les éléments de G peuvent être écrits sous une forme admissible il suffit de montrer que toutes les combinaisons linéaires $\sum k_i \beta^{-i}$ à coefficients entiers positifs peuvent s'ecrire sous la forme $\sum \epsilon_i \beta^{-i}$ avec $\epsilon \in X_{\beta f}$: en effet, D_+ étant à pente irrationnelle, un élément de la forme $(\sum k_i \beta^{-i} i)\pi_u(u_0)$ est projection de l'unique élément $\sum k_i u_{-i}$ de G.

Nous allons donner la preuve de ce résultat sous forme symbolique. Par exemple écrivons sous forme admissible :

$$\alpha = 2 + \beta^{-1} + \beta^{-2} + 2\beta^{-3}$$

En utilisant $\beta^{-3} = 2\beta^{-4} + \sum_5^\infty \beta^{-i}$, on obtient :

$$\alpha = 2 + \beta^{-1} + \beta^{-2} + \beta^{-3} + 2\beta^{-4} + \sum_5^\infty \beta^{-i}$$

Mais $\beta = 2 + \sum_1^\infty \beta^{-i}$, donc

$$\alpha = \beta + \beta^{-4}$$

Pour symboliser cette suite d'opérations nous écrirons :

$$\ldots, 0, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 0, \ldots$$

$$\ldots, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots$$

$$\ldots, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots$$

Montrons, et cela suffira, que pour tout $\epsilon \in X_{\beta f}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire de manière admissible $z = \sum \epsilon_i \beta^{-i} + \beta^{-k}$.

Cas 1. Supposons que l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée

$$\epsilon_k = 0, \quad \forall j > k, \ (\epsilon_j, \epsilon_{j-1}, \ldots, \epsilon_{k+1}) < (2, 1, \ldots, 1),$$

$$\epsilon_k = 0, \quad \forall j < k, \ (\epsilon_j, \epsilon_{j+1}, \ldots, \epsilon_{k-1}) < (2, 1, \ldots, 1),$$

$$\epsilon_k = 1, \forall j < k, \ (\epsilon_j, \epsilon_{j+1}, \ldots, \epsilon_{k-1}) < (2, 1, \ldots, 1),$$

$$\forall j > k, \ (\epsilon_j, \epsilon_{j-1}, \ldots, \epsilon_{k+1}) < (2, 1, \ldots, 1),$$

alors la suite $(\ldots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_k + 1, \epsilon_{k+1}, \ldots)$ est admissible.

Cas 2. Supposons $\epsilon_k = 0$,

$$\exists j < k : \ (\epsilon_j, \epsilon_{j+1}, \ldots, \epsilon_{k-1}) = (2, 1, \ldots, 1),$$

$$\exists l > k : \ (\epsilon_l, \epsilon_{l-1}, \ldots, \epsilon_{k-1}) = (2, 1, \ldots, 1).$$

Alors on peut écrire :

$$\ldots, \epsilon_{j-2}, \epsilon_{j-1}, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1, 2, \epsilon_{l+1}, \epsilon_{l+2}, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{j-2}, \epsilon_{j-1}, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \epsilon_{l+1} + 2, \epsilon_{l+2} + 1, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{j-2}, \epsilon_{j-1} + 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \epsilon_{l+1} + 1, \epsilon_{l+2}, \ldots$$

Cette dernière suite est admissible.

Cas 3. $\epsilon_k = 1$,

$$\exists j < k \ \ (\epsilon_j, \epsilon_{j+1}, \ldots, \epsilon_{k-1}) = (2, 1, \ldots, 1),$$

$$\ldots, \epsilon_{j-2}, \epsilon_{j-1}, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1, 2, \epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{j-2}, \epsilon_{j-1}, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \epsilon_{k+1} + 2, \epsilon_{k+2} + 1, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{j-2}, \epsilon_{j-1} + 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \epsilon_{k+1} + 1, \epsilon_{k+2}, \ldots$$

Cas 4. $\epsilon_k = 1$,

$$\exists l > k : \ (\epsilon_l, \epsilon_{l-1}, \ldots, \epsilon_{l+1}) = (2, 1, \ldots, 1)$$

$$\ldots, \epsilon_{k-2}, \epsilon_{k-1}, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1, 2, \epsilon_{l+1}, \epsilon_{l+2}, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{k-2}, \epsilon_{k-1}, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \epsilon_{l+1} + 2, \epsilon_{l+2} + 1, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{k-2}, \epsilon_{k-1} + 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \epsilon_{l+1} + 1, \epsilon_{l+2}, \ldots$$

Si on est dans la situation 3 (resp. 4), on effectue les opérations décrites et on se retrouve alors dans la situation 1 (la suite est admissible), ou 4 (resp. 3) ; dans ce cas on applique les opérations 4 (resp. 3) ; la suite obtenue est admissible.

Cas 5. $\epsilon_k = 2$

$$\ldots, \epsilon_{k-2}, \epsilon_{k-1}, 3, \epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{k-2}, \epsilon_{k-1}, 2, \epsilon_{k+1} + 2, \epsilon_{k+2} + 1, \ldots$$

$$\ldots, \epsilon_{k-2}, \epsilon_{k-1} + 1, 0, \epsilon_{k+1} + 1, \epsilon_{k+2}, \ldots$$

Cette dernière suite est admissible.

□

Corollaire 1: *On a l'équivalence suivante*

$$x \in \Delta_+ \cap D_+ \Leftrightarrow \exists \epsilon \in X_{\beta f} \quad x = \phi(\epsilon).$$

Preuve: L'implication $\Leftarrow$ Ne pose pas de problème. Montrons la réciproque.

Considérons $y \in \Delta_+ \subset \mathbb{R}^2$ et $z \in D_+ \in \mathbb{R}^2$ tels que y et z soient projetés en x par la projection canonique de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{T}^2$. Alors $y - z \in Z^2 \cap \mathcal{P}$, donc y et z sont respectivement la projection d'un élément de $Z^2 \cap \mathcal{P}$ sur Δ_+, et l'opposé de la projection du même élément de $Z^2 \cap \mathcal{P}$ sur D_-. D'après la propositon précédente, un tel élément admet un codage fini, ce qui entraîne qu'il en est de même pour x.

□

Lemme 1: *Soit ν une suite de X_β vérifiant les conditions suivantes*

$$\forall i \in \mathbb{Z}, (\nu_i, \nu_{i+1}, \ldots) < (2, 1, 1, \ldots)$$
$$\exists k > i \quad \nu_k \neq 0.$$

Considérons l'ensemble $C = \{\mu : \forall i \leq k \quad \mu_i = \nu_i\}$. Alors $\phi(C)$ est un segment parallèle à Δ_+ contenant un segment ouvert contenant $\phi(\nu)$.

Preuve: Ecrivons pour $\mu \in C$,

$$\phi(\mu) = \phi(\ldots, \nu_{k-1}, \nu_k, 0, 0, \ldots) + \phi(\ldots, 0, 0, \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots) = a_\nu + b_\mu.$$

Quand on fait varier μ, l'ensemble des b_μ décrit le segment

$$I = [0, \phi(\max_{\mu \in C}(\ldots, 0, \mu_{k+1}, \ldots))].$$

Ceci provient du fait que l'application

$$\psi : X_{\beta g} = \{x \in X_\beta : \exists k \in \mathbb{Z} \quad \forall i < k \quad x_i = 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \sum x_i \beta^{-i}$$

est croissante, lorsque l'on munit $X_{\beta g}$ de l'ordre lexicographique. On a donc

$$\phi(C) = \phi(\ldots, \nu_{k-1}, \nu_k, 0, 0, \ldots) + I.$$

D'autre part $\phi(\nu)$ appartient à l'intérieur de ce segment. En effet, supposons le contraire, alors on a :

• Soit $\phi(\nu) = \phi(\ldots, \nu_k, 0, 0, \ldots)$, mais alors $\phi(\ldots, 0, 0, \nu_{k+1}, \nu_{k+2}, \ldots) = 0$, donc $\nu_i = 0$ pour tout $i > k$ (β-développement sur Δ_+), ce qui contredit l'hypothèse 1.

• Soit $\phi(\nu) = \phi(\ldots, \nu_k, \mu^0_{k+1}, \mu^0_{k+2}, \ldots)$, où:

$$(\ldots, 0, 0, \mu^0_{k+1}, \mu^0_{k+2}, \ldots) = \max_{\mu \in C}(\ldots, 0, 0, \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots).$$

Définissons i_0 par la condition: $i_0 + 1 \leq k$ est tel que:

$$(\nu_{i_0+1}, \nu_{i_0+2}, \ldots, \nu_k) = (2, 1, \ldots, 1)$$

si un tel i_0 existe, sinon posons $i_0 = k$. Si $i_0 \leq k-1$, alors $(\ldots, 0, 0, \mu^0_{k+1}, \ldots) = (\ldots, 0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$.

Si $i_0 = k$, alors $(\ldots, 0, 0, \mu^0_{k+1}, \ldots) = (\ldots, 0, 0, 2, 1, 1, \ldots)$.

Alors $\phi(\nu) = \phi(\ldots, \nu_{i_0}, 2, 1, 1, \ldots)$, d'où :

$$\phi(\ldots, 0, 0, \nu_{k+1}, \nu_{k+2}, \ldots) = \phi(\ldots, 0, 0, 2, 1, 1, \ldots).$$

Or le premier membre de cette égalité appartient à $\Delta_+ \cap {}^cD_+$ (par hypothèse 2, en effet, le développement dans $\mathbb{R}_+$ de $\sum_{k+1}^{\infty} \nu_i \beta^{-i}$ est unique) alors que le deuxième membre appartient à l'intersection $\Delta_+ \cap D_+$; on a donc une contradiction.

□

Nous dirons que ϵ vérifie l'hypothèse (H) si

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{Z},\ & (\epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \ldots) < (2, 1, 1, \ldots) \\ & \exists k > i :\ \epsilon_k \neq 0 \\ & (\epsilon_i, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i-2}, \ldots) < (2, 1, 1, \ldots) \\ & \exists k < i\ \ \epsilon_k \neq 0. \end{aligned}$$

Lemme 2: *Lorsque ϵ vérifie l'hypothèse (H) et n'est pas la suite constante égale à 1, pour n suffisamment grand, $\phi(Z((\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n)))$ est un rectangle de côtés parallèles à Δ_+ et D_+, et tel que $\phi(\epsilon)$ appartienne à son intérieur.*

Preuve: Posons $A_\epsilon = \{\mu : \forall i \leq n\ \ \mu_i = \epsilon_i\}$. L'image $\phi(A_\epsilon)$ est le segment $I = [\phi(\ldots, \epsilon_n, 0, 0, \ldots), \phi(\ldots, \epsilon_n, \mu^0_{n+1}, \mu^0_{n+2}, \ldots)]$; $\phi(\epsilon)$ n'est pas une extrémité de ce segment (lemme). Soit $B_\mu = \{\nu : \forall i \geq -n\ \ \nu_i = \mu_i\}$; $\phi(B_\mu)$ est un segment de longueur indépendante de μ, n'ayant pas $\phi(\mu)$ pour extrémité.

$$(*)\ \ \phi(Z(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n)) = \bigcup_{\mu \in A_\epsilon} \phi(B_\mu)$$

On voit, comme dans le lemme précédent, que $\phi(B_\mu)$ est le segment

$$[0, \phi(\max_{\nu \in B_\mu}(\nu_{-n-1}, \nu_{-n-2}, \ldots)] + \phi(\ldots, 0, 0, \mu_{-n}, \mu_{-n+1}, \ldots)$$

contenant $\phi(\mu)$ en son intérieur. Le segment $\phi(B_\mu)$ est indépendant de $\mu \in A_\epsilon$ car $(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n) \neq (1, \ldots, 1)$. Enfin, si μ et μ' sont deux éléments de A_ϵ, l'égalité

$$\phi(\ldots, 0, 0, \mu_{-n}, \mu_{-n+1}, \ldots) - \phi(\ldots, 0, 0, \mu'_{-n}, \mu'_{-n+1}, \ldots) = \phi(\mu) - \phi(\mu')$$

permet d'affirmer que le membre de droite de l'égalité $(*)$ est le rectangle $\phi(A_\epsilon) \times \phi(B_\epsilon)$; x est à l'intérieur de ce rectangle.

□

Lemme 3: *Soit $x \in \Delta_+ \cup D_+$, $x \neq 0$ et ϵ telle que $\phi(\epsilon) = x$. Alors, ϵ ne vérifie pas l'hypothèse (H).*

Preuve: Prenons par exemple $x \in \Delta_+$. Définissons ν par : $\nu_i = 0$ si $i > m$, $\nu_i = \epsilon_i$ si $i \leq m$. Alors pour m suffisamment grand, $\phi(\nu)$ appartient encore à Δ_+, donc à $\Delta_+ \cap D_+$. Il existe par conséquent une suite μ appartenant à $X_{\beta f}$ telle que $\phi(\nu) = \phi(\mu)$. Ce que nous avons vu du β-développement des réels positifs nous permet alors d'affirmer que soit ν est presque nulle, soit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\nu_k, \nu_{k+1}, \ldots) = (2, 1, 1, \ldots)$. Dans les deux cas ceci montre que ϵ ne vérifie pas l'hypothèse (H). Le cas $x \in D_+$ se traite exactement de la même façon.

□

Proposition 3: *Le codage obtenu est biunivoque sur $\mathbb{T}^2$ privé des deux demi-droites Δ_+ et D_+.*

Preuve: Soient $x \notin \Delta_+ \cup D_+$, et $\epsilon \in X_\beta$ telle que $\phi(\epsilon) = x$. Comme $x \notin \Delta_+ \cup D_+$, ϵ vérifie l'hypothèse (H) et $(\ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_j, \ldots) \neq (\ldots, 1, 1, 1, \ldots)$. Alors il existe K suffisamment grand pour que $(\epsilon_{-K}, \ldots, \epsilon_K) \neq (1, 1, \ldots, 1, 1)$. Alors d'après le lemme 2, pour $n \geq K$, $\phi(Z(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n))$ est un rectangle, R_n, contenant x en son intérieur.

Fixons un tel n. Posons :

$$E = \{\mu : \forall i > n \quad \mu_i = 0\}$$

et

$$F = \{\mu : \forall i < -n \quad \mu_i = 0\}.$$

L'ensemble $\phi(Z(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n)) \cap {}^c(\phi(E) \cup \phi(F))$ contient un rectangle R^n voisinage de x. Soit alors ν une suite admissible presque nulle telle que $\phi(\nu)$ appartienne à ce rectangle. Prenons $\mu \in Z(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n)$ tel que $\phi(\mu) = \phi(\nu)$. D'après le lemme 3, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $(\mu_{i+1}, \ldots) = (0, \ldots)$ ou $(\mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \ldots) = (2, 1, 1, \ldots)$; dans le premier cas posons $\mu' = \mu$, dans le second définissons μ' par $\mu'_j = \mu_j$ si $j < i$, $\mu'_i = \mu_i + 1$, et $\mu'_j = 0$ si $j > i$.

On a $\phi(\mu') = \phi(\mu)$ et μ' est "fini à droite", et comme $\phi(\mu') \in \Delta_+ \cap D_+$, on peut affirmer qu'il existe $l \in Z$ tel que $(\mu_{l-1}, \mu_{l+2}, \ldots) = (0, \ldots)$ ou $(\mu_{l-1}, \mu_{l-2}, \ldots) =$

$(2,1,1,\ldots)$. On définit alors la suite μ'' presque nulle par $\mu'' = \mu'$, dans le premier cas (μ' est déjà presque nulle), et par $\mu''_j = \mu'_j$ si $j > l$, $\mu''_l = \mu'_l + 1$, et $\mu''_j = 0$ si $j < l$, dans le second.

On a $\phi(\nu) = \phi(\mu")$ et ces deux suites sont presque nulles ; ceci entraîne qu'elles sont égales. Mais on a fait en sorte que μ n'appartienne ni à E, ni à F, donc il existe $k < -n$ et $m > n$ tels que $\mu"_k$ et $\mu"_m$ sont non nuls, donc $l < -n$ et $i > n$, ce qui signifie que $\mu" \in Z((\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n))$. On a montré que ν presque nulle telle que $\phi(\nu) \in R^n$ appartient à $Z((\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n))$, ceci entraîne l'unicité de ϵ tel que $\phi(\epsilon) = x$.

□

On peut étendre le raisonnement précédent à l'ensemble des codages obtenus par la même méthode pour les automorphismes de $\mathbb{T}^2$ ayant pour polynôme caractéristique $X^2 - aX + 1$ avec $a \geq 3$. En effet, les valeurs propres d'un tel automorphisme sont $\beta = 1/2(a + \sqrt{a^2 - 4})$ et β^{-1}. Le β-développement de β est $\beta = (a-1) + (a-2)\beta^{-1} + (a-2)\beta^{-2} + \ldots$, donc X_β est défini par $((a-1),(a-2),\ldots,(a-2),(a-1)) \notin \mathcal{B}(X_\beta)$. On définit comme dans l'exemple ci-dessus Δ_+ et D_+, et la même démonstration donne le même résultat.

IV.2 Deuxième exemple

On considère ici le système dynamique $(\mathbb{T}^2, \mathsf{T}, m)$ où le polynôme caractéristique de T est $X^2 - X - 1$. Par exemple

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\beta > 0$ tel que $\beta^2 - \beta - 1 = 0$. On a défini le β-shift $X_\beta = \{\epsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z} \quad \epsilon_i \epsilon_{i+1} = 0\}$. Prenons pour u_0 le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (u_0 désignera indifféremment l'élément de $\mathbb{T}^2$ ou de $\mathbb{R}^2$ correspondant). On définit pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $u_i = \mathsf{T}^i(u_0)$, u_1 est alors le premier vecteur de la base canonique. Soit e_1 un vecteur propre de T associé à la valeur propre β, e_2 associé à $-\beta^{-1}$; Δ la droite vectorielle portée par e_1, D la droite vectorielle portée par e_2. On notera π_u la projection sur Δ parallèlement à D, π_s la projection sur D parallèlement à Δ. On appellera Δ_+ la demi-droite $\mathbb{R}_+\pi_u(u_0)$. Enfin $\mathcal{P}$ désignera le demi-plan déterminé par D et contenant Δ_+.

$X_{\beta d}$ désignera l'ensemble $\{\epsilon \in X_\beta : \exists i \in \mathbb{Z} \quad \forall j > i \quad \epsilon_j = 0\}$ et on munira $X_{\beta d}$ de la distance $d(\epsilon, \epsilon') = \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-i}|\epsilon'_i - \epsilon_i|$.

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi \; : & X_{\beta d} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}} \longmapsto \sum \epsilon_i (-\beta)^i. \end{aligned}$$

On montre facilement que ψ est höldérienne. On peut écrire tous les éléments de G (le semigroupe engendré par les $u_i = \top^i u_0$) comme une somme $\sum \epsilon_i u_{-i}$, où $\epsilon \in X_{\beta f}$, donc $\psi(X_{\beta f})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4: *L'application ψ est surjective.*

Preuve: Soit ϵ un élément de $X_{\beta d}$ et $K = \max\{k : \epsilon_k \neq 0\}$. On montre les inégalités suivantes

$$\beta^{K+1} \geq (-1)^K \psi(\epsilon) \geq \beta^{K-1}$$

Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, il existe un entier l tel que

$$-\beta^{2l} < x - 1 < x + 1 < \beta^{2l-1}$$

Prenons un élément ϵ de $X_{\beta f}$ tel que $|\psi(\epsilon) - x| < 1$, On a $-\beta^{2l} < \psi(\epsilon) < \beta^{2l-1}$, ce qui entraîne que, pour $i \geq 2l$, $\epsilon_i = 0$.

Prenons une suite $(\epsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $X_{\beta f}$ telle que, pour tout k, on ait $|\psi(\epsilon^k) - x| < 1$ et telle que $\psi(\epsilon^k)$ tende vers x lorsque k tend vers l'infini. Alors quel que soit k, quel que soit $i \geq 2l$, $\epsilon_i^k = 0$. On peut donc extraire de la suite $(\epsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $X_{\beta d}$ vers un ϵ ($\epsilon_i = 0$ pour $i \geq 2l$). On obtient $\psi(\epsilon) = x$.

□

Lemme 4: *L'application ψ est biunivoque sauf sur l'ensemble C^d des suites $\epsilon \in X_{\beta d}$ telles que il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $(\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$.*

Preuve: • $\psi(\epsilon) = 0$ si et seulement si $\epsilon = 0$. • Prenons ϵ et ϵ' deux suites non nulles telles que $\psi(\epsilon) = \psi(\epsilon')$. Soit K le plus grand entier k tel que $\epsilon_k \neq \epsilon'_k$. Supposons par exemple $\epsilon_K = 1$, $\epsilon'_K = 0$ et K pair (le cas impair se traite exactement de la même façon). Alors :

$\epsilon'_{K-1} = 0$ sinon $\psi(\epsilon')\psi(\epsilon) < 0$

$\epsilon'_{K-2} = 1$ sinon $|\psi(\epsilon) - \psi(\epsilon')| \geq \beta^K - \beta^{K-2}$

$\epsilon_{K-2} = 0$ sinon $|\psi(\epsilon) - \psi(\epsilon')| \geq \beta^K + \beta^{K-3} - \beta^{K-1}$

$\epsilon_{K-3} = 1$ sinon $|\psi(\epsilon) - \psi(\epsilon')| \geq \beta^K - \beta^{K-4} - \beta^{K-1}$

Supposons que pour $n \geq i \geq 1$ on ait $\epsilon_{K-2i-1} = 1$, $\epsilon_{K-2i} = 0$, $\epsilon'_{K-2i-1} = 0$ et $\epsilon'_{K-2i} = 1$ alors :

$\epsilon'_{K-2n-2} = 1$ sinon $|\psi(\epsilon) - \psi(\epsilon')| \geq \beta^{K-2n-1} - \beta^{K-2n-3}$

$\epsilon_{K-2n-3} = 1$ sinon $|\psi(\epsilon) - \psi(\epsilon')| \geq \beta^{K-2n-2} - \beta^{K-2n-4}$

D'où le résultat.

□

On en déduit que ψ est un homéomorphisme local au voisinage des éléments n'appartenant pas à $\mathcal{C}^d$ et que $\psi(Z(\epsilon_{-n}, \epsilon_{-n+1}, \ldots))$ contient un segment dont la longueur ne dépend que de n. Si $\nu \in Z(\epsilon_{-n}, \ldots)$ et $\nu \notin \mathcal{C}^d$, on peut choisir ce segment de manière à ce qu'également les distances de $\psi(\nu)$ aux extrémités de ce segment ne dépendent que de n. On peut raisonner de même pour $\phi(Z(\epsilon_{-n}, \epsilon_{-n+1}, \ldots))$ (ici ϵ est un élément de X_β, et on prendra comme équivalent de $\mathcal{C}^d$ l'ensemble $\mathcal{C} = \{\epsilon \in X_\beta : \exists k \in \mathbb{Z} \ (\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \ldots) = (1,0,1,0,\ldots)\}$).

Définition: *Lorsqu'une suite n'appartient ni à $X_{\beta d}$, ni à $\mathcal{C}$, ni à $\mathcal{T} = \{\epsilon \in X_\beta : \exists k \in \mathbb{Z} \ (\epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots) = (1,0,1,0,\ldots)\}$, on dira qu'elle vérifie l'hypothèse (H).*

Lemme 5: *Soit ϵ une suite vérifiant l'hypothèse (H) ; $\phi(Z(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n))$ contient un rectangle ouvert contenant $\phi(\epsilon)$.*

Preuve: Comme ϵ n'appartient ni à $X_{\beta d}$ ni à $\mathcal{T}$, $\phi(Z(\ldots, \epsilon_n))$ est un segment contenant $\phi(\epsilon)$ en son intérieur. Pour chaque élément $\nu = (\ldots, \epsilon_n, \nu_{n+1}, \nu_{n+2}, \ldots)$ appartenant à $Z(\ldots, \epsilon_n)$, $\phi(Z(\epsilon_{-n}, \ldots, \epsilon_n, \nu_{n+1}, \ldots))$ contient un segment ouvert contenant $\phi(\nu)$. La remarque faite plus haut permet d'affirmer que l'on peut choisir ces segments de manière à ce que leur réunion contienne un rectangle ouvert contenant $\phi(\epsilon)$.

□

Lemme 6: *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes : x appartient à l'intersection $\Delta_+ \cap D$, il existe une suite ϵ appartenant à $X_{\beta f}$ telle que $x = \phi(\epsilon)$.*

Preuve: On a montré dans la partie 3 que tous les éléments de G peuvent s'écrire sous la forme $\sum \epsilon_i u_{-i}$ avec $\epsilon \in X_{\beta f}$. Montrons que G coïncide avec $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{P}$. Evidemment $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{P}$ contient G. L'ensemble G ayant pour élément u_0 et u_1, il contient $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mais pour tout élément w de $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{P}$ il existe k entier naturel tel que $T^k w \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; ceci montre que $T^k w$ appartient à G pour k assez grand, donc que w appartient à G. Le résultat découle facilement de ces résultats.

□

Lemme 7: *Les éléments de $\mathcal{C}$ sont envoyés par ϕ sur Δ_-.*

Preuve: Soit x un tel élément. On a vu que x est de la forme

$$x = \phi(\ldots, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \epsilon_{k+2}, \epsilon_{k+3}, \ldots).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x &= \phi(\ldots, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots) + \phi(\ldots, 0, 0, 0, \epsilon_{k+2}, \ldots) \\ &= (-1)^{k+1} \pi_s(u_0) + \Big(\sum_{k+2}^{\infty} \epsilon_i \beta^{-i}\Big) \pi_u(u_0) \mod 1. \end{aligned}$$

On remarque d'autre part que

$$\phi(\ldots,0,\underline{+}1_{k-1},0,\ldots) = \beta^{1-k}\pi_u(u_0) \mod 1 = (-1)^k\beta^{k-1}\pi_u(u_0) \mod 1.$$

On a donc

$$x = (\sum_{k+2}^{\infty}\epsilon_i\beta^{-i}) - \beta^{1-k})\pi_u(u_0) \mod 1,$$

qui est bien un élément de Δ_-.

□

Lemme 8: *Soit ϵ une suite vérifiant l'hypothèse (H) ; $\phi(\epsilon) \notin \Delta \cap D$*

Preuve: Soit $x = \phi(\nu)$ un élément de $\Delta \cap D$. Soit μ définie par $\mu_i = \nu_i$ pour $i \geq m$ et $\mu_i = 0$ pour $i < m$. Bien entendu $\phi(\mu)$ appartient toujours à D ("on s'est déplacé sur D"), donc $\phi(\mu) \in D \cap \Delta_+$ et il existe $\eta \in X_{\beta f}$ tel que $\phi(\mu) = \phi(\eta)$. Ceci entraîne soit $\mu \in X_{\beta f}$ soit $\mu \in \mathcal{T}$, d'où $\nu \in X_{\beta d}$ ou $\nu \in \mathcal{T}$.

□

Proposition 5: *L'application ϕ est bijective sauf sur $\Delta_- \cup D$.*

Preuve: Soient $x \neq 0$ n'appartenant pas à $\Delta_- \cup D$ et ϵ telle que $\phi(\epsilon) = x$. La suite vérifie l'hypothèse (H). Il existe n tel qu'il y ait dans $(\epsilon_{-n},\ldots,\epsilon_n)$ au moins deux 0 consécutifs. Posons $E = \phi(\{\nu : \forall i > n+1 \quad \nu_i = 0\})$. On peut trouver un rectangle ouvert R inclus dans $\phi(Z(\epsilon_{-n},\ldots,\epsilon_n)) \cap E^c$ contenant x.

Soit $\nu \in X_{\beta f}$ telle que $\phi(\nu) \in R$. Il existe $\mu \in Z(\epsilon_{-n},\ldots,\epsilon_n)$ telle que $\phi(\nu) = \phi(\mu)$. D'après la proposition précédente, μ ne vérifie pas l'hypothèse (H). La suite μ n'appartient pas à $\mathcal{C}$ car $\phi(\mu)$ n'appartient pas à Δ_-, donc μ appartient soit à $X_{\beta d}$, soit à $\mathcal{T}$.

Définissons μ' par $\mu' = \mu$ dans le premier cas, et dans le second cas par $\mu'_i = 0$ si $i > i_0$, $\mu'_i = \mu_i$, si $i < i_0$ et $\mu'_{i_0} = \mu_{i_0} + 1$, où i_0 est le plus grand élément k de $\mathbb{Z}$ tel que $\mu_{k-1} = \mu_k = 0$. On obtient ainsi un élément de $X_{\beta d}$ tel que $\phi(\mu') = \phi(\nu)$, c'est à dire $\psi(\mu') = \psi(\nu)$ et, μ n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, $\mu' = \nu$. Maintenant, comme $\phi(\mu')$ n'appartient pas à E, $i_0 > n$ et μ' est dans $Z(\epsilon_{-n},\ldots,\epsilon_n)$, donc ν aussi ce qui montre l'unicité du développement de x.

□

Bibliographie

[1] **W.Parry**: *On the β-expansion of real numbers*, Acto. Math. Sci. Hungar, vol. 11, 1960, p. 401-416.

[2] **A.Bertrand-Mathis**: *Développement en base θ, répartition modulo 1 de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langage codés et θ-shift*, Bull. Soc. Math. France, 114, 1986, p. 271-323.

[3] **A.M.Vershik**: *The fibadic expansions of real numbers and adic transformation*, Prep. Report Inst, Mittag Leffler, no 4, 1-9 (1991-1992).

[4] **A.M.Vershik**: *Arithmetic Isomorphism of Hyperbolic Toral Automorphisms and Sofic Shift*, UDC 519.56, 517.91.

[5] **S.Ito, Y.Takahashi**: *Markov subshifts and realization of β-expansion*, J. Math. Soc. Japan, vol. 26, no 1, 1974.

[6] **Y.Takahashi**: *Isomorphisms of β-automorphisms to Markov automorphisms*, Osaka J. Math., 10 (1973), 175-784.

[7] **Y.Guivarc'h, J.Hardy**: *Théorèmes limites pour une classe de chaines de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 24, no 1, 1988, p. 73-98.

[8] **R.Bowen**: *Equilibrium States and the Ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math., Springer Verlag 470.

[9] **W.Krieger**: *On sofic systems*, Israel Journ. of Math., 1984.

[10] **E.Cawley**: *Smooth Markov partitions and toral automorphisms*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1991), 11, p. 633-651.

[11] **R.M.Salem**: *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Boston, 1963.

[12] **M.Denker, C.Grillenberger, K.Sigmund**: , *Ergodic theory on compact spaces*, Lect. Notes in Math., Springer Verlag 527.