

THIERRY BAUTIER

**Méthodes qualitatives d'étude des conceptions d'élève : un exemple,
la symétrie orthogonale en classe de sixième**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993-1994, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques », , exp. n° 8, p. 1-26

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993-1994__3_A8_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Méthodes qualitatives d'étude des conceptions d'élève :
un exemple, la symétrie orthogonale en classe de sixième**

Thierry BAUTIER

I.U.F.M. de Bretagne – Site de Vannes – 32 avenue Roosevelt – 56000 VANNES

**Méthodes qualitatives d'étude des
conceptions d'élèves : un exemple,
la symétrie orthogonale en classe
de sixième**

Un plan d'expérience a été conçu pour mettre en évidence, par les moyens de la statistique inférentielle, quelques phénomènes de didactique des mathématiques : effet Bruner et itinéraires de signification (cf. thèse), théorèmes-en-actes (G.Vergnaud)... Cette étude conduit à repenser l'étude des conceptions d'élèves à l'intérieur d'une théorie générale des rapports au savoir (Y.Chevallard).

En précisant les différents sens du terme « qualitatif », on s'attachera à dégager les principes généraux de cette analyse des conceptions d'élèves.

Le premier texte, sauf les tableaux récapitulatifs, reprend mon séminaire fait à Rennes, le 25.05. Il présente une recherche en didactique des mathématiques qui est centrée sur l'étude des conceptions d'élèves.

Suit une annexe, non exposée durant le séminaire, et intitulée Sur l'influence du facteur quantitatif sur les tests de statistique. Ce texte pose un problème de méthodologie en analyse des données.

Ces deux textes devaient faire l'objet de deux séminaires séparés. Ils sont ici présentés ensemble mais ils peuvent être lus de manière indépendante.

Je vais essayer de vous présenter les raisons scientifiques (c'est-à-dire objectives, communes à tous) qui font que, dans ma pratique de didacticien, j'ai très peu besoin des instruments de la statistique.

Dans un premier temps, j'exposerai la problématique d'une recherche de didactique en cours, afin de pouvoir comparer en fin d'exposé, la méthodologie d'analyse des données à laquelle je recours habituellement (1993.b) à la méthodologie classique d'analyse de données en didactique.

Cette différence de méthodologies peut être désignée par l'opposition des termes "qualitatif" / "quantitatif" selon des sens multiples dont certains sont précisés dans le tableau récapitulatif de la partie D.

En annexe, le lecteur trouvera une étude mathématique des propriétés des instruments statistiques classiques, du point de vue de cette problématique "essentiellement qualitative". Elle fournit une réponse à la question posée précédemment.

Une autre réponse à cette question introductive est fournie par R.Gras au tout début de son article de 1992 :

"Cette stratégie ambitieuse, mais rigoureuse, ne peut pas s'enclencher dès les premières approches des phénomènes à observer et d'où surgissent les questions".

R.Gras ((1992)), p.61.

Pour diverses raisons, j'ai décidé de réaliser cette année un plan d'expérience au sens classique qui est donné à ce mot en

psychologie expérimentale.

Ce travail a bénéficié, comme pour les années précédentes, de la collaboration de Marylise Bouxin et je l'en remercie vivement. Ma collègue a réalisé l'essentiel des passations dans les cinq classes de sixième concernées.

Le contenu des exercices reprend les idées exprimées dans mon séminaire fait à Grenoble, en 1988 : la symétrie est désignée par l'image d'un segment, on étudie l'effet de la variable de non connexité entre les figures ainsi que les effets de bord.

Ce plan d'expérience ne reprend pas les propositions nouvelles d'ingénierie qui sont exprimées dans la thèse de manière à garder une certaine distance avec la démarche de théorisation. Par contre, l'interprétation des résultats d'observations tient compte de ces problématiques nouvelles (1993.b).

Le plan de cet exposé est le suivant :

J'exposerai tout d'abord une problématique relative à l'étude des conceptions (partie A), je présenterai ensuite rapidement les Livrets d'exercices ainsi que les objets de recherche qui leur sont associés (partie B, tableaux 1 à 3), puis deux résultats de cette recherche (partie C) de façon à réserver suffisamment de temps à l'exposé des questions de méthodologie (partie D) et à la discussion.

PLAN DE L'EXPOSE

A. DE L'ETUDE DES CONCEPTIONS D'ELEVES A L'IDEE D'UN PLAN D'EXPERIENCE.

A.1. - Un état des lieux sur la recherche en didactique sur les conceptions : l'exposé de T.Assude (1994) au séminaire national.

A.2. - Un point de vue médiologique sur l'étude des conceptions (R.Debray, 1994).

A.3. - L'organisation du plan d'expérience.

B. DESCRIPTION DES LIVRETS D'EXERCICES ET OBJETS D'ETUDE.

C. QUELQUES RESULTATS DE CETTE RECHERCHE DE DIDACTIQUE.

D. METHODOLOGIE DE CETTE ETUDE ET DIFFERENCE AVEC LA METHODOLOGIE STATISTIQUE CLASSIQUE.

- Le codage des productions d'élèves.
- La recherche des régularités dans le corpus.
- Les moyens de preuve.

A. De l'étude des conceptions d'élèves à l'idée d'un plan d'expérience.

A.1. Un état des lieux sur la recherche en didactique des mathématiques, sur les conceptions d'élèves.

L'analyse des conceptions est un secteur bien connu de la recherche, sa particularité est d'appartenir en commun à la psychologie cognitive et à la didactique.

Ce domaine peut paraître à beaucoup comme parmi les mieux assurés du champ de la didactique des mathématiques. Pour cette raison même, l'exposé de Teresa Assude fait au Séminaire National de Didactique des Mathématiques à Paris, le 16 Janvier 1994, est-il apparu à beaucoup comme un véritable coup de foudre dans un ciel sans nuage. Les réactions de l'amphi ont d'ailleurs montré que certaines affirmations prononcées durant l'exposé ne passaient pas facilement auprès d'un public de psychologues, pourtant ouvert à la didactique des mathématiques.

Je cite de mémoire certaines de ces affirmations :

"Le modèle des conceptions est uniquement descriptif",
il est l'élément d'une "stratégie inter-institutionnelle" permettant la "transaction [avec les psychologues] dans la négociation de l'émergence d'un nouveau domaine de savoir, la didactique des mathématiques".

Teresa Assude (1994).

En attendant de lire avec la plus grande attention le texte de ce séminaire très stimulant, je me suis efforcé de donner un sens personnel à ces fortes déclarations en cherchant à répondre à la

question suivante :

Comment les conceptions peuvent-elles aujourd'hui, être l'objet d'une transaction avec les psychologues, pour la démarcation d'un domaine de savoir, à savoir, la didactique des mathématiques ?

J'ai cherché à comprendre du point de vue instrumental qui m'est familier (1993.a), l'expression introduite par Y.Chevallard de rapport au savoir. Ce travail a permis de donner un sens positif aux affirmations précédentes, un sens qui, comme on le verra n'est plus polémique et se situe au coeur du paradigme instrumental (1993.a) ou médiologique (Régis Debray, 1994).

A.2. Un point de vue médiologique sur l'étude des conceptions.

De manière classique en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques (cf. bibliographie), la conception désigne une relation binaire établie entre un élève et un savoir, stable dans certaines conditions de situations. Ainsi, on dira que cet enfant possède ou non une certaine conception du cercle.

Chercher à expliquer, comme le fait Y.Chevallard, la constitution d'un système de connaissances chez un sujet (une personne) comme l'établissement d'un certain rapport aux savoirs est très différent. En effet :

Le terme de rapport indique que cette relation entre un sujet et un savoir n'est jamais "immédiate", que c'est la nature de ce rapport qui doit faire l'objet de nos réflexions, un rapport qui est conçu comme le point de jonction particulier d'un

sujet particulier et d'un savoir particulier.

Cette expression de "rapport au savoir" nous rappelle que c'est l'ensemble des médiations (contextuelles, cognitives, didactiques, sociales et institutionnelles, cf. 1993.b) qui doit nous guider dans la caractérisation de l'état de connaissances d'un sujet et dans la compréhension de sa constitution.

L'expression de "rapport au savoir" est donc naturellement ternaire alors que l'expression de conception peut entretenir une épistémologie simplement binaire (Sujet X Objet).

L'un des principes directeurs de notre plan d'expérience a été de chercher à différencier le modèle implicite d'action d'un élève de sa conception, en un sens que l'on va préciser.

Le modèle implicite d'action est élaboré par le chercheur à partir du relevé des régularités dans les comportements observés. Il révèle autant les spécificités cognitives de chaque élève que les spécificités objectives des classes de situations. Il a donc deux faces, l'une psychologique ou pédagogique, l'autre didactique au sens que lui a donné G.Brousseau. Nous dirons que le modèle implicite d'action est de nature psycho-didactique pour désigner cette ambivalence théorique.

Le concept de conception (!) appartient au contraire de plein droit à la psychologie cognitive et, si nous voulons lui conserver son sens en didactique, il nous faut montrer que ces régularités de comportements se manifestent même dans les conditions qui auraient pu les déstabiliser.

Ainsi, la conception est un invariant contextuel, alors que le modèle implicite d'action est un invariant de comportement dans

un contexte donné.

Psychologues et didacticiens doivent donc collaborer pour définir ensemble ce que sont les différentes conceptions (au sens précédent) d'un même savoir. Ce sera notre réponse à la question précédente.

Partie B.

DESCRIPTIF DES LIVRETS D'EXERCICES ET OBJETS DE RECHERCHE

PREMIERE PARTIE :

Objet de la recherche : Etudier les effets de surface

Contexte : Retournement d'une feuille calque.

CODE	NATURE DES FIGURES	PARTICULARITE	TYPES D'ERREURS OBSERVEES	OBJET DE LA RECHERCHE
I	CARRE + CARRES CONNEXES	CERTAINS CARRES SE SUPERPOSENT A LEUR IMAGE	EVITEMENT DE LA SUPERPOSITION DE DEUX FIGURES	QUANTIFIER CE TYPE D'ERREUR.
II et III	RECTANGLES + TRIANGLES RECTANGLES CONNEXES	LES COTES DES TRIANGLES SONT PARALLELES AUX BORDS DE LA FEUILLE	EFFET DE BORD = L'ELEVE CONSERVE CE PARALLELISME ET PERD AINSI LA FORME DES TRIANGLES. PERTE DE CERTAINS ALIGNEMENTS. AJOUT DE CERTAINS ALIGNEMENTS.	QUANTIFIER CES TYPES D'ERREURS. ESTIMER L'INFLUENCE POSITIVE DE LA CORRECTION AU CALQUE FAITE ENTRE LES DEUX EXERCICES.

DEUXIEME PARTIE :

Objet de la recherche : Etudier le modèle implicite pour l'action de tracé en géométrie

Contexte : Retournement d'une feuille calque.

Nature de la difficulté conceptuelle : certaines figures se superposent à leur image (codée : a).

Livret 1 : IV a, V a, VI a

Livret 2 : IV non a, V non a, VI a.

CODE	NATURE DES FIGURES	PARTICULARITE	TYPES D'ERREURS OBSERVEES	OBJET DE LA RECHERCHE
IV a (livret 1) IV non a (livret 2)	RECTANGLE + CARRE NON CONNEXE	LE CARRE EST DANS LE PROLONGEMENT NON TRACE DES COTES DU RECTANGLE	REFUS DE FAIRE DES CONSTRUCTIONS AUXILIAIRES. DIFFERENCES DE TRAITEMENT DANS LE TRACE DE L'IMAGE D'UN SEGMENT TRACE OU NON EVITEMENT DE LA SUPERPOSITION DES FIGURES (livret 1)	CONSTRUIRE LE MODELE IMPLICITE DE L'ACTION DE TRACE DE L'IMAGE D'UNE FIGURE PAR SYMETRIE
V a (livret 1) V non a (livret 2)	SEGMENTS + SEGMENTS NON CONNEXES	L'EXERCICE V EST SUPERPOSABLE A L'EXERCICE IV	IDEM	IDEM ESTIMER L'EFFET DE LA VARIABLE 'CHANGEMENT DE FIGURES'
VI a (livret 1 et 2)	SEGMENTS + SEGMENTS NON CONNEXES	LES SEGMENTS FORMENT DES RECTANGLES ILS SE SUPERPOSENT A LEURS IMAGES	EVITEMENT DE LA SUPERPOSITION (livrets 1 et 2)	ESTIMER L'INFLUENCE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES DEUX LIVRETS

TROISIEME PARTIE :

Objet de la recherche : Confirmer l'importance de l'effet Bruner

Contexte : Déplacement d'une feuille calque.

Nature de la difficulté conceptuelle : La figure à reproduire n'est pas triangulée (codée b).

Livret 1 : I'b, II'b, III'b, IV'b

Livret 2 : I' non b, II' non b, III'b, IV'b.

CODE	NATURE DES FIGURES	PARTICULARITE	TYPES D'ERREURS OBSERVEES	OBJET DE LA RECHERCHE
I'b et II'b (livret 1) I' non b et II' non b (livret 2)	SEGMENT + SEGMENT NON CONNEXE (livret 1) QUADRILATERE + UNE DIAGONALE	AUCUNE	NON CONSERVATION DES RELATIONS DE POSITION ENTRE LES DEUX SEGMENTS (livret 1)	ESTIMER LES COMPETENCES DES ELEVES A LIRE UNE FIGURE -MESSAGE BIEN ECRITE (livret 2)
III' b (livrets 1 et 2)	SEGMENT + SEGMENT NON CONNEXE	AUCUNE	IDEM	ESTIMER L'INFLUENCE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES DEUX LIVRETS
IV' b (livrets 1 et 2)	QUADRILATERE SANS DIAGONALE	AUCUNE	NON CONSERVATION DE LA FORME DU QUADRILATERE	ESTIMER LA PERMANENCE DE CETTE INFLUENCE

B. L'organisation du plan d'expérience.

Nous avons cherché avec ce plan d'expérience à préciser le domaine de stabilité de certains éléments du modèle implicite d'action des élèves et nous avons montré que :

- 1) les modèles implicites d'action des élèves sont très sensibles aux variations contextuelles,
- 2) cette variabilité ne remet pas en cause l'idée qu'il existe certains invariants contextuels, ou conceptions.

Les variations contextuelles sont de natures très diverses, elles illustrent les deux sens du terme de didactique : elles sont **spécifiques de certaines connaissances mathématiques** (le retournement puis le déplacement d'une feuille calque) ; elles sont **chargées ou non d'une intention de l'enseignant** (car l'enseignant manipule la signification des exercices pour les élèves par le choix des segments tracés, 1988).

Pour mettre en évidence l'influence des interventions de l'enseignant, ou médiation didactique au savoir et la comparer à l'influence de la seule interaction avec les problèmes, ou médiation a-didactique au savoir, deux Livrets d'exercices, en partie distincts, ont été conçus. Dans les Livrets 1, l'élève est toujours en position d'auto-didacte, dans les Livrets 2, il y a une intervention tutorielle partielle.

De manière plus précise, les premiers exercices de ces deux Livrets diffèrent par le degré de prise en charge, par l'enseignant, d'une partie du domaine de responsabilité qui

aurait pu être dévolué à l'élève ; les derniers exercices sont identiques dans les deux présentations afin de permettre les comparaisons.

C. Quelques résultats de cette recherche.

Le premier résultat qui est présenté concerne l'influence de la différence entre les Livrets 1 et 2 sur la réussite aux exercices communs.

Voici quelques résultats quantitatifs :

42 élèves --> Livret 1, 38 % d'évitement de la superposition de la figure à son image à l'exercice IVa.

41 élèves --> Livret 2, 14,6 % d'évitement de la superposition de la figure à son image à l'exercice IVa.

42 élèves --> Livret 1, 47,8 % d'échec à la reproduction de deux segments non connexes, après un déplacement et 33 % d'échec à la reproduction d'un quadrilatère sans diagonale tracée, après déplacement.

44 élèves --> Livret 2, 15,9 % d'échec à la reproduction de deux segments non connexes, après un déplacement et 11,4 % d'échec à la reproduction d'un quadrilatère sans diagonale tracée, après déplacement.

Ces différences se passent sans doute de tout commentaire statistique.

Du point de vue de la didactique, il s'agit d'une confirmation

expérimentale de l'existence de la zone proximale de développement de L.S.Vygotsky.

La médiation didactique (le fait que l'enseignant permette à l'élève d'éviter pendant un certain temps certaines difficultés conceptuelles) semble plus efficace que la médiation a-didactique au savoir (par le seul effet des contextes mathématiques).

Nous appelons Effet Bruner le résultat d'une telle médiation didactique au savoir.

L'autre question de recherche concerne les deux parties I et II des Livrets d'exercices. Il s'est agi de caractériser l'usage des instruments de tracé (compas, règle, équerre) chez ces élèves et d'observer, par rapport à une analyse a priori, si nous trouvions une certaine corrélation entre cet usage et la localisation des erreurs.

L'étude nous a conduit à remarquer l'existence de trois populations d'élèves :

La population notée P1 a un usage exclusif de l'un ou l'autre des instruments de tracé, 30 % des élèves n'utilisent que le compas et la règle non graduée (même pour reproduire un carré dont on donne un côté) et 20 % des élèves n'utilisent que la règle et l'équerre (même pour reproduire un angle quelconque, ils le font alors "à vue").

L'analyse des productions pour cette population P1 montre que la réussite est bien supérieure dans le premier cas que dans le deuxième.

Une deuxième population, notée P2 (15 % de la population totale)

s'adapte parfaitement aux particularités instrumentales des exercices, ils utilisent les instruments alternativement, à bon escient et leur pourcentage de réussite est très élevé.

Enfin, les autres élèves évitent ces deux régularités (une constance de l'instrument ou une adaptation aux conditions des exercices) mais sans jamais s'éloigner de plus d'un exercice du comportement instrumental de la population P2.

Le "choix" de l'instrument de tracé ne se fait donc jamais au hasard, certaines régularités ont pu être mises en évidence et certaines corrélations avec les procédures dégagées.

Par contre, le sens de chacune de ces manières de résoudre ces problèmes (ou itinéraires de signification) peut être divers et il semble que seule une connaissance personnelle de chacun des élèves peut permettre d'interpréter, par exemple, une utilisation exclusive de la règle graduée : s'agit-il par exemple d'un effet de l'habitude ou de l'envie d'en changer, d'explorer hors des sentiers battus ?

Le postulat médiologique d'une relation entre l'instrument de tracé et le type de procédure observée sort renforcé de cette étude, c'est seulement le sens de ce "choix" de l'instrument qui ne peut être statué sur ces seules informations objectives.

Ce résultat nous conduit naturellement à se poser la question de l'articulation entre les résultats d'une analyse statistique et leur interprétation. C'est en partie l'objet de la partie D de cet exposé.

Partie D.

LES DIFFERENTS SENS DES TERMES QUALITATIF ET QUANTITATIF EN RELATION AVEC LA METHODOLOGIE STATISTIQUE DE CETTE RECHERCHE

Cette méthodologie est quantitative dans les deux sens suivants :

1. Cette méthodologie ne recourt pas à la mémoire professionnelle de l'enseignant, relative à chacun de ses élèves et à chacune de ses classes.
Elle réduit tous les comportements observés à une suite de symboles dont on peut calculer les fréquences de réalisation et considérer (avec un tableur, ou « à la main ») les croisements entre les partitions d'élèves correspondantes.

2. Le moyen de preuve essentiel de cette méthodologie est lié à la reproductibilité des phénomènes mis en évidence. Celle-ci s'observe empiriquement par la constance (approximative) de réalisations de certains comportements, jugés significatifs, dans chacune des classes concernées.
Le chercheur fait une hypothèse d'homogénéité entre les différentes classes relativement aux phénomènes de didactique ; les différences qualitatives entre les classes ne sont pas retenues a priori dans l'analyse de didactique (cf.1), mais elles le pourraient.

Cette méthodologie est qualitative dans les trois sens suivants :

3. Elle conserve l'hétérogénéité du corpus expérimental et ne cherche pas à le représenter dans un espace vectoriel homogène.
Les symboles qui permettent de coder l'ensemble des comportements observés, ne sont pas généralement numériques. L'idée de faire une « moyenne » entre les modalités obtenues par un même élève aux différentes variables numériques, n'aurait de toutes façons aucun sens.

4. Les symboles du code renvoient à une théorie de didactique (typologie des procédures, analyses a priori) et non pas à une description objective (naïve) du corpus. Par conséquent, le didacticien manipule dans son analyse statistique, des significations et non pas des faits empiriques.

La statistique est l'instrument qui doit aider le didacticien à se représenter son corpus expérimental et à trouver certaines régularités dans la disposition de ses symboles. C'est sous l'entière responsabilité de ce dernier que l'analyse de données doit être faite : définition des seuils de différence, choix des variables pour répondre à une question théorique, etc...

Au plus tard au moment de la rédaction définitive de la recherche, le traitement statistique des données et l'interprétation théorique des résultats de ce traitement doivent être indistincts : tous les résultats de l'analyse statistique sont des réponses à des questions posées a priori dans le domaine de la recherche en didactique ; tous les moyens statistiques de répondre à ces questions ont été exploités.

Le fait de chercher à l'intérieur de la théorie de didactique à interpréter un résultat inattendu issu de l'analyse statistique, n'est qu'un état transitoire de la recherche qui doit être dépassé, dès que possible, par le chercheur.

5. L'objectif de cette analyse des données est de construire un classement (par similarité) ou un rangement (par hiérarchie implicative) des types de comportements (mais aussi des élèves). Ce classement ou ce rangement ne doit pas dépendre des effectifs des différentes partitions d'élèves (cf.a), mais seulement de leurs proportions relatives (cf.b).

a. Du point de vue de cette analyse qualitative, tous les individus qui ont le même type de comportement peuvent être identifiés à une seule et même personne, porteuse de la même information théorique. Les critères de similarité ou d'implication ne doivent pas, de ce fait, être sensibles aux fréquences marginales et conjointes (cf. annexe).

L'importance numérique n'a pas de rapport avec l'importance théorique !

b. Les proportions relatives (ou fréquences conditionnelles) portent au contraire une signification interne à la théorie de didactique (c'est la mesure statistique d'une inclusion de classes), elles doivent donc intervenir dans la définition des critères statistiques (cf. annexe).

c. Un contre-exemple notable porte sur les populations qui sont déjà définies par un certain type de comportement ; dans ce cas en effet, les fréquences marginales et les fréquences conjointes sont des fréquences conditionnelles relativement à ce comportement, elles ont donc un sens relativement au classement ou au rangement des types de comportement.

L'affirmation précédente ne concerne que le cas de populations quelconques de référence, lorsqu'elles sont par exemple représentatives d'un certain niveau de classe (pour un complément, cf. l'introduction à l'annexe sur la statistique)..

Bibliographie

- Assude T., 1994, Des conceptions au rapport institutionnel. relecture d'une expérimentation, Séminaire national de Didactique des Mathématiques, publication en cours, 16.01.94.
- Bautier Th., 1988, Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale plane, in Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, L.S.D.-I.M.A.G., Institut Fourier, p.197 à 238.
- Bautier Th., 1993.a, Analyse des fonctions des instruments graphiques dans les pratiques de conception architecturale : contribution à une didactique des graphismes d'espaces, in Espaces graphiques et graphismes d'espaces, Bessot A. et Vérillon P., éd. La pensée sauvage, Grenoble, p.183 à 231.
- Bautier Th., 1993.b, Médiations dans l'enseignement des transformations géométriques, Thèse, Université de Bordeaux I, L.A.D.I.S.T. et I.U.F.M. de Bretagne, site de Vannes.
- Chevallard Y., 1988, Esquisse d'une théorie formelle du didactique, in Actes du premier colloque franco-allemand, Laborde C., éd. La pensée sauvage, Grenoble, p.97 à 106.
- Debray R., 1994, Manifestes médiologiques, Gallimard.
- Douady R., Perrin M.-J., 1988, Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes, in Actes du premier colloque franco-allemand, Laborde C., éd. La pensée sauvage, Grenoble, p.161 à 172.
- El Bouazzaoui H., 1988, Conceptions des élève et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction, Thèse, Université Laval, Québec.

- Gaultier M., 1984, Analyse, probabilités et méthode statistique, tome 2, Vuibert université.
- Giordan A., 1989, Les conceptions, au coeur de la didactique, in Méthodologie et didactique de l'éducation physique et sportive, coll., éd. AFRAPS.
- Gras R., 1992, L'analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique, in Recherches en didactique des mathématiques, vol.12-1, éd. La pensée sauvage, Grenoble, p. 59 à 72.
- Grenier D., 1985, Conceptions des élèves de collèges à propos de la symétrie orthogonale, in Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, L.S.D.2., Institut Fourier, Grenoble.
- Rouanet H., Le Roux B, Bert M.-C., 1987, Statistique en sciences humaines : procédures naturelles, Dunod.
- Rouanet H., Le Roux B, Bert M.-C., 1990, Statistique en sciences humaines : analyse inductive des données, Dunod.

Annexe

Sur l'influence du facteur quantitatif sur les tests de statistique

0. 1. Objet de cette annexe

La statistique moderne cherche essentiellement à répondre aux deux questions suivantes :

Soient A et B deux populations et X et Y deux types de comportements, ou deux questions. Dans un tableau de contingence, on note le nombre de réalisations des deux comportements pour les deux populations observées.

Question 1: Les deux populations A et B peuvent-elles être considérées comme indistinctes du point de vue de la réalisation des comportements A et B ? Les types de comportements X et Y sont-ils observés dans les deux populations A et B, de la même manière ?

Question 2: La réalisation du comportement X entraîne-t-elle le plus souvent la réalisation du comportement Y dans les deux populations ? dans l'une des deux populations ? dans aucune des deux ?

La première question porte sur la similude des deux populations du point de vue des deux types de comportement relevés. La deuxième question porte sur l'existence d'une inférence logique entre les deux types de comportements dans les deux populations. Nous allons étudier dans cette annexe comment les fonctions statistiques classiques permettent de répondre aux questions précédentes. Plus particulièrement, nous allons étudier l'influence des valeurs prises par les fréquences marginales et conjointes sur cette réponse.

0. 2. Problématique

L'objet de cette étude est de discuter de l'importance relative des fréquences marginales ($f_{i.} = n_{i.} / n$), conjointes ($f_{.j} = n_{.j} / n$) et conditionnelles ($f_{ij}^l = n_{ij} / n_j$) pour classer ou ranger, par les moyens de la statistique, un ensemble d'observables. La problématique de cette étude peut être formulée sous la forme de ces quatre propositions.

0.2.1. Le nombre total de personnes consultées (n) est une variable importante qui doit influencer sur le résultat donné par le test statistique : en dessous d'un certain seuil en effet, aucune donnée n'est significative, l'échantillon peut ne pas être du tout représentatif ; au dessus d'un autre seuil, on peut considérer l'échantillon comme représentatif de la population totale et alors, c'est le résultat que nous avançons, **le test de statistique ne doit dépendre que des fréquences conditionnelles et non pas des fréquences absolues ou conjointes** ; entre ces deux seuils, les tests doivent marquer leur peu de fiabilité et être beaucoup plus exigeants que dans le cas précédent, pour affirmer l'existence d'un résultat statistique.

Nous nous plaçons dans ce qui suit dans le cas où les effectifs sont tous significatifs, par exemple, l'absence d'observables dans un type de modalité n'est pas imputable, en droit, à l'échantillon.

0.1.2. Les tests de statistique, au delà du seuil de significativité des observations recueillies, ne nous semblent pas devoir être très sensibles aux variations des fréquences absolues, ou marginales mais aussi des fréquences conjointes (notons que ces deux types de fréquences forment un rapport entre l'effectif d'une sous-population qui est caractérisée par le fait de posséder une même propriété et l'effectif de la population de référence).

La raison de cette affirmation est la suivante :

Dans le cas où la population de référence est quelconque (c'est-à-dire non caractérisée par le fait de posséder une certaine propriété en relation avec les phénomènes étudiés dans la théorie) tous les individus qui ont exactement les mêmes comportements, sont indiscernables du point de vue de cette théorie. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de l'effectif de ces sous-populations, sauf à considérer leurs croisements.

Le fait que l'une de ces sous-populations représente 75% ou seulement 5% de la population totale ne doit pas être pris en compte pour la mesure de l'importance théorique (et non pas numérique !) de cette sous-population. Le test de statistique ne remplira parfaitement son rôle de détecteur des relations de ressemblances/disssemblances ou des relations implicatives entre les sous-ensembles, que si il est indifférent à ces variations d'effectifs.

0.1.3. Au contraire, les tests de statistique doivent être très sensibles aux variations des **fréquences conditionnelles** (ces fréquences forment un rapport entre deux effectifs de sous-populations caractérisées par le fait de posséder certaines propriétés en commun).

La raison de cette affirmation est la suivante :

Ces rapports ont un sens dans la théorie (ici de didactique), celui de mesurer le degré d'inclusion des deux ensembles emboîtés (celui des individus ayant eu les comportements i et j , parmi ceux ayant eu le comportement j). Il est évidemment très différent de savoir que parmi les sujets ayant répondu OUI à la première question, 10% ou 60% ont répondu NON à la deuxième question...

La signification d'un comportement observé se trouve principalement dans l'éloignement des fréquences conditionnelles aux valeurs de ces fréquences si les variables I et J étaient indépendantes ($1/2$ si I ou J prennent 2 modalités, i et i' ou j et j' ...). Ce qui est exactement l'idée de départ de la fonction Φ^2 .

0.1.4. Dans le cas où la population totale de référence est caractérisée par le fait de posséder une même propriété relative à la théorie de didactique, les fréquences marginales et conjointes ont un sens, relativement à cette théorie. Elles doivent donc influencer le résultat aux tests de statistique : celui ci doit pouvoir être négatif dans certains cas et positif dans d'autres, pour des fréquences conditionnelles identiques par ailleurs.

L'argumentation qui a été développée dans les points précédents ne concerne que le cas où la population de référence est un échantillon représentatif de la population la plus quelconque (ce qui est le cas de notre population d'élèves, uniquement caractérisée par le fait d'être élèves en classe de sixième).

0. 3. Remarques préalables

La donnée des $n \times m$ fréquences conjointes ($i = 1$ à n , $j = 1$ à m) f_{ij} suffit pour connaître les fréquences marginales f_i et f_j mais aussi les fréquences conditionnelles f_i^j (ou $f_{i/j}$) et f_j^i (ou $f_{j/i}$). C'est le problème réciproque qui nous intéresse ici.

Supposons que nous connaissions toutes les fréquences conditionnelles $f_{I/J}$ et $f_{J/I}$, c'est-à-dire toutes les fréquences f_i^j et f_j^i pour i dans I et j dans J , alors on connaît toutes les fréquences, marginales et conjointes. Il faut se demander quel est un sous-ensemble de l'ensemble des fréquences conditionnelles dont la connaissance implique celle de toutes les valeurs prises par les fréquences (marginales ou conjointes). Nous cherchons un ensemble *minimax* au sens où il possède la propriété d'engendrer par calculs toutes les autres fréquences, mais perd cette propriété dès qu'on lui retire l'un quelconque de ses éléments.

Voici deux exemples de tels sous-ensembles :

0.3.1. Supposons que nous connaissions toutes les fréquences conditionnelles $f_{I/J}$. Elles sont au nombre de $n \times m$ mais elles ne permettent pas de reconstituer les fréquences conjointes et marginales. Ce système a encore $m - 1$ degrés de liberté au sens où il faut choisir librement $m - 1$ valeurs positives (dont la somme est tout de même inférieure ou égale à 1) à donner aux fréquences f_j , pour pouvoir déterminer de manière unique toutes les autres fréquences. L'ensemble à $n.m - 1$ éléments constitué des $(f_{I/J})$ pour i différent de 1, réuni à l'ensemble des (f_j) pour j différent de 1, est un ensemble *minimax*.

D'après notre problématique, le choix de ces variables libres ne devrait pas influencer la réponse donnée par les tests de statistique à la question d'un classement des données. Nous allons voir dans la première étude si tel est le cas de la fonction du χ^2 .

0.3.2. Supposons que nous connaissions un couple de fréquences conditionnelles, soit f_i^j et f_j^i pour un i dans I et un j dans J , on en déduit immédiatement la connaissance du rapport f_i / f_j . Le plus petit nombre de tels couples qui permet de reconstruire l'ensemble des $n + m$ valeurs prises par les fréquences marginales est $n + m - 1$, avec la condition que tous les i de I et tous les j de J soient présents au moins une fois dans cette liste :

Si les couples de fréquences conditionnelles connues sont par exemple f_{i^j} et f_{j^i} pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1$ d'une part, $i = 1, j = 1, 2, \dots, m$ d'autre part, les conditions $\Sigma = 1$ permettent de déterminer de manière unique tous les f_{i^1} et les f_{1^j} . Pour une condition plus faible, on trouve une indétermination de l'ensemble de ces valeurs, à un ou plusieurs degrés de liberté.

Sous la condition précédente, certaines fréquences conjointes restent indéterminées, certaines le restent au delà de cette condition jusqu'à la possibilité de connaître les $n \times m$ couples de fréquences conditionnelles. Un ensemble *minimax* est l'ensemble à $2.(1 + m.(n-1))$ éléments constitué des paires f_{i^j}, f_{j^i} pour $i = 1$ et $j = 1$ et pour i différent de 1, j quelconque dans J : les conditions $\Sigma = 1$ permettent en effet de reconstituer tous les f_{i^j} manquants ; puisque la première condition est vérifiée, on connaît aussi les f_{1^j} et donc toutes les fréquences conjointes.

0. 4. Deux études particulières

Nous n'étudions pas dans cette annexe le cas général des deux questions précédentes, mais seulement ces deux cas particuliers.

Etude 1 :

Soient deux populations A et B ayant répondu à une même question X. Peut-on dire à partir du tableau de contingence que les deux populations ont réagi à peu près de la même manière au questionnaire ?

Etude 2 :

Soient deux questions X et Y, posées à une même population A. Peut-on dire à partir du tableau de contingence que la réussite à X implique le plus souvent la réussite à Y ?

Etude 1

1.1. De manière classique (Rouanet et coll., 1987, p.151-167), on représente un tableau de contingence 2 x 2 et le tableau des fréquences conditionnelles et marginales par :

Tableau de contingence	Réponse juste à la question X (i)	Réponse fausse à la question X (i')
Population A (j)	$n_{ij} = p.a.N$	$n_{ij'} = (1 - p).a.N$
Population B (j')	$n_{i'j} = q.(1 - a).N$	$n_{i'j'} = (1 - q).(1 - a).N$

Fréquences conditionnelles $f_{I/J}$	Réponse juste à la question X (i)	Réponse fausse à la question X (i')	Fréquences marginales f_J
Population A (j)	p	1 - p	$f_j = a$
Population B (j')	q	1 - q	$f_{j'} = 1 - a$
Fréquences marginales f_I	$f_i = x = p.a + q.(1 - a)$	$f_{i'} = 1 - x$	

La distance entre les deux profils de réponse est donnée par la formule du Φ^2 , soit :

$$\begin{aligned}\Phi^2(A,B) &= (p - q)^2 / x + (p - q)^2 / 1 - x \\ &= (p - q)^2 / x.(1 - x) \\ &= 4.(p - q)^2 / 1 - (2x - 1)^2.\end{aligned}$$

1.2. Pour étudier les variations de la fonction Φ^2 en fonction de a (cf. 0.1.2. et 0.1.4), il faut distinguer deux cas, selon que x peut prendre ou non la valeur $\frac{1}{2}$.

1.2.1. Si $q < \frac{1}{2} < p$:

Il existe alors une fréquence marginale a_0 , comprise entre 0 et 1, telle que $x = \frac{1}{2}$.

Entre 0 et a_0 , la fonction Φ^2 décroît. En $a = 0$, $\Phi^2(A,B) = (p - q)^2 / q.(1 - q)$, en $a = a_0$, $\Phi^2(A,B) = 4.(p - q)^2$.

Entre a_0 et 1, la fonction Φ^2 croît. En $a = 1$, $\Phi^2(A,B) = (p - q)^2 / p.(1 - p)$.

1.2.2. Si $q < p < \frac{1}{2}$ ou si $\frac{1}{2} < q < p$:

La fonction Φ^2 est monotone entre 0 et 1.

1.3. Il devient possible de répondre à la question posée dans cette première étude :

La mesure de la ressemblance entre les profils des deux populations, ne dépend que de $|p - q|$ et de $|a - a_0|$ (la courbe de la fonction Φ^2 est une hyperbole dont l'axe de symétrie et les asymptotes sont verticales). La sensibilité de cette mesure peut donc être estimée par les taux de variations Δ_1 (entre 0 et a_0) et Δ_2 (entre a_0 et 1) lorsque $q < \frac{1}{2} < p$ et par le taux de variation Δ (entre 0 et 1) lorsque $q < p < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < q < p$.

On a $2.x - 1 = 2.(p - q).(a - a_0)$ avec $a_0 = \frac{1}{2} - q / p - q$.

Soit $D = p - q$. On trouve que $\Delta_1 = - 16 D^4 . a_0 / 1 - 4 D^2 . a_0^2$ et que $\Delta_2 = - 16 D^4 . (1 - a_0) / 1 - 4 D^2 . (1 - a_0)^2$. D'autre part, on a $\Delta = a_0 . \Delta_1 + (1 - a_0) . \Delta_2$.

Le tableau suivant donne les valeurs de ces différentes variables pour p et q = 0.10, 0.20, etc...

a_0 puis Δ_1 et Δ_2 ou Δ seul.	p = 0.10	p = 0.20	p = 0.30	p = 0.40	p = 0.50	p = 0.60	p = 0.70	p = 0.80	p = 0.90
q = 0.10	0.00	- 0.05	- 0.25	- 0.63	- 1.14	- 1.22	- 3.84	- 6.10	- 9.10
q = 0.20	0.05	0.00	- 0.01	- 0.08	- 0.30	- 0.48	- 0.94	- 1.62	- 2.57
q = 0.30	- 0.25	0.01	0.00	- 0.01	- 0.03	0.67	0.50	0.40	0.33
q = 0.40	- 0.63	0.08	0.01	0.00	0.00	0.50	0.33	0.25	0.20
q = 0.50	- 1.14	- 0.20	0.03	0.00	0.00	0.00	0.03	0.20	1.14
q = 0.60	- 1.22	- 0.30	- 0.05	- 0.01	0.00	0.00	0.01	0.08	0.63
q = 0.70	- 3.84	- 0.48	- 0.24	- 0.10	- 0.03	- 0.01	0.00	0.01	0.25
q = 0.80	- 6.10	- 1.62	- 0.94	- 0.48	- 0.20	- 0.08	- 0.01	0.00	0.05
q = 0.90	- 9.10	- 2.57	- 1.84	- 1.14	- 0.63	- 0.25	- 0.05	0.00	0.00

Un commentaire du tableau

- si $D = 10 \%$, la variation en fonction de a reste très faible, la fonction Φ^2 est insensible aux variations d'effectifs des populations A et B.
- si $D = 20 \%$, on observe que pour $p = 30 \%$ et $q = 10 \%$, la variation de Φ^2 est importante, égale au quart de la variation de a .
- au delà, cette variation augmente régulièrement, pour devenir importante dans tous les cas à partir de $D = 40 \%$ (cf. les cases de ce tableau en gras).

En conclusion, cet instrument statistique semble assez sensible à l'aspect « quantitatif » du corpus expérimental, au détriment donc de son aspect « qualitatif ». Il resterait à valider ce résultat par une approche plus expérimentale.

Etude 2

2.1. De manière classique (Gras et coll., 1994, p.348 à 362), la mesure de la vraisemblance d'une implication entre la réussite à la question X et la réussite à la question Y est donnée par la fonction Q :

$$q (X \Rightarrow Y) = (n_{x \text{ et } y} - n_x \cdot n_{\text{non } y} / n) / (n_x \cdot n_{\text{non } y} / n)^{1/2}$$

En faisant apparaître les fréquences marginales $f_x = n_x / n$ et $f_{\text{non } y} = n_{\text{non } y} / n$ ainsi que la fréquence conjointe $f_z = n_{x \text{ et } y} / n$, on trouve une nouvelle expression de cette fonction.

$$q (X \Rightarrow Y) = n^{1/2} \cdot (f_z - f_x \cdot f_{\text{non } y}) / (f_x \cdot f_{\text{non } y})^{1/2}$$

La mesure de la vraisemblance d'une implication augmente avec l'effectif de la population, mais par homogénéité, cette augmentation n'influe pas sur l'arbre des dépendances implicatives. Cette mesure dépend d'autre part des trois fréquences marginales et conjointes f_x , $f_{\text{non } y}$ et f_z .

2.2. Nous étudions l'influence de la variation de ces trois fréquences sur la variation de la fonction Q alors que certaines fréquences conditionnelles restent constantes. Nous supposons constantes les deux fréquences conditionnelles $u = f_{x / \text{non } y}$ et $v = f_{\text{non } y / x}$.

On pose : $u = f_z / f_x$ et $v = f_z / f_{\text{non } y}$.

Les fréquences f_x , $f_{\text{non } y}$ et f_z sont donc proportionnelles : si x_0 , y_0 et z_0 sont des valeurs prises par ces trois grandeurs variables, elles prennent en général les valeurs $k \cdot x_0$, $k \cdot y_0$ et $k \cdot z_0$, k étant un nombre réel. Les tableaux des fréquences sont alors entièrement connus :

Fréquences conjointes $f_{X \text{ et } Y}$	Réponse juste à la question X	Réponse fausse à la question X	Fréquences marginales f_Y
Réponse juste à la question Y	$k \cdot (x_0 - z_0)$	$1 - k \cdot (x_0 + y_0 - z_0)$	$1 - k \cdot y_0$
Réponse fausse à la question Y	$k \cdot z_0$	$k \cdot (y_0 - z_0)$	$k \cdot y_0$
Fréquences marginales f_X	$k \cdot x_0$	$1 - k \cdot x_0$	

Fréquences conditionnelles $f_{X/Y}$ puis $f_{Y/X}$	Réponse juste à la question X	Réponse fausse à la question X	Fréquences marginales f_Y
Réponse juste à la question Y	$k \cdot (x_0 - z_0) / 1 - k \cdot y_0$ $(x_0 - z_0) / x_0$	$1 - k \cdot (x_0 + y_0 - z_0) / 1 - k \cdot y_0$ $1 - k \cdot (x_0 + y_0 - z_0) / 1 - k \cdot x_0$	$1 - k \cdot y_0$
Réponse fausse à la question Y	z_0 / y_0 z_0 / x_0	$(y_0 - z_0) / y_0$ $k \cdot (y_0 - z_0) / 1 - k \cdot x_0$	$k \cdot y_0$
Fréquences marginales f_X	$k \cdot x_0$	$1 - k \cdot x_0$	

Dans ces conditions, la fonction Q s'écrit :

$$q(X \Rightarrow Y) = n^{1/2} \cdot (z_0 - k \cdot x_0 \cdot y_0) / (x_0 \cdot y_0)^{1/2}$$

2.3. Il devient possible de répondre à la question posée dans cette deuxième étude :

La variation de la fonction Q en fonction de la variation des fréquences marginales et conjointes s'exprime facilement dans le cas où les fréquences marginales f_x , $f_{\text{non } y}$ et la fréquence conjointe $f_z = f_{x \text{ et non } y}$, sont proportionnelles (alors, les fréquences conditionnelles $f_{x / \text{non } y}$ et $f_{\text{non } y / x}$ restent constantes, cf. 0.1.1. et 0.1.3.) :

La fonction $Q / n^{1/2}$ décroît d'une manière affine ; son taux de variation par rapport au facteur constant k, est égal au nombre $-(f_{x_0} \cdot f_{\text{non } y_0})^{1/2}$ qui est la moyenne géométrique des deux valeurs initiales des fréquences marginales ; la variation absolue de la fonction Q est donc exactement de l'ordre de grandeur des variations absolues des fréquences marginales ($\Delta k \cdot f_{x_0}$ et $\Delta k \cdot f_{\text{non } y_0}$).

Dans ces conditions de triple proportionnalité entre f_x , $f_{\text{non } y}$ et $f_{x \text{ et non } y}$, la variation de la fonction Q peut donc être très importante.

3. Conclusion de cette annexe

Nous avons montré que

- 1) les fréquences conditionnelles représentent au mieux l'information significative portée par un corpus statistique
- 2) les tests principaux de similarité et de hiérarchie implicative en analyse de données, ne sont pas sensibles qu'aux variations des fréquences conditionnelles, mais aussi aux variations des fréquences marginales et conjointes

Compte-tenu de ce résultat, nous proposons de n'utiliser ces instruments que dans le cas où la population de référence est également caractérisée par la possession d'une propriété interne à la théorie en question. En effet, les fréquences marginales et conjointes deviennent alors des fréquences conditionnelles, relativement à des propriétés plus générales de la théorie.

Cette problématique se situe aux antipodes de la pratique des sondages d'opinion dans lesquels la relation entre le sondage et les catégories socio-professionnelles qui permettent à l'organisme de s'assurer un échantillon représentatif de la population française, est tout à fait inexistante. Selon notre problématique, seul un croisement des réponses aux questions du sondage pourrait avoir un sens.

De manière générale, le rapprochement entre deux observations paraît avoir d'autant plus de significations (au regard de la théorie) que

- 1) l'écart quantitatif de réalisations de ces deux observables est grand (resp. petit)
- 2) l'écart qualitatif entre ces deux observables est petit (resp. grand)

Les fréquences conditionnelles apparaissent comme adaptées pour représenter ces deux points de vue, le point de vue quantitatif par la comparaison des fréquences numériques, le point de vue qualitatif par la comparaison des propriétés des ensembles I et J en jeu. Elles permettent de déceler au mieux les distorsions entre ces deux points de vue et sont donc d'excellents véhicules statistiques de la signification (dans le sens défini plus haut).