B. LASCAR
R. LASCAR

Propagation des singularités pour des opérateurs dont la matrice fondamentale contient des valeurs propres non purement imaginaires

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1 « Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 125-150
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_125_0>

PROPAGATION DES SINGULARITES POUR DES OPERATEURS DONT LA MATRICE FONDAMENTALE CONTIENT DES VALEURS PROPRES NON PUREMENT IMAGINAIRES

B. Lascar

C.N.R.S. Mathématiques. UA 213, Université P. et M. Curie, 4 Place Jussieu. 75005 Paris. France.

R. Lascar

Mathématiques. UA 213, Université P. et M. Curie, 4 Place Jussieu. 75005 Paris. France.

Dans ce travail on va prouver des résultats de propagation des singularités C^∞, ou Gevrey-s pour des opérateurs pseudodifferentiels à caractéristiques doubles dont la matrice fondamentale admet des valeurs propres non purement imaginaires.

Il est bien connu qu'il y a deux types de propagation envisageables. La première, que l'on peut décrire aussi pour des équations ultra-hyperboliques, est celle de la propagation le long de variétés stables. La deuxième est une propagation hyperbolique le long de courbes bicaractéristiques *suturées*.

On s'attend à ce que dans le premier cas une condition discrète sur les termes d'ordre inférieurs soit demandée. Pour la propagation hyperbolique il n'y a par contre aucune condition.

De nombreux résultats sont connus dans chacun de ces deux cas. Dans Lascar–Sjöstrand [6], on prouve des résultats du premier type pour une très large classe d'équations, avec cependant une condition sur les termes d'ordre inférieurs probablement trop restrictive. Dans le cadre du front d'onde analytique, généralisant un résultat d' Oaku [8] , dans [10] Sjöstrand traite le cas où les caractéristique doubles sont symplectiques et de codimension quelconque. On fait remarquer que la méthode de [10] est très spécifique aux singularités analytiques. Notre premier résultat prolonge au cas C^∞ le résultat de Sjöstrand mentionné.

Pour ce qui est des opérateurs effectivement hyperboliques, Melrose [7] donne un résultat tout à fait général pour ce qui est des singularités C^∞. Notre propos a donc été de prouver un résultat analogue pour ce qui est des singularités Gevrey-s. Ceci permet de compléter dans le cas effectivement hyperbolique les résultats de Lascar [4].

Chacun de ces résultats étant traité par une méthode spécifique, cet article contient deux paragraphes indépendants contenant chacun une introduction, un énoncé des hypothèses et des commentaires sur la preuve.

On peut dire qu'il s'agit dans tous les cas de méthode d'estimation d'énergie, et que dans les deux situations on utilise des mutiplicateurs qui s'annullent à un ordre assez grand sur les caractéristiques doubles.

1.Propagation des singularités le long de variétés stables.

1. 0 Enoncé du théorème 1.

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal p, et notons p_0 son symbole sous principal.

On suppose que p est réel et on désigne par Σ, l'ensemble des caractéristiques doubles de P, c'est à dire $\Sigma=\{(x,\xi);\ p(x,\xi)=dp(x,\xi)=0\}$.

Soit $\rho_0 \in T^*\mathbf{R}^n \backslash 0$, un point de Σ, au voisinage duquel on travaille. On sait que sur Σ la matrice fondamentale F_p est bien définie, ainsi que le symbole sousprincipal.

On fera de plus les hypothèses suivantes :

$(H)_1$: Σ est une variété lisse, symplectique, de codimension 2r.

$(H)_2$: Pour $\rho\in\Sigma$, $F_p(\rho)$ est de rang 2r et ses valeurs propres non nulles ont une partie réelle non nulle.

Pour $\rho\in\Sigma$, soit $\Lambda_+(\rho)$ (resp $\Lambda_-(\rho)$) le sous espace dont le compléxifié est la somme des sous espaces spectraux de $F_p(\rho)$ relatifs aux valeurs propres de parties réelles strictement positives (resp négatives).

On sait alors, voir Abraham-Marsden [1] et Sjöstrand [10], que l'on peut définir au voisinage de ρ_0, deux variétés stables par H_p, contenues dans $p^{-1}(0)$, involutives, $I_\pm$ telles que $\Sigma\subset I_\pm$, $T_\rho(I_\pm)=T_\rho\Sigma\oplus\Lambda_\pm(\rho)$. I_+ (resp I_-) est la variété stable attractive (resp répulsive).

Il résulte aussi de Sjöstrand [10], que l'on peut trouver des coordonnées symplectiques (x,ξ) avec $x=(x'',x')$ $x''\in \mathbf{R}^r$, $x'\in \mathbf{R}^{n-r}$; telles que $p(x,\xi)=A(x,\xi)x''.\xi''$. La matrice A a pour valeurs propres (aux points de Σ) des nombres λ_j de partie réelle positive. En effet, $\pm\lambda_j$ sont les valeurs de F_p.

On fait l'hypothèse suivante sur les termes d'ordre inférieurs :

$(H)_3$ Si $\rho\in\Sigma$, $p_0+i\sum_{1\leq j\leq r}(\alpha_j+1/2)\lambda_j\neq 0$, pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^r$.

On peut prouver le théorème :

Théorème 1.

Soient P un opérateur pseudodifférentiel qui satisfait les conditions $(H)_1$, ...,$(H)_3$ et ρ_0 un point de Σ. Soit $\lambda_+(\rho_0)$ la feuille intégrale de $/_+$ passant par ρ_0.

Si $\rho_0\notin WF(Pu)$ et si $\lambda_+(\rho_0)\setminus(\rho_0)\cap WF(u)=\emptyset$, alors $\rho_0\notin WF(u)$.

1.1 Preuve du théorème 1.

On se ramène à un problème avec grand paramètre λ, et on utilise la quantification adaptée :

$P(x,D_x,\lambda)=op_{1/2}(p)=\int p((x+y)/2,\xi,\lambda)\ e^{i\lambda(x-y)\xi}\ u(y)\ (\lambda/2\pi)^n\ dyd\xi.$

On désigne pa r OF l'analogue oscillant du front d'onde WF.

On s'intéresse à un opérateur pseudodifferentiel $P(x,D_x,\lambda)=op_{1/2}(\sigma)$. Le symbole total σ s'écrit $\sigma=p+\lambda^{-1}p_0(x,\xi,\lambda)$ où p_0 est de degré 0, tandis que le symbole principal p est de la forme $p(x,\xi)=A(x,\xi)x''.\xi''$; $x''\in\mathbf{R}^r$, $\xi''\in\mathbf{R}^r$ est la variable duale de x'', $x'\in\mathbf{R}^{n-r}$ et $\xi'\in\mathbf{R}^{n-r}$ seront les autres variables. $A(x,\xi)$ est inversible. On microlocalisera près d'un point ρ_0 où $x''_0=\xi''_0=0$ et $\xi'_0\neq 0$. On peut supposer que $Q^{-1}A(\rho_0)Q=\mathrm{diag}(\lambda_j)+T$ où les $\mathrm{Re}\,\lambda_j>0$, Q est une matrice complexe, T est une matrice triangulaire de norme assez petite pour que $\mathrm{Re}(Q^{-1}A(\rho_0)Qv,v)\geqq c|v|^2$.

Soit $s(x,\xi)=1/2((\lambda x'',x'')-C(\mu\xi'',\xi'')-C_1|(x',\xi')|^2)+\varepsilon$. C, ε et C_1 sont des constantes positives, λ et μ sont des opérateurs autoadjoints positifs déterminés par les relations :

$1/2(\lambda A(\rho_0)+{}^tA(\rho_0)\lambda)=I$, $1/2(\mu\,{}^tA(\rho_0)+A(\rho_0)\mu)=I$.

$s'_{x''}=\lambda x''$, $p'_{\xi''}=A(x,\xi)x''+(\nabla_{\xi''}A)x''.\xi''$

$s'_{\xi''}=-C\mu\xi''$, $p'_{x''}={}^tA(x,\xi)\xi''+(\nabla_{x''}A)x''.\xi''$

$s'_{(x',\xi')}=-C_1(x',\xi')$, $p'_{(x',\xi')}=(\nabla_{(x',\xi')}A)x''.\xi''$

D'où l'on déduit que

$\{p,s\}=|x''|^2+C|\xi''|^2+O((|x''|^2+C|\xi''|^2)((|x''|+|\xi''|)+C_1/C^{1/2}|(x',\xi')|))$. Les O ne dépendant pas du choix des constantes C et C_1 qui seront fixées en fonction de la géométrie. On supposera que $C_1\leqq C^{1/2}$.

On travaille dans le domaine $\Omega=\{(x,\xi),\ |x''|<\alpha,\ |\xi''|<\beta,\ |(x',\xi')|<\gamma\}$. On supposera que Ω est assez petit pour que $\{p,s\}\geqq c(|x''|^2+C|\xi''|^2)$ dans Ω. (1.1)

La région $\{s\geqq 0\}\cap\partial\Omega$ ne contient que des points où $|x''|=\alpha$ si $C\beta^2$ et $C_1\gamma^2$ sont grands par rapport à α^2, de plus en ces points $|\xi''|^2\leqq k\alpha^2/C$ et $|(x',\xi')|^2\leqq k\alpha^2/C_1$; si on fixe, pour une valeur donnée de α, des constantes C et C_1 grandes, il va résulter de l'hypothèse que $\{s\geqq 0\}\cap\partial\Omega\cap OF(u)=\emptyset$. (1.2)

Dans la suite on sera amené à choisir Ω petit, s sera fixée alors.

On pose $u_\alpha = x''^\alpha u$ et $U_N = (u_\alpha)_{|\alpha|=N}$. A un vecteur $(p_\alpha)_{|\alpha|=N}$ on associe le polynôme sur $\mathbf{C}^r$ $p(z) = \sum_{|\alpha|=N} p_\alpha z^\alpha$. Si A est une matrice r×r, on note L_A l' opérateur $L_A(p) = Az.\partial/\partial z p(z)$ agissant sur les pôlynomes de degré N sur **C**. Soit $J_Q(p)(z) = p(Qz)$, on voit que $J_Q L_A J_Q^{-1} = L_{Q^{-1}AQ}$.

On va montrer que pour N assez grand, U_N n'a pas de front d'onde dans $\{s>0\}\cap\Omega$. Par récurrence sur κ, on suppose que $OF_{\kappa+N}(U_N)\cap\{s>0\}\cap\Omega=\emptyset$. Soit K une partie compacte de $\{s>0\}\cap\Omega$, U_N est $H^{\kappa+N}$ dans K.

Soit ϕ une fonction $C^\infty(\mathbf{R})$, à support dans $\mathbf{R}_+$, croissante et égale à 1 pour $t \geqq \varepsilon_K$.

On va calculer $\mathrm{Im}(PU_N, CJ_Q{}^*J_QU_N)$ où $C = op_{1/2}(c)$, $c(x,\xi) = \phi(s(x,\xi))\omega(x,\xi)$ où ω est une fonction de troncature dans Ω. On aura fait en sorte que c soit supporté par K.

On évalue d'abord ImCP. $CP = op_{1/2}(c(p+\lambda^{-1}p_0) + 1/2i\lambda\{c,p\} + O(\lambda^{-2}))$. (1.3)

Le symbole de $O(\lambda^{-2})$ est à décroissance rapide hors de K. Donc

$|(O(\lambda^{-2})U_N, J_Q{}^*J_QU_N)| \leqq C\lambda^{-2\kappa-2N-2}$.

$\{p,c\} = \phi'(s)\omega\{p,s\} + \phi(s)\{p,\omega\}$, le deuxième terme est supporté dans un voisinage de $\{s>0\}\cap\partial\Omega$ dans lequel u est C^∞, on pourra donc le négliger; le premier terme a un symbole $\geqq 0$ on a donc une borne inférieure $(\phi'(s)\omega\{p,s\}u,u) \geqq -C\lambda^{-2}|u|^2$. Il en résulte que

$\mathrm{Im}(PU_N, CJ_Q{}^*J_QU_N) - \lambda^{-1}(op_{1/2}(c\,\mathrm{Im}p_0)J_QU_N, J_QU_N) \geqq -C\lambda^{-2\kappa-2N-2}$. (1.4)

On calcule $Px''^\alpha = x''^\alpha P + [P, x''^\alpha]$, le commutateur

$[P, x''^\alpha] = \sum_{\beta\leq\alpha, |\beta|\geq 1} c_{\alpha,\beta}\lambda^{-|\beta|}(\partial_\xi{}^\beta\sigma)x''^{\alpha-\beta}$ et pour $|\beta|=1$, $c_{\alpha,\beta} = 1/i\alpha!/(\alpha-\beta)!$. (1.5).

On fait remarquer que $\partial_{\xi''}{}^{\beta}p$ s'annule sur $x''=0$, soit $\partial_{\xi''}{}^{\beta}\sigma=\sum_{1\leq l\leq r}(\sigma_{\beta,l})x_l+\sigma_\beta{}^1$ où $\sigma_{\beta,l}$ est de degré -1. Ce qui fait que (1.5) peut s'écrire :

$[P,x''^{\alpha}]=\sum_{\beta\leq\alpha,|\beta|\geq 1,1\leq l\leq r}c_{\alpha,\beta}\lambda^{-|\beta|}((\sigma_{\beta,l})x''^{\alpha-\beta+(l)}+\sigma_\beta{}^1x''^{\alpha-\beta}$.

Ou encore :

$[P,x''^{\alpha}]=\sum_{k,l}1/i\alpha!/(\alpha-(l))!(A_{k,l}+\sum_m\partial_{\xi_l}A_{k,m}\xi_m)x''^{\alpha-(l)+(k)}+\sum_{\gamma,|\gamma|\leq|\alpha|-1}\sigma_{\alpha,\gamma}x''^{\gamma}$

où $\sigma_{\alpha,\gamma}$ est de degré $|\gamma|-|\alpha|-1$. (1.6).

On notera $a_{\alpha,\beta}=1/i\lambda^{-1}\sum_{k,l;\ \beta=\alpha-(l)+k}\alpha!/(\alpha-(l))!(A_{k,l}+\sum_m\partial_{\xi_l}A_{k,m}\xi_m)$. (1.7).

On a à estimer les termes $\sum_{|\alpha|=N}\mathrm{Im}(\sigma_{\alpha,\gamma}x''^{\gamma}u,C(J_Q{}^*J_QU_N)_\alpha)$, on suppose que $C=C_1{}^2+D+O(\lambda^{-\infty})$, où D est de degré -1 et supporté dans $\{s>0\}\cap\Omega$.

On utilise alors la proposition

<u>Proposition 1.1</u>

Si $x''^{\alpha}u$ est $H^{\kappa+|\alpha|}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$, pour $|\alpha|=M$ et si $Pu=f$ où $OF(f)\cap\{s>0\}\cap\Omega=\emptyset$, alors pour $|\gamma|\leq M$, $x''^{\gamma}u$ est $H^{\kappa+|\gamma|}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$. De plus si $c(x,\xi)$ est un symbole supporté dans $\{s>0\}\cap\Omega$, alors :

$$|Cx''^{\gamma}u|\leq o(1)\lambda^{|\alpha|-|\gamma|}\sum_{|\alpha|=M}|Cx''^{\alpha}u|+k\lambda^{-\kappa-|\gamma|-1} \quad (1.8)$$

où $o(1)$ tends vers zéro avec le diamètre de Ω et k est une constante positive; $o(1)$ ne dépend que de M et de Ω.

<u>Preuve.</u>

On suppose que $x''^{\gamma}u$ est $H^{\kappa+|\gamma|-1}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$ pour $|\gamma|\leq M$, et que $x''^{\alpha}u$ est $H^{\kappa+|\alpha|}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$ pour $|\alpha|=M$. Soit $\tilde{u}(\lambda,x',\xi'')=\hat{u}(x',\lambda\xi'')$, où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier partielle en x''. Si $C=op_{1/2}(c)$ est un opérateur pseudodifferentiel, on voit que $C\tilde{u}(x',\xi'')=op_{1/2}(\tilde{c})\tilde{u}$, avec $\tilde{c}(\xi'',x';w,\xi')=c(-w,x';\xi'',\xi')$ où w est la variable duale de ξ''.

$(x''^{\alpha}u)^{\sim}=(i\lambda)^{-\alpha}\partial_{\xi''}{}^{\alpha}\tilde{u}=\tilde{u}_{\alpha}$. On note $D_{\xi''}=1/(i\lambda)\partial_{\xi''}$. Supposons que $|\gamma|=j$ et $j\leq M-1$. Notons $v_j=\sum_{|\gamma|=j}\lambda^{j}|C\tilde{u}_{\gamma}|$. On va prouver une relation de récurrence sur les v_j. La fonction $\tilde{u}$ satisfait $\tilde{P}\tilde{u}=\tilde{f}$, f est $O(\lambda^{-\infty})$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$. On note, en faisant un calcul analogue à celui de la formule (1.7) que $\tilde{u}_{\gamma}$ satisfait le système :

$$\tilde{P}\tilde{u}_{\delta}+(\textstyle\sum_{|\gamma|=j}\lambda^{-1}Q_{\delta,\gamma}\tilde{u}_{\gamma})=\sum_{|\gamma|<|\delta|}P_{\delta,\gamma}\tilde{u}_{\gamma}+D_{\xi}{}^{\delta}\tilde{f} \qquad (1.9);$$

où les opérateurs $P_{\delta,\gamma}$ sont de degré $|\gamma|-|\delta|-1$.

On écrit $\tilde{P}=\sum_{1\leq q\leq r}\tilde{P}_{q}D_{\xi_q}+\lambda^{-1}\tilde{p}'_{0}$. Il résulte de la condition $(H)_3$, que $Q+\tilde{p}'_0Id$ est un système elliptique. On a en effet le lemme suivant :

Lemme1.

Sous l'hypothèse $p_0+i\sum_{1\leq j\leq r}(\alpha_j+1/2)\lambda_j\neq 0$, pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^r$, sur Σ. Si Ω est assez petit, $Q+\tilde{p}'_0Id$ est elliptique dans Ω.

Preuve du lemme.

On calcule d'abord Q; $Q_{\delta,\gamma}$ provient du calcul de $-[\tilde{P},D_{\xi}{}^{\gamma}]$. On a calculé en (1.7) la contribution de $[P,x''^{\gamma}]$, par transformation de Fourier il vient :

$Q_{\gamma,\delta}=i\sum_{k,l;\ \delta=\gamma-(l)+k}\gamma!/(\gamma-(l))!(A_{k,l}+\sum_{m}\partial_{\xi_l}A_{k,m}\xi_m)^{\sim}$.

Le deuxième terme s'annule sur Σ, la première matrice est celle de l'opérateur $iAz.\partial/\partial z$ comme opérateur sur les polynômes homogènes de degré M. Son spectre est donc constitué par les $i\sum_{1\leq j\leq r}\alpha_j\lambda_j$, où λ_j sont les valeurs propres de $A(\rho)$ et α est un multi-indice de longueur M.

$\tilde{p}'_0$ est égal à $\tilde{p}_0+i/2\mathrm{tr}\tilde{A}+O(\xi'')$. L'hypothèse $(H)_3$ permet donc de déduire que $Q+\tilde{p}'_0 Id$ a un symbole elliptique dans Ω, pour tout M, si Ω est assez petit. Ceci prouve le lemme.

On en déduit que :

$$v_j \leq o(1)\Big(\sum_{|\gamma|=j, 1\leq q\leq r} \lambda^{j+1}|CD_{\xi_q}\tilde{u}_\gamma|\Big)+k_0\sum_{0\leq l\leq j-1} v_l+k_1\lambda^{-1}\Big(\sum_{|\gamma|\leq j+1}\lambda^{|\gamma|}|D\tilde{u}_\gamma|\Big)+O(\lambda^{-\infty}) \tag{1.10}$$

où o(1) tends vers zéro avec le diamètre de Ω, k_0 et k_1 sont des constantes, de plus k_0 est indépendante de Ω, D est un opérateur pseudodifférentiel supporté par $\{s>0\}\cap\Omega$. La relation (1.10) s'écrit donc :

$$v_j \leq o(1)v_{j+1}+k_0\sum_{0\leq l\leq j-1} v_l+k_1\lambda^{-1}w_{j+1}+O(\lambda^{-\infty}). \tag{1.11}$$

Avec $w_j=\sum_{|\gamma|\leq j}\lambda^{|\gamma|}|D\tilde{u}_\gamma|$.

Il résulte de la relation (1.11) que si Ω est assez petit :

$v_j \leq o(1)v_M+k_2 w_M+O(\lambda^{-\infty})$ pour $j<M$, ce qui s'écrit :

$$\sum_{|\gamma|=j}|C\tilde{u}_\gamma| \leq o(1)\lambda^{M-j}\sum_{|\alpha|=M}|C\tilde{u}_\alpha| +k_2\lambda^{-1-j}\sum_{|\gamma|\leq M}\lambda^{|\gamma|}|D\tilde{u}_\gamma|+O(\lambda^{-\infty}) \tag{1.12}$$

Ceci prouve que $\tilde{u}_\gamma$ est $H^{\kappa+|\gamma|}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$.. On a donc

$$\sum_{|\gamma|=j}|C\tilde{u}_\gamma| \leq o(1)\lambda^{M-j}\sum_{|\alpha|=M}|C\tilde{u}_\alpha| +k\lambda^{-\kappa-j-1}.$$

On observe que la constante o(1) ne dépend que de M et Ω.

Ce qui était la relation recherchée.

On majore pour $|\gamma|<|\alpha|$:

$$|(C_1\sigma_{\alpha,\gamma}x''^{\gamma}u, C_1(J_Q^*J_QU_N)_\alpha)| \leq \lambda^{-1}(o(1)+\varepsilon)\sum_{|\alpha|=N}|C_1x''^{\alpha}u|^2+C_\varepsilon\lambda^{-2\kappa-2|\alpha|-3}. \tag{1.13}$$

où o(1) tend vers zéro avec le diamétre de Ω et ne dépend que de Ω et N; ε est arbitraire.

Tandis que :

$$|(\sigma_{\alpha,\gamma}x''^{\gamma}u,D(J_Q{}^*J_QU_N)_\alpha)|\leqq C\lambda^{-2\kappa-2|\alpha|-2} \qquad (1.14)$$

puisque D est de degré -1 et que $x''^{\gamma}u$ est $H^{\kappa+|\gamma|}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$.

De même :

$$|(a_{\alpha,\beta}x''^{\beta}u,D(J_Q{}^*J_QU_N)_\alpha|\leqq C\lambda^{-2\kappa-2|\alpha|-2} \qquad (1.15).$$

$$|([C_1,a_{\alpha,\beta}]x''^{\beta}u,C_1(J_Q{}^*J_QU_N)_\alpha)|\leqq C\lambda^{-2\kappa-2|\alpha|-2}. \qquad (1.16).$$

On déduit de (1.6) et de (1.13) ... (1.16) que :

$$|([P,x''^{\alpha}]u,C(J_Q{}^*J_QU_N)_\alpha)-\sum_{|\beta|=N}(a_{\alpha,\beta}C_1x''^{\beta}u,C_1(J_Q{}^*J_QU_N)_\alpha|\leqq$$
$$\lambda^{-1}(o(1)+\varepsilon)|C_1U_N|^2+C\lambda^{-2\kappa-2N-2}. \qquad (1.17);$$

où $o(1)$ tend vers zéro avec le diamétre de Ω et ne dépend que de Ω et N.

On étudie donc l'opérateur $\mathcal{A}(x,D)$ dont le symbole est $\mathcal{A}(x,\xi)=(a_{\alpha,\beta})_{|\alpha|=|\beta|=N}$. En ρ_0, $J_Q\mathcal{A}(\rho_0)J_Q{}^{-1}=1/i\lambda(\delta_{\alpha,\beta}\sum_1\alpha_1\lambda_1)+O(N\lambda^{-1}\|\Gamma\|)$, et donc dans Ω $-\mathrm{Im}(\mathcal{A}(\rho)J_Q{}^{-1}v,J_Q{}^*v)\geqq cN\lambda^{-1}|v|^2$, comme $\mathrm{Im}\,\mathcal{B}(x,D)=op_{1/2}(1/2i(\mathcal{B}(x,\xi)-\mathcal{B}^*(x,\xi))$, l'inégalité de Gärding entraine que pour λ assez grand (pour N fixé)

$$-\mathrm{Im}(J_Q\mathcal{A}(x,D)J_Q{}^{-1}C_1U,C_1U)\geqq c_1N\lambda^{-1}|C_1U|^2-C_N\lambda^{-2}|U|^2. \qquad (1.18).$$

La constante c_1 ne dépend pas de C_1, ni de N et Ω.

Si de plus, U est $H^{\kappa+N}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$, on déduit de (1.18) que

$$-\mathrm{Im}(\mathcal{A}(x,D)C_1U,C_1J_Q{}^*J_QU)\geqq c_1N\lambda^{-1}|C_1J_QU|^2-C\lambda^{-2\kappa-2N-2}. \qquad (1.19).$$

On déduit à l'aide de (1.17) et (1.19) que :

$-\mathrm{Im}(PU_N,CJ_Q{}^*J_QU_N)\geqq c_1N\lambda^{-1}|C_1J_QU_N|^2-\lambda^{-1}(o(1)+\varepsilon)\sum_{|\alpha|=N}|C_1x''^{\alpha}u|^2-C\lambda^{-2\kappa-2N-2}$, et donc pour tout N on peut choisir Ω assez petit pour que :

$$-\mathrm{Im}(PU_N,CJ_Q{}^*J_QU_N)\geqq c_1/2N\lambda^{-1}|C_1J_QU_N|^2-C\lambda^{-2\kappa-2N-2} \qquad (1.20)$$

De (1.4) et (1.20) on déduit que si N est assez grand par rapport à $\mathrm{Im}\,p_0$:

$$cN\lambda^{-1}|C_1 J_Q U_N|^2 \leq C\lambda^{-2\kappa-2N-2} \qquad (1.21).$$

C'est à dire : $x''^{\alpha}u$ est $H^{\kappa+N+1/2}$ dans $\{s>0\}\cap\Omega$. La récurrence prouve que pour $|\alpha|=N$, $x''^{\alpha}u$ est C^{∞} dans $\{s>0\}\cap\Omega$, et la proposition 1 montre que u est C^{∞} dans $\{s>0\}\cap\Omega$.

2. Propagation hyperbolique des singularités Gevrey pour des opérateurs effectivement hyperboliques.

2. 0 Enoncé du résultat.

L'objectif de ce paragraphe est de compléter les résultats de propagation des singularités Gevrey de [4] au cas des opérateurs effectivement hyperboliques.

Il est en effet raisonnable de penser que l'on a encore une propagation des singularités hyperbolique Gevrey-s même pour $s \geqq 2$ quels que soient les termes d'ordre inférieurs.

Nous donnerons ici une preuve à peu prés complète; elle s'appuie essentiellement sur celle de Melrose [7] dans laquelle nous incorporons certaines de nos techniques de [4] et de [5].

Pour un opérateur effectivement hyperbolique P, on peut définir des *bicaractéristiques suturées* en suivant [7] de la façon suivante.

Soient $\Sigma_1=\{(x,\xi);\ p(x,\xi)=0 \text{ et } dp(x,\xi)\neq 0\}$ et $\Sigma=\{(x,\xi);\ p(x,\xi)=0 \text{ et } dp(x,\xi)=0\}$. Soit t une fonction telle que $|H_p t|>\delta|H_p|$ sur Σ_1, pour un certain $\delta>0$. Une telle fonction est appelée une fonction de temps. Une bicaractéristique suturée est une courbe continue γ: $(a,b)\to p^{-1}(0)$ satisfaisant :

(i) $\gamma^{-1}(p^{-1}(0)\backslash\Sigma_1)=\{s_i\}$ est un ensemble discret.

(ii) Si t est une fonction de temps prés de $\rho_i=\gamma(s_i)$, $t\circ\gamma$ est monotone près de s_i.

(iii) γ est C^∞ sur $[s_i,s_{i+1}]$ et est une courbe bicaractéristique reparamétrée de p sur (s_i, s_{i+1}).

On supposera dans la suite que l'on a affaire à un opérateur pseudodifferentiel analytique voir Boutet de Monvel - Krée [2]. Cette hypothèse est beaucoup plus restrictive que celle que l'on faisait dans [4]. La raison en est que l'on obtient une estimation d'énergie que lorsque P est est écrit sous une forme réduite que l'on trouve après l'utilisation du théorème de préparation de Malgrange et aussi quelques divisions, ces opérations se passant mal en Gevrey. Cependant sous la forme réduite l'hypothèse d' analyticité n' est pas nécessaire.

On désigne par $WF^{(s)}(u)$ le front d'onde Gevrey s de la distribution u.

Théorème 2.

Soit P un opérateur pseudodifferentiel analytique effectivement hyperbolique et u une distribution telle que $Pu \in G^s$ microlocalement, alors $WF^{(s)}(u)$ est une réunion de bicaractéristiques suturées.

Dans la preuve on utilisera comme dans [9] un grand paramètre λ et la notation suivante pour la quantification de Weyl avec paramètre :

$$P(x,D_x,\lambda)u=op_{1/2}(p)(u)=\int p((x+y)/2,\xi,\lambda)\ u(y)\ e^{i\lambda(x-y)\xi}\ (\lambda/2\pi)^n dy d\xi.$$

2. 1 L'estimation d'énergie.

On écrit l'opérateur P sous la forme :
$P=-D_t^2+t^2H(t,x,D_x)+G(t,x,D_x)+H_1(t,x,D_x,\lambda)$ où H a pour symbole $h(t,x,\xi)>0$, G a pour symbole $g(t,x,\xi)\geqq 0$, H_1 est un terme d'ordre -1 de symbole $h_1(t,x,\xi,\lambda)$.

Le symbole total σ de P est $-\tau^2+t^2h+g+h_1$, le symbole principal est $p=-\tau^2+t^2h+g$.

On note par (u,v) le produit scalaire de $L^2(R^n{}_+)$.

Soit $\phi(t,x,\xi)$ un poids tangentiel analytique, k est un entier; on va calculer $\mathrm{Im}(Pu,Mu)$ où $M=op_{1/2}(m)$. On prendra $m=e^{\lambda\mu\phi}(\tau t^k+im''(t,x,\xi))$, m'' sera choisi un peu plus loin. Vu le choix de k, il n'y a pas de termes de bord, on calcule donc :

$$\mathrm{Im}(\bar{m}\#\sigma)=\mathrm{Im}(\bar{m}\sigma)+1/2\lambda\mathrm{Re}\{\bar{m},\sigma\}+\mathrm{Im}\Big(\sum_{\alpha,\beta\ |\alpha|+|\beta|\geq 2}(i/2)^{\alpha+\beta}(-1)^{\alpha}\lambda^{-(\alpha+\beta)}\partial_x{}^{\alpha}\partial_\xi{}^{\beta}\bar{m}\,\partial_x{}^{\beta}\partial_\xi{}^{\alpha}\sigma/\alpha!\beta!\Big)+\dots \tag{2.1}$$

On notera R_n le terme où $|\alpha|+|\beta|=n$.

Comme le cas des classes de Gevrey d'indice $s<2$ est connu, on suppose $s\geqq 2$. On utilise le notation de [4] en écrivant $\mu=\mu_0\lambda^{-1+1/s}$, où μ_0 est un petit paramètre.

On prendra $m''=1/2\mu t^k\phi'_t+C_0\lambda^{-1}t^{k-1}$.

On va montrer le résultat suivant :

<u>Proposition 2.1.</u>

Il existe des constantes c, c_1, $C>0$, telles que si k, λ et $\mu_0{}^{-1}$ sont assez grands dans la région $\lambda\mu^2\leqq 1$ et $\lambda\mu\geqq 1$, on a l'inégalité :

$$2\mathrm{Im}(Pu,Mu)\geqq c\mu(|t^{k/2}D_tu|_\phi{}^2+|t^{k/2+1}u|_\phi{}^2)+\lambda^{-1}kc|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi{}^2+\lambda^{-1}/8|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2+c_1\mu k^2\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi{}^2+c_1k^3\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi{}^2-C\exp(-1/C\lambda^{1/s})|u|^2.$$

<u>Demonstration.</u>

La statégie consiste à montrer une borne inférieure pour la contribution de R_0+R_1, cette estimation sera améliorée par certains termes provenant de R_2.

On calcule R_0 et R_1.

$$R_0=e^{\lambda\mu\phi}(\tau t^k \mathrm{Im}h_1-m''(-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1))$$

$$R_1=-1/2\lambda(\{e^{\lambda\mu\phi}\tau t^k, -\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1\}-\{e^{\lambda\mu\phi}m'',\mathrm{Im}h_1\}).$$

On écrit

$$R_1=1/2\mu\tau t^k e^{\lambda\mu\phi}\{-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1,\phi\}-1/2\lambda e^{\lambda\mu\phi}\{\tau t^k,-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1\}-$$
$$1/2\mu e^{\lambda\mu\phi}m''\{\phi,\mathrm{Im}h_1\}-1/2\lambda e^{\lambda\mu\phi}\{m'',\mathrm{Im}h_1\}.$$

Dans R_0+R_1 on aura :

$$-e^{\lambda\mu\phi}(m''(-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1)-1/2\mu\tau t^k\{-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1,\phi\})-1/2\lambda e^{\lambda\mu\phi}$$
$$\{\tau t^k,-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1\}-1/2\mu e^{\lambda\mu\phi}m''\{\phi,\mathrm{Im}h_1\}-1/2\lambda\{m'',\mathrm{Im}h_1\}+e^{\lambda\mu\phi}\tau t^k\mathrm{Im}h_1.$$

R_0+R_1 est égal à la somme :

$$-1/2e^{\lambda\mu\phi}\mu t^k\phi'_t(-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1+2\tau^2-\tau\{t^2h+g+\mathrm{Re}h_1,\phi\}/\phi'_t)-$$
$$e^{\lambda\mu\phi}C_0\lambda^{-1}t^{k-1}(-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1)-$$
$$1/2\lambda e^{\lambda\mu\phi}\{\tau t^k,-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1\}-1/2\mu e^{\lambda\mu\phi}m''\{\phi,\mathrm{Im}h_1\}-$$
$$1/2\lambda e^{\lambda\mu\phi}\{m'',\mathrm{Im}h_1\}+e^{\lambda\mu\phi}\tau t^k\mathrm{Im}h_1. \qquad (2.2)$$

Le premier terme de (2.2) est :

$$-1/2e^{\lambda\mu\phi}\mu t^k\phi'_t(\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1-\tau\{t^2h+g+\mathrm{Re}h_1,\phi\}/\phi'_t),$$

dont la partie principale est transversalement elliptique.

$$\{\tau t^k,-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1\}=2k\tau^2t^{k-1}+t^k(2th+t^2h'_t+g'_t+\mathrm{Re}h_1{}'_t).$$

(2.2) s'écrit comme $A_1+A_2+A_3$ avec

$A_1=-1/2e^{\lambda\mu\phi}\mu t^k\phi'_t(\tau^2+t^2h+g+Reh_1-\tau\{t^2h+g+Reh_1,\phi\}/\phi'_t)$

$A_2=-1/2e^{\lambda\mu\phi}\lambda^{-1}(2k\tau^2t^{k-1}+t^k(2th+t^2h'_t+g'_t+Reh_1{}'_t)+C_0t^{k-1}(-\tau^2+t^2h+g+Reh_1))$

$A_3=-1/2\mu e^{\lambda\mu\phi}m''\{\phi,Imh_1\}-1/2\lambda e^{\lambda\mu\phi}\{m'',Imh_1\}+e^{\lambda\mu\phi}\tau t^kImh_1$.

On supposera que ϕ est une direction microhyperbolique c'est à dire que : $-\phi'_t{}^2+\nabla^2g(\rho_0)(H_\phi,H_\phi)<0$; donc $|\{g,\phi\}|\leq 2\phi'_tg^{1/2}(1-\varepsilon)$, ce qui fait que $|\tau\{g,\phi\}|/\phi'_t\leq(1-\varepsilon)(\tau^2+g)$, $|\tau t^2\{h,\phi\}|/\phi'_t\leq C(t\tau^2+t^3)$. On a donc : $\tau^2+t^2h+g-\tau\{t^2h+g,\phi\}/\phi'_t\geq c(\tau^2+t^2+g)$ avec $c>0$.

Vu l'hypothèse $\lambda\mu^2\leq 1$, on note que si a est un symbole régulier de degré 0, $e_\phi a=e_{\phi/2}\#a\#e_{\phi/2}+O(\mu^2e_\phi)$, avec la notation $e_\phi=e^{\lambda\mu\phi}$. On applique cette remarque à $\tilde{a}=\phi'_t(\tau^2+t^2h+g-\tau\{t^2h+g,\phi\}/\phi'_t)$.

D 'aprés l'inégalité de Fefferman-Phong :
$(\tilde{a}u,u)\geq c(|D_tu|^2+|tu|^2+(gu,u))-C\lambda^{-2}|u|^2$.

On adoptera la notation $|u|_\phi=|e_{\phi/2}u|$. On en déduit que $\tilde{a}_1=e_\phi\tilde{a}$ satisfait : $(\tilde{a}_1u,u)\geq c(|D_tu|_\phi{}^2+|tu|_\phi{}^2)-C\lambda^{-1}|u|_\phi{}^2$. Par ailleurs
$t^ka_1=t^{k/2}\#a_1\#t^{k/2}-1/8\phi'_tk\lambda^{-2}t^{k-2}$, donc
$(t^k\tilde{a}_1u,u)\geq c(|D_tt^{k/2}u|_\phi{}^2+|t^{k/2+1}u|_\phi{}^2)-C\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi{}^2-Ck\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi{}^2$.

Or $|t^{k/2}D_tu|_\phi{}^2\leq 2|D_tt^{k/2}u|_\phi{}^2+1/2k^2\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi{}^2$. Donc $(t^k\tilde{a}_1u,u)\geq c(|t^{k/2}D_tu|_\phi{}^2+|t^{k/2+1}u|_\phi{}^2)-C\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi{}^2-(Ck+ck^2)\,\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi{}^2$ pour c assez petit.

On majore $|(e_\phi t^k\phi'_tReh_1)u,u)\leq C\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi{}^2$, tandis que
$|(e_\phi t^k\tau\{Reh_1,\phi\})u,u)|\leq C\lambda^{-1}|t^{k/2}D_tu|_\phi{}^2+C\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi{}^2+C\lambda^{-2}|k||t^{k/2-1/2}\,u|_\phi{}^2$.

On en déduit que :

$-2A_1 \geqq c\mu(|t^{k/2}D_t u|_\phi{}^2+|t^{k/2+1}u|_\phi{}^2)-C\mu\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi{}^2-\mu(Ck+ck^2)\,\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi{}^2-$
$|k|\mu C\lambda^{-2}|t^{k/2-1/2}\,u|_\phi{}^2.$ (2.3).

On étudie maintenant A_2, soit

$\tilde{a}_2=(2k\tau^2t^{k-1}+t^k(2th+t^2h'_t+g'_t+\mathrm{Re}h_1{}'_t)+C_0t^{k-1}(-\tau^2+t^2h+g+\mathrm{Re}h_1)).$

$\tilde{a}_3=2k\tau^2t^{k-1}+t^k(2th+t^2h'_t+g'_t)+C_0t^{k-1}(-\tau^2+t^2h+g).$

On fixera $C_0=k$. $|g'_t|\leqq C_1g^{1/2}$ puis $t^kg'_t\leqq C_2t^{k-1}g+ht^{k+1}$, donc $\tilde{a}_3\geqq k\tau^2t^{k-1}+t^{k+1}$.

Si $\tilde{a}_3=b_3t^{k-1}$, $\tilde{a}_3=t^{(k-1)/2}\#b_3\#t^{(k-1)/2}-1/8(k-1)(2k-C_0)\lambda^{-2}t^{k-3}$,

$(b_3u,u)\geqq k|D_tu|^2+|tu|^2-C_k\lambda^{-2}|u|^2$. Puis

$(b_3e_\phi u,u)\geqq kc|D_tu|_\phi{}^2+|tu|_\phi{}^2-C_k\lambda^{-2}|u|_\phi{}^2-Ck\mu^2|u|_\phi{}^2$, donc

$(e_\phi\tilde{a}_3u,u)\geqq kc|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi{}^2+|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2-C_k\lambda^{-2}|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2-Ck\mu^2|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2-$
$Ck^2\lambda^{-2}\,|t^{(k-3)/2}u|_\phi{}^2-k^3c\lambda^{-2}|t^{(k-3)/2}u|_\phi{}^2.$

On majore $|(e_\phi(t^k\mathrm{Re}h_1{}'_t+C_0t^{k-1}\mathrm{Re}h_1)u,u)|\leqq CC_0\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2$. Donc

$-2A_2\geqq kc\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi{}^2+\lambda^{-1}|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2-(C_k\lambda^{-3}+CC_0\lambda^{-2}+Ck\mu^2\lambda^{-1})|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2$
$\quad-(Ck^2+ck^3)\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi{}^2.$

On utilise l'inégalité :

$|t^{(k-1)/2}u|^2\leqq\lambda/k(\varepsilon|t^{(k+1)/2}u|^2+\varepsilon^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|^2)$ pour tout $\varepsilon>0$. D'où l'on déduit que

$|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2\leqq\lambda/k(\varepsilon|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2+2\varepsilon^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi{}^2+C\varepsilon^{-1}\mu^2|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2).$ (2.4)

On obtient donc :

$-2A_2\geqq\lambda^{-1}(kc-2\varepsilon^{-1}\lambda/k(C_k\lambda^{-2}+Ck\lambda^{-1}+Ck\mu^2)(1-C\varepsilon^{-1}\mu^2)^{-1})|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi{}^2+$
$\lambda^{-1}(1-\varepsilon\lambda/k(C_k\lambda^{-2}+Ck\lambda^{-1}+Ck\mu^2)(1-C\varepsilon^{-1}\mu^2)^{-1})|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2-$
$(Ck^2+ck^3)\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi{}^2.$

On choisit ε assez petit puis λ assez grand et μ_0 assez petit de sorte que :

$$-2A_2 \geq \lambda^{-1}kc/2|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+\lambda^{-1}/2|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2-(Ck^2+ck^3)\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi^2. \qquad (2.5).$$

Utilisant (2.4) (2.3) devient :

$$-2A_1 \geq c/2\mu(|t^{k/2}D_tu|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)-\mu(Ck+ck^2)\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi^2-$$
$$\mu kC\lambda^{-2}|t^{k/2-1/2}u|_\phi^2 \qquad (2.6).$$

On va majorer A_3. $m''(\phi,\mathrm{Im}h_1)=(\mu t^k+kt^{k-1}\lambda^{-1})O(\lambda^{-1})$, donc

$|\mu(e_\phi m''(\phi,\mathrm{Im}h_1)u,u)| \leq C(\mu^2\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi^2+k\mu\lambda^{-2}|t^{(k-1)/2}u|_\phi^2$,

$\{m'',\mathrm{Im}h_1\}=\mu t^k\{\phi'_t,\mathrm{Im}h_1\}$, donc

$|\lambda^{-1}(e_\phi\{m'',\mathrm{Im}h_1\}u,u)| \leq C\lambda^{-2}|t^{k/2}u|_\phi^2$, enfin

$$|(e_\phi\tau t^k\mathrm{Im}h_1u,u)| \leq C\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi|t^{(k+1)/2}u|_\phi+C\mu\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi^2+$$
$$C\lambda^{-2}k|t^{(k-1)/2}u|_\phi^2+C\lambda^{-2}|t^{k/2}u|_\phi^2, \text{ donc}$$

$$2|A_3| \leq C\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+1/4\lambda^{-1}|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2+C(\mu\lambda^{-1}+\lambda^{-2})|t^{k/2}u|_\phi^2+$$
$$Ck\lambda^{-2}|t^{(k-1)/2}u|_\phi^2. \qquad (2.7).$$

Utilisant de nouveau (2.4) on obtient :

$$2|A_3| \leq C\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+1/4\lambda^{-1}|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2+$$
$$C(\mu\lambda^{-1}+\lambda^{-2})2\lambda/k(|t^{k/2}D_tu|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)+$$
$$\varepsilon C\lambda^{-1}|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2+C\varepsilon^{-1}\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2. \qquad (2.8).$$

On a donc prouvé la borne inférieure suivante : pour λ et k grands,

$$-2(A_1+A_2+A_3) \geq c\mu(|t^{k/2}D_tu|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)+\lambda^{-1}kc|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+\lambda^{-1}/8|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2-$$
$$\mu(Ck+ck^2)\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi^2-\mu C\lambda^{-2}|t^{k/2-1/2}u|_\phi^2-(Ck^2+ck^3)\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi^2. \qquad (2.9).$$

On va voir que certains termes provenant de R_2 vont améliorer l'inégalité (2.9).

Soit $R_n=\mathrm{Im}(\sum_{\alpha,\beta\ |\alpha|+|\beta|=n}(i/2)^{\alpha+\beta}(-1)^{\alpha}\lambda^{-(\alpha+\beta)}\partial_x^{\alpha}\partial_\xi^{\beta}\bar{m}\ \partial_x^{\beta}\partial_\xi^{\alpha}\sigma/\alpha!\beta!)$,

$\bar{m}=e_\phi(t^k\tau-i(1/2\mu\phi'_t t^k+k\lambda^{-1}t^{k-1}))$, $\sigma=-\tau^2+t^2h+g+k$.

Il sera utile de décomposer σ en $\sigma_0=t^2h+g+h_1$ qui est indépendant de τ, et en $\sigma_1=-\tau^2$.

$R_n{}^1$ est la contribution à R_n de $e_\phi\tau t^k$. Le terme général est de la forme $\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta'}(e_\phi)\ \partial_t^{\alpha''}\partial_\tau^{\beta''}(\tau t^k)\ \partial_x^{\beta}\partial_\xi^{\alpha}\sigma$ avec $\alpha=\alpha'+\alpha''$, $\beta=\beta'+\beta''$; il est nul sauf si $|\beta''|\leq 1$. Si $\alpha''\geq 1$ nécessairement $\beta=0$, car σ_0 étant indépendant de τ ne donne pas de contribution, puis $|\alpha|\leq 2$; il s'agit donc d'un terme de la forme $-\tau\partial_t^{\alpha''}(e_\phi)\ \partial_t^{\alpha''}t^k\ \partial_\tau^{\alpha}\tau^2$ comme $|\alpha|\geq 2$ on a $|\alpha|=2$, ce terme est réel car n est pair donc ne contribue pas à R_2.

Si $\alpha''=0$ et $\beta''=0$, on a un terme de la forme $\tau t^k\ \partial_x^{\alpha}\partial_\xi^{\beta}(e_\phi)\ \partial_x^{\beta}\partial_\xi^{\alpha}\sigma$. Si σ est égal à σ_0, on a un terme de la forme $\tau t^k e_\phi O(\mu^{\alpha+\beta})$, on a une majoration par

$$|(\tau t^k e_\phi O(\mu^2)u,u)|\leq C\mu^2|t^{(k-1)/2}D_t u|_\phi{}^2+C\mu^2|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2+C\mu^3|t^{k/2}u|_\phi{}^2+$$
$$Ck\ \mu^2\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}u|_\phi{}^2;$$

on utilise encore (2.4) pour majorer par

$$|(\tau t^k e_\phi O(\mu^2)u,u)|\leq C\mu^2(\ |t^{(k-1)/2}D_t u|_\phi{}^2+|t^{(k+1)/2}u|_\phi{}^2)+$$
$$C\mu^3\lambda\ /k(|t^{k/2}D_t u|_\phi{}^2+|t^{k/2+1}u|_\phi{}^2),$$

ce terme est absorbable dans (2.9) si k et λ sont grands.

Si $\alpha''=0$ et $\beta''=0$, et $\sigma_1=-\tau^2$ alors $\beta=0$, si $|\alpha|=2$ le terme est réel, des termes où $|\alpha|=1$ n'apparaissent pas ici car $n\geq 2$.

Si $\alpha''=0$ et $\beta''=1$, donc $\alpha'+\beta'\geq 1$ et on a un terme majoré par $\mu\lambda^{-1}|t^{k/2}u|_\phi{}^2$ ce qui en utilisant (2.4) se majore par

$C\mu k^{-1}(|t^{k/2}D_t u|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)$, qui peut être absorbé dans (2.9).

R_n^2 est la contribution à R_n de $-i/2e_\phi\mu\phi'_t t^k$, le terme général est de la forme $\mu\ \partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^\beta(\phi'_t e_\phi)\ \partial_t^{\alpha''}t^k\ \partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma$, avec $\alpha=\alpha'+\alpha''$.

Ici encore si $\alpha''\geqq 1$ alors seule intervient la contribution de σ_1, donc $\beta=0$, puis $|\alpha|=2$; le terme est donc égal à la somme

$-1/2\mu\lambda^{-2}\sum_{\alpha'+\alpha''=2}\partial_t^{\alpha'}(\phi'_t e_\phi)\ \partial^{\alpha''}t^k/\alpha'!\alpha''!$,

pour $\alpha''=2$ on a $-1/2\mu\lambda^{-2}\phi'_t e_\phi k(k-1)t^{k-2}$ et

$\mu(1/2\lambda^{-2}\phi'_t e_\phi k(k-1)t^{k-2}u,u)\geqq c_1\mu k^2\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi^2$;

pour $\alpha''=1$ et $|\alpha'|=1$ le terme est majoré par $C\mu^2\lambda^{-1}k|t^{(k-1)/2}u|_\phi^2$, puis si on utilise (2.4) on majore ce terme par

$C\mu^2(|t^{(k-1)/2}D_t u|_\phi^2+|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2)$

ce qui s'absorbe également dans (2.9) si μ_0 est assez petit.

Il reste les termes où $|\alpha''|=0$ qui sont de la forme $\mu\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\phi'_t e_\phi)t^k\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma$.

Si σ est égal à σ_0, on a à majorer un terme de la forme $e_\phi t^k O(\mu^3)$. Soit

$|(e_\phi t^k O(\mu^3)u,u)|\leqq C\mu^3|t^{k/2}u|_\phi^2\leqq C\mu^3\lambda/k(|t^{k/2}D_t u|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)$

ce qui s'absorbe dans (2.9).

Si $\sigma_1=-\tau^2$ il n'y a que le terme $-1/2\mu\lambda^{-2}\partial_t^2(\phi'_t e_\phi)t^k$ qui se majore par $C\mu^3|t^{k/2}u|_\phi^2$ et donc comme le terme précedent.

Au total

$$-R_2^2\geqq c_1\mu k^2\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi^2-o(1)(c\mu(|t^{k/2}D_t u|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)+\lambda^{-1}kc|t^{(k-1)/2}D_t u|_\phi^2$$
$$+\lambda^{-1}/8|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2) \qquad (2.10)$$

avec la notation o(1) pour une constante qui peut être rendue arbitrairement petite pour k et λ grands et μ_0 petit dans la région $\lambda\mu\geqq 1$.

R_n^3 est la contribution à R_n de $-ike_\phi\lambda^{-1}t^{k-1}$, le terme général est de la forme

$k\lambda^{-1}\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^\beta(e_\phi)\partial_t^{\alpha''}t^{k-1}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma$, avec $\alpha=\alpha'+\alpha''$.

Si $\alpha''\geqq 1$, on a vu plus haut que $\beta=0$ et $|\alpha|=2$, pour $\alpha''=2$ le terme obtenu est donc

$-k\lambda^{-3}(e_\phi(k-1)(k-2)t^{k-3}u,u)\leqq -c_1k^3\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi^2$,

pour $\alpha''=\alpha'=1$ on a le terme

$-\mu\lambda^{-2}k(k-1)(e_\phi\phi'_t t^{k-2}u,u)\leqq -c_1k^2\mu\lambda^{-2}|t^{(k-2)/2}u|_\phi^2$.

Si $\alpha''=0$ les termes sont de la forme $k\lambda^{-1}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(e_\phi)t^{k-1}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma$. La contribution de σ_0 se majore par $Ck\mu^2\lambda^{-1}|t^{(k-1)/2}u|_\phi^2$ et encore d'apres (2.4) par $C\mu^2(|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2)$, ce qui s'absorbe dans (2.9) pour μ_0 petit. Pour $\sigma_1=-\tau^2$ on a le terme $k\lambda^{-3}\partial_t^2(e_\phi)t^{k-1}$ ce qui se majore par $Ck\lambda^{-1}\mu^2|t^{(k-1)/2}u|_\phi^2$, donc comme plus haut.

On a montré que :

$$-R_n^3\geqq c_1k^3\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi^2-o(1)\lambda^{-1}(|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2) \qquad (2.11).$$

On en déduit que si k et λ sont grands, μ_0 petit et $\lambda\mu\geqq 1$, et si le support de u est petit on a :

$$2Im(Pu,Mu)\geqq c\mu(|t^{k/2}D_tu|_\phi^2+|t^{k/2+1}u|_\phi^2)+\lambda^{-1}kc|t^{(k-1)/2}D_tu|_\phi^2+\lambda^{-1}/8|t^{(k+1)/2}u|_\phi^2+$$
$$c_1\mu k^2\lambda^{-2}|t^{k/2-1}u|_\phi^2+c_1k^3\lambda^{-3}|t^{(k-3)/2}u|_\phi^2-C\exp(-1/C\lambda^{1/s})|u|^2. \qquad (2.12).$$

Ce qui était le résultat cherché.

2. 2. Conclusion de la preuve.

Soit W un voisinage de ρ_0, et notons par W' un voisinage de $\{(x,t,\xi,\tau)$ où $(x,t,\xi)\in W$ et $\tau=\pm(t^2h+g)(t,x,\xi)\}$, on va montrer que si $OF^{(s)}(u)\cap D_+(\alpha)=\emptyset$ où $D_+(\alpha)=\{(x,t,\xi,\tau)$ où $t=\alpha$ et $(x,t,\xi)\in W$ et $\tau=\pm(t^2h+g)(t,x,\xi)^{1/2}\}$ alors $\rho_0\notin OF^{(s)}(u)$, ceci vu la dynamique du flot bicaractéristique suffit à conclure voir [7]. On considère un voisinage Ω de ρ_0 de la forme $\Omega=\{|t|\leq\alpha,\ |(x,\xi)|\leq\beta\}$. On fera pour ϕ le choix suivant $\phi=t-C|(x,\xi)|^2+\varepsilon$ où C et ε sont choisi de sorte que sur $\partial\Omega\cap\{\phi\geq 0\}$ on ait $t=\alpha$, donc $\partial\Omega\cap\{\phi\geq 0\}\cap OF^{(s)}(u)=\emptyset$. L'inégalité (2.12) permet donc de prouver que si $\omega(t,x,\xi)$ a son support assez prés de ρ_0, pour k assez grand $|t^{k/2}\omega u|$ et $|t^{(k+1)/2}D_t\omega u|$ sont à décroissance exponentielle 1/s. On posera $v_k=\omega_k u$ les ω_k sont une suite de troncatures prés de ρ_0 $\omega_k(t,x,\xi)=\alpha_k(t)\beta_k(x,\xi)$, et $\omega_{k+1}\equiv 1$ au voisinage du support de ω_k, on posera

$V_k=\begin{pmatrix} t^{k/2}v_k \\ t^{k/2}D_t v_k \end{pmatrix}$. On écrit $P=D_t^2-\Lambda(t,x,D_x)$, donc

$Pv_{k-1}\equiv\omega_{k-1}Pu+2(D_t\omega_{k-1})(D_tv_k)+(D_t^2\omega_{k-1})(v_k)-[\Lambda,\omega_{k-1}]v_k$, $\equiv$ signifie modulo un terme à décroissance exponentielle 1/s. On trouve que

$|t^{k/2}D_t^2v_{k-1}|\leq C|t^{k/2}f|+C|t^{k/2}D_tv_k|+C|t^{k/2}v_k|+C|t^{k/2}v_{k-1}|+O(e^{-1/C\lambda^{1/s}})$.

On utilise l'inégalité :

$|t^{(k-1)/2}v_{k-1}|\leq(\lambda/k)^{1/2}(|t^{k/2}v_{k-1}|+|t^{k/2}D_tv_{k-1}|)$, puis

$|t^{(k-1)/2}D_tv_{k-1}|\leq(\lambda/k)^{1/2}(|t^{k/2}D_tv_{k-1}|+|t^{k/2}D_t^2v_{k-1}|)$ donc

$|t^{(k-1)/2}v_{k-1}|\leq C_{k,\lambda}(|t^{k/2}v_k|+|t^{k/2}D_tv_k|)+O(e^{-1/C\lambda^{1/s}})$. Soit

$|t^{(k-1)/2}D_tv_{k-1}|\leq C_{k,\lambda}(|t^{k/2}v_k|+|t^{k/2}D_tv_k|)+O(e^{-1/C\lambda^{1/s}})$

où $C_{k,\lambda}$ est un polynôme en λ.

On en déduit que :

$|V_{k-1}|\leq C_{k,\lambda}|V_k|+O(e^{-1/C\lambda^{1/s}})$ (2.13).

L'inégalité (2.13) est unilatérale et ne permet pas de conclure directement. On doit procéder comme dans [7] pour compléter l'argument.

L'inégalité (2.13) prouve la régularité de toutes les traces, on peut donc modifier u de façon à assurer que les traces de u sont nulles. On prouve ensuite une inégalité d'énergie analogue à la précédente dans $t \leqq 0$, mais utilisant le poids $|t|^{-k}$ et une fonction ϕ égale à $t-C|(x,\xi)|^2+\varepsilon$. De sorte que $\partial\Omega \cap \{\phi \geqq 0\} \cap \{t \leqq 0\} = \emptyset$.

Ceci permet de voir que $|\omega u| \leqq Ce^{-1/C\lambda^{1/s}}$, dans une norme $L^2(\mathbf{R}^n)$ et donc $\rho_0 \notin OF^{(s)}(u)$.

Bibliographie.

[1] R. Abraham and J. Marsden. Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings publ. company 1978.

[2] L. Boutet de Monvel - P.Krée. Pseudo differential operators and Gevrey classes. *Ann. Institut Fourier*, 17.1 (1967), 295-323.

[3] N. Hanges. Propagation of singularities for a class of operators with double characteristics. Seminar on singularities of sol. of linear partial diff. eq., Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979, 113-126.

[4] B. Lascar. Propagation des singularités Gevrey pour des opérateurs hyperboliques. *American Journal of Maths*, 110 (1988), 413-449.

[5] B. Lascar - R. Lascar. Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction. *A paraître dans les Comm. in PDE.*

[6] B. Lascar- J. Sjöstrand. Equation de Schrödinger et paramétrixes pour des équations à caractéristiques réelles de multiplicité variable. 2.

Comm. in Partial Diff. Equations. 10.5. (1985). 467-523 .

[7] R. Melrose. The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations. *Hokkaido Mathematical Journal*, 12 (1983), 371-391.

[8] T. Oaku. A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities. *Inv. Math. 65.* (1982), 491-525.

[9] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. Astérisque 95. (1984). S. M. F.

[10] J. Sjostrand. Analytic wavefront sets and operators with multiple characteristics. *Hokkaido Mathematical Journal*, 12 (1983), 392–433.